МЕХАНИКА

Теоретическая механика

Модуль 1

Раздел 2 – КИНЕМАТИКА

- КИНЕМАТИКА ТОЧКИ
  - ЛЕКЦИЯ 7
  - ЛЕКЦИЯ 8
- КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
  - ЛЕКЦИЯ 9
- СЛОЖНОЕ ДВИЖЕИЕ ТОЧКИ
  - ЛЕКЦИЯ 10
  - ЛЕКЦИЯ 11
- ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА
  - ЛЕКЦИЯ 12
  - ЛЕКЦИЯ 13

7.2

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их инертности и действующих на них сил.

Траекторией точки называется непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка относительно данной системы отсчета.

Для задания движения точки можно применять способы:

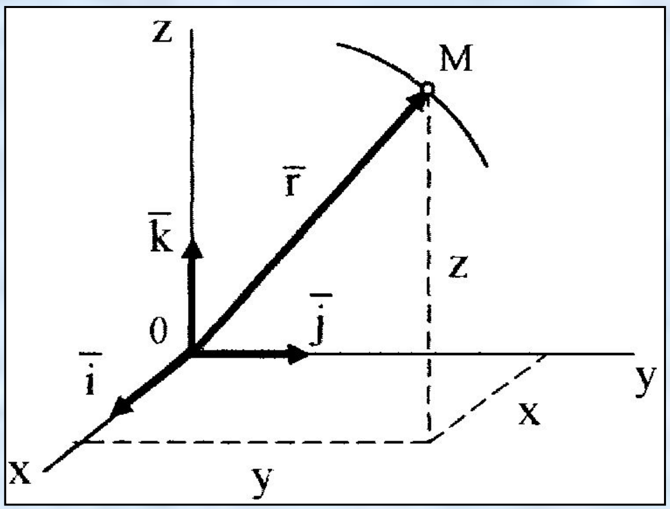
- векторный;

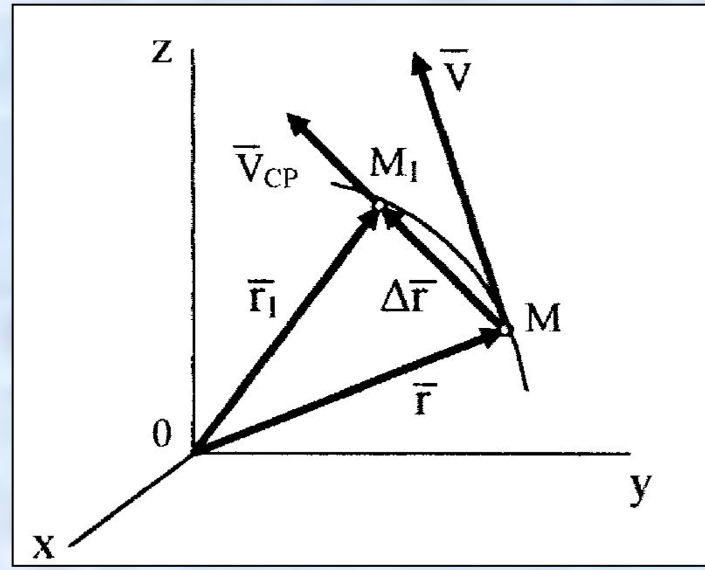
- координатный;

- естественный.

Векторный способ задания движения точки

$\boxed{\bar{r} = \bar{r}(t)}$ закон движения точки





Скорость точки в момент времени t

$$\bar{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Ускорение точки в момент времени t $\bar{a} = \dfrac{d\bar{V}}{dt} = \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}.$

Координатный способ задания движения точки

$x = f_1(t);$
$y = f_2(t);$
$z = f_3(t).$

закон движения точки

скорость точки

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} \qquad \cos\alpha = v_x / v$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} \qquad \cos\beta = v_y / v$$

$$\cos\gamma = v_z / v.$$

ускорение точки

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

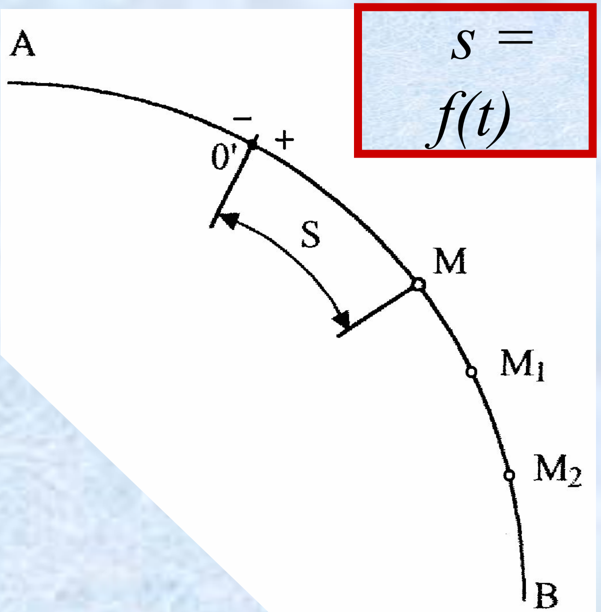
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad \cos\alpha_1 = a_x / a,$$

$$\cos\beta_1 = a_y / a,$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}, \qquad \cos\gamma_1 = a_z / a.$$

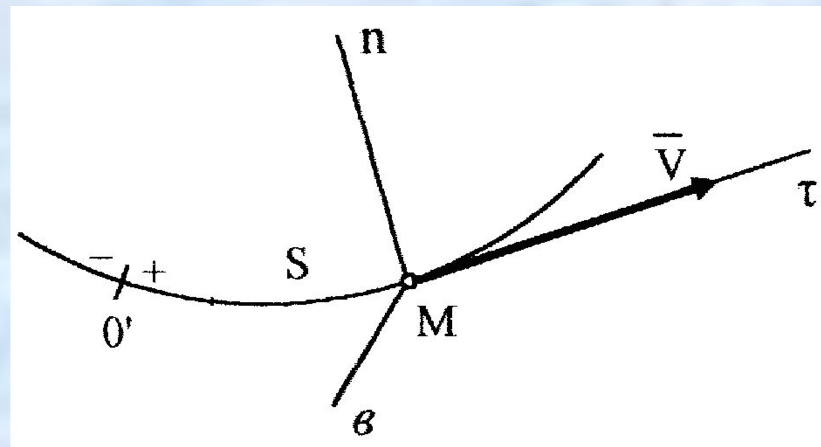
Естественный способ задания движения точки

Закон движения точки



$$s = f(t)$$

Оси естественного трехгранника



ось **Mτ** *- касательная*

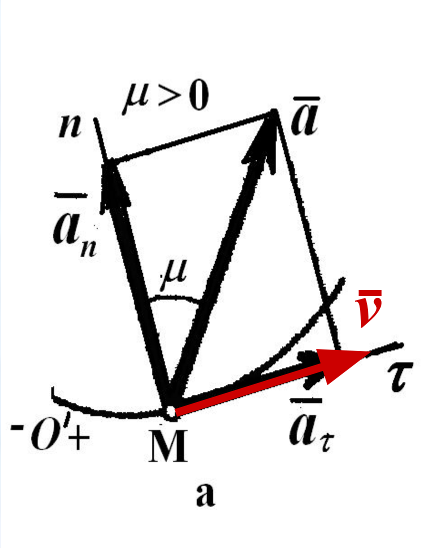
ось Mn *- главная нормаль*

ось Mb *- бинормаль*

Естественный способ задания движения точки

Скорость точки

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$ *или* $$\boxed{v = \frac{ds}{dt}}$$



Ускорение точки

$$\boxed{a_\tau \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}}$$

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{\rho}}$$

$$\boxed{a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}}$$

$$tg\mu = \frac{a_\tau}{a_n}$$

Кривизна траектории

в точке М

$$k = 1/\rho,$$

для прямой линии $\rho = \infty$;

для окружности $\rho = R$.

Естественный способ задания движения точки

Частные случаи движения точки

Прямолинейное движение

$\rho = \infty$

Тогда

$a_n = v^2/\rho = 0$

Полное ускорение :

$a = a_\tau = dv/dt.$

При равномерном движении

$v = \text{const},\ a_\tau = 0,$

$a = 0$

Криволинейное движение

- равномерное движение

$v = \text{const}$

$a_\tau = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = 0$

$a = a_\mathrm{n} = v^2/\rho$

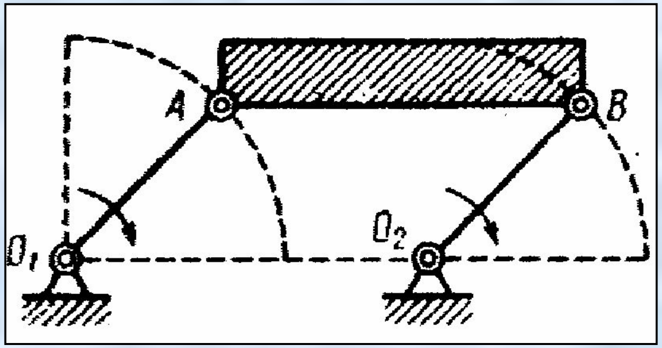
- равнопеременное движение

$a_\tau = \text{const} \qquad a_\mathrm{n} = v^2/\rho.$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

Поступательное движение тела

Поступательным *называется движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь параллельной своему начальному направлению.*



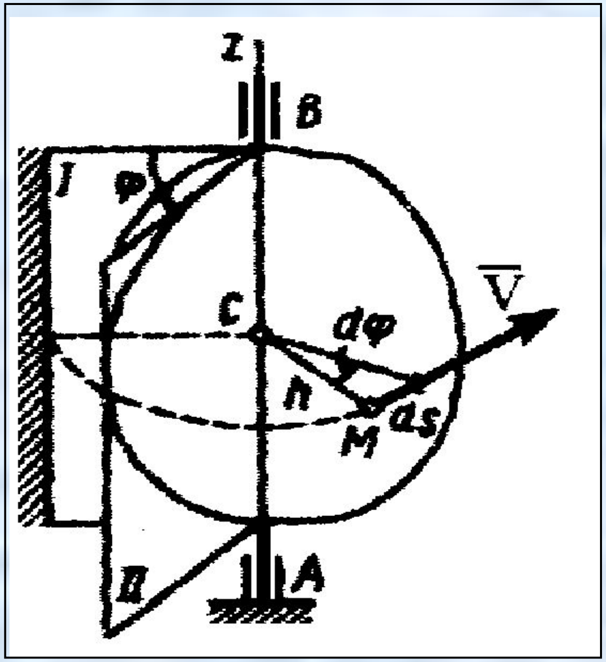
Свойства поступательного движения:

1. *Все точки тела описывают одинаковые траектории*

2. *Все точки тела имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения*

ВРАЩЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Вращательным движением *твердого тела вокруг неподвижной оси называется движение, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу (или неизменно с ним связанные), остаются во все время движения неподвижными*



Проходящая через неподвижные точки прямая - ось вращения.

$$\boxed{\phi = f(t)}$$

φ - *угол поворота тела*

закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

ВРАЩЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Угловая скорость тела

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

Единица измерения ω

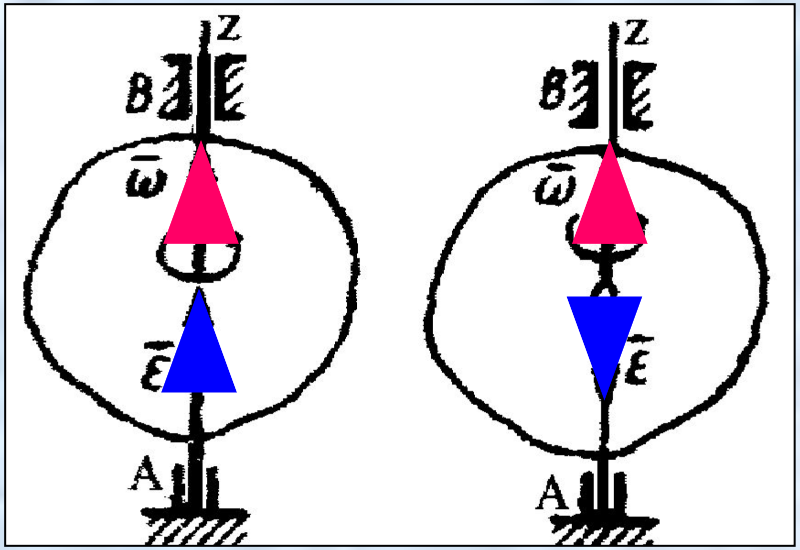
рад/с, 1/с, c^{-1}.

Угловое ускорение тела

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Единица измерения ε

рад/с^2*, 1/с*^{2} *,* c^{-2}.

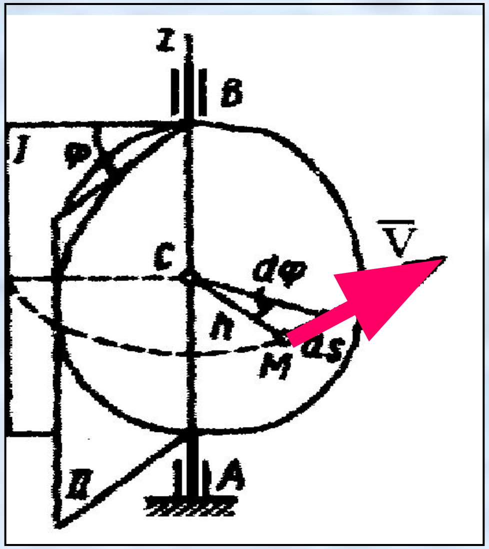


ВРАЩЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

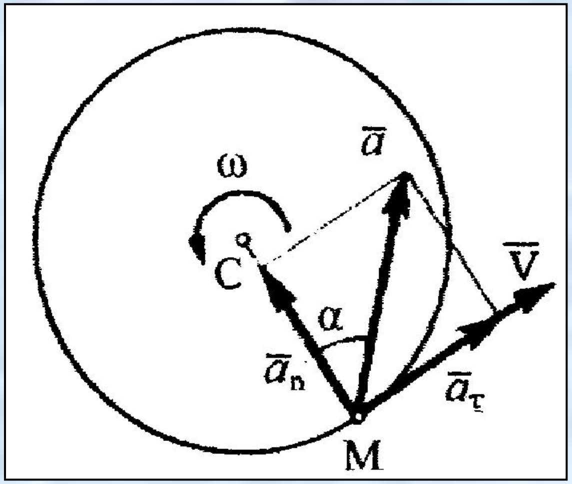
Скорости точек вращающегося тела

$$v = \frac{ds}{dt} = h\frac{d\varphi}{dt}$$

$\boxed{v = h\,\omega}$ -линейная или окружная скорость точки М.



Ускорение точки *М*



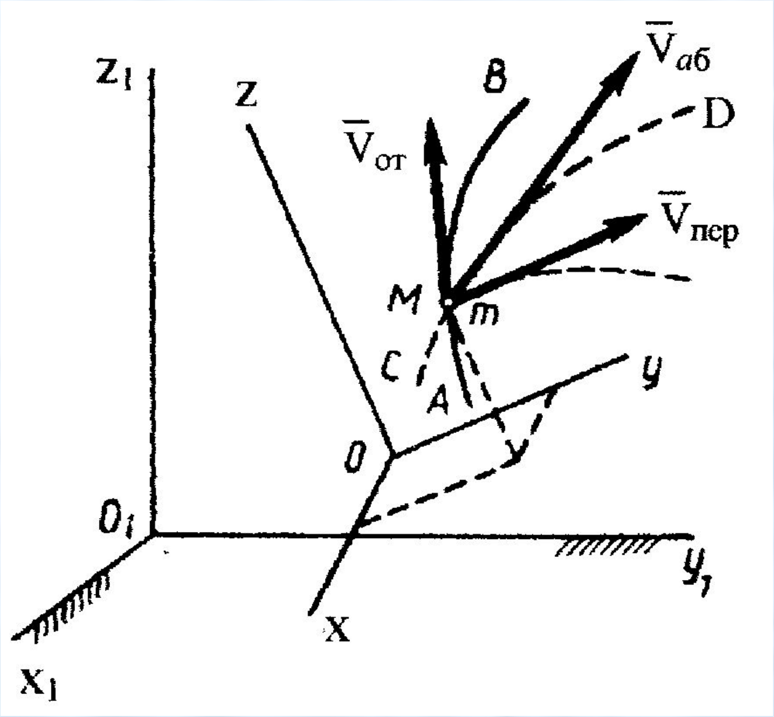
$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

$$a_\tau = h\,\varepsilon,\ \ a_n = h\,\omega^2.$$

$$a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

Основные определения

Сложное движение точки *– это такое движение, при котором точка одновременно участвует в нескольких движениях.*



Две системы отсчёта:

- подвижная система отсчета - *Oxyz*

- неподвижная система отсчета $O_1x_1y_1z_1$

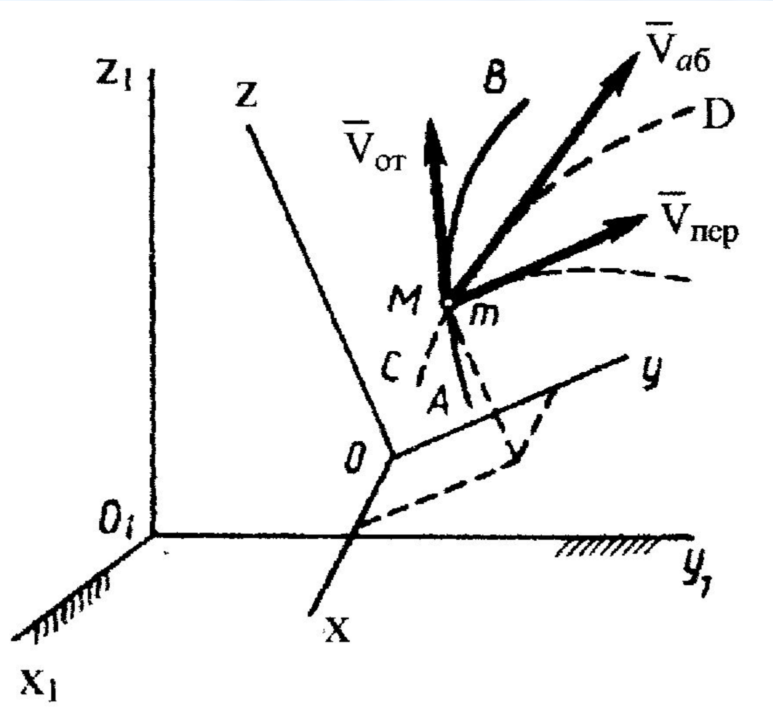
Основные определения

Относительное движение - *движение точки по отношению к подвижной системе отсчета*

$\bar{v}_{\text{от}}$ $\bar{a}_{\text{от}}$

Переносное движение - *движение, совершаемое подвижной системой отсчета по отношению к неподвижной системе*

$\bar{v}_{\text{пер}}$ $\bar{a}_{\text{пер}}$

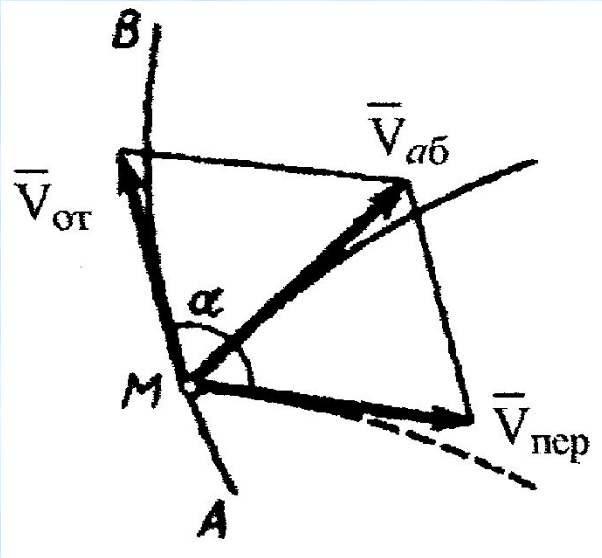


Абсолютное движение - *движение, совершаемое точкой по отношению к неподвижной системе отсчета*

Теорема о сложении скоростей

$$\boxed{\bar{v}_{\text{аб}} = \bar{v}_{\text{от}} + \bar{v}_{\text{пер}}}$$

$$v_{\text{аб}} = \sqrt{v_{\text{от}}^2 + v_{\text{пер}}^2 + 2 v_{\text{от}} v_{\text{пер}} \cos\alpha}$$



при сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей.

ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ УСКОРЕНИЙ (ТЕОРЕМА КОРИОЛИСА)

$$\bar{a}_{\text{аб}} = \frac{d\bar{v}_{\text{аб}}}{\text{dt}} = \frac{d\bar{v}_{\text{от}}}{\text{dt}} + \frac{d\bar{v}_{\text{пер}}}{\text{dt}}$$

$$\bar{a}_{\text{аб}} = \frac{(d\bar{v}_{\text{от}})_{\text{от}}}{dt} + \frac{(d\bar{v}_{\text{от}})_{\text{пер}}}{dt} + \frac{(d\bar{v}_{\text{пер}})_{\text{от}}}{dt} + \frac{(d\bar{v}_{\text{пер}})_{\text{пер}}}{dt}$$

$$\boxed{\bar{a}_{\text{аб}} = \bar{a}_{\text{от}} + \bar{a}_{\text{пер}} + \bar{a}_{\text{кор}}}$$

$$a_{\text{кор}} = \frac{(d\bar{v}_{\text{пер}})_{\text{от}}}{dt} + \frac{(d\bar{v}_{\text{пер}})_{\text{пер}}}{dt}$$

- кориолисово ускорение (ускорение Кориолиса)

УСКОРЕНИЕ КОРИОЛИСА

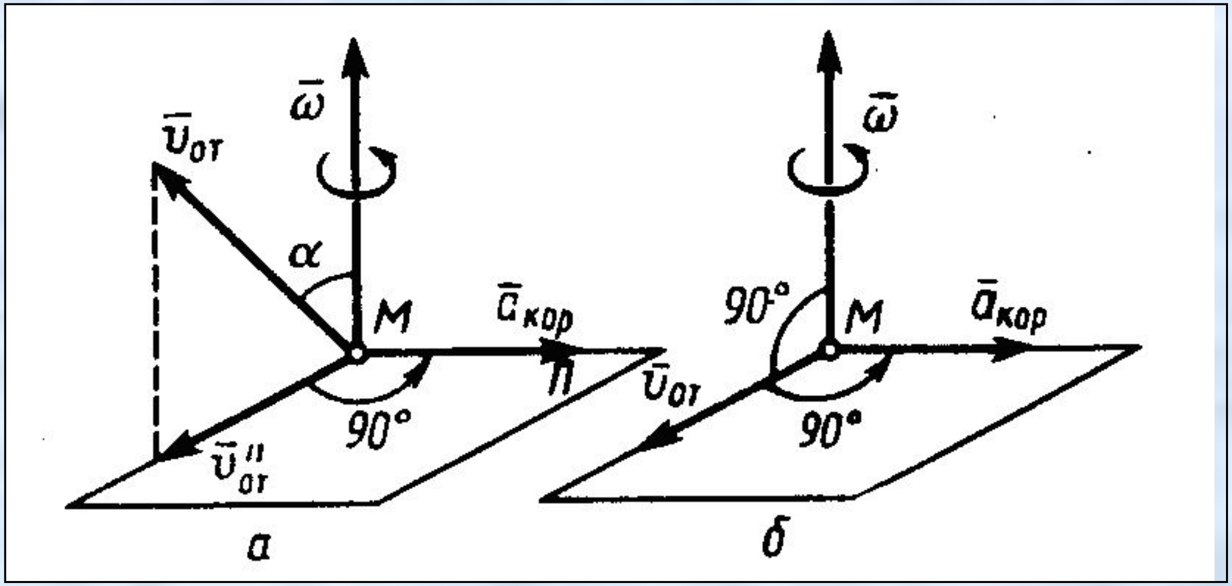
$$\bar{a}_{\text{кор}} = 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_{\text{от}})$$

$$a_{\text{кор}} = 2|\,\omega\,| \cdot |v_{\text{от}}\,| \sin\alpha$$

Направление вектора $\bar{a}_{\text{кор}}$ *можно найти двумя способами:*

- по правилу Жуковского;

- по правилу векторного произведения



УСКОРЕНИЕ КОРИОЛИСА

$$\boxed{\overline{a}_{\text{кор}} = 0}$$

$$\boxed{\overline{a}_{\text{кор}} = 2\left(\overline{\omega} \times \overline{v}_{\text{от}}\right)}$$

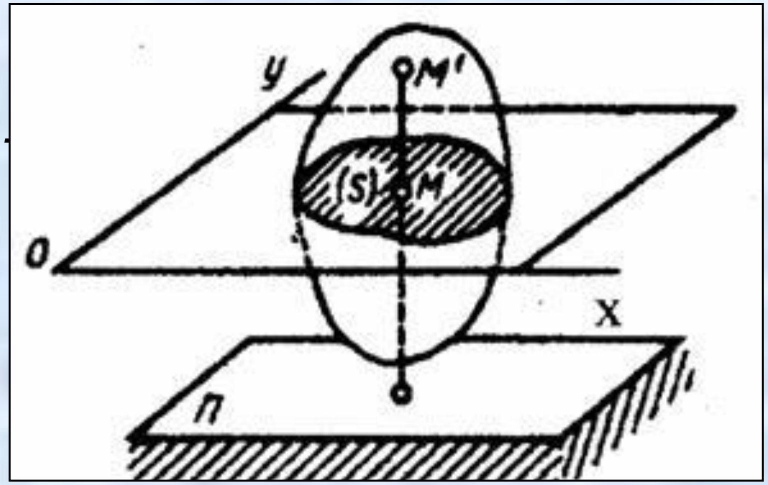
в следующих случаях:

- когда ω = 0, т. е. переносное движение является поступательным;

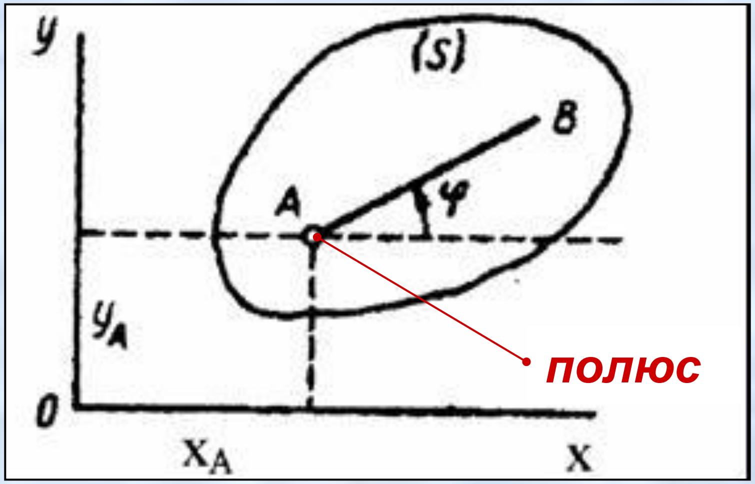
- когда относительная скорость в данный момент времени обращается в нуль;

- когда угол между векторами $\overline{\omega}$ *и* $\overline{v}_{\text{от}}$ *α = 0, или α = 180°, т.е. когда* $\overline{v}_{\text{от}}$ *параллелен оси переносного вращения*

Понятие о плоскопараллельном движении тела



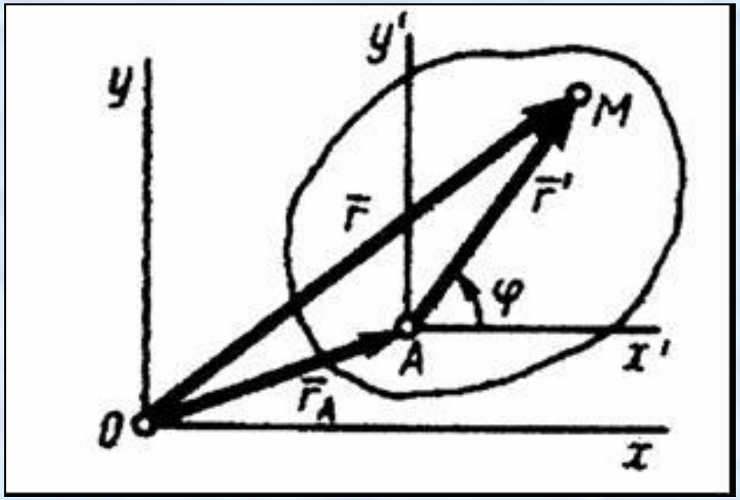
Плоскопараллельное (плоское) *движение – такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой фиксированной плоскости П*



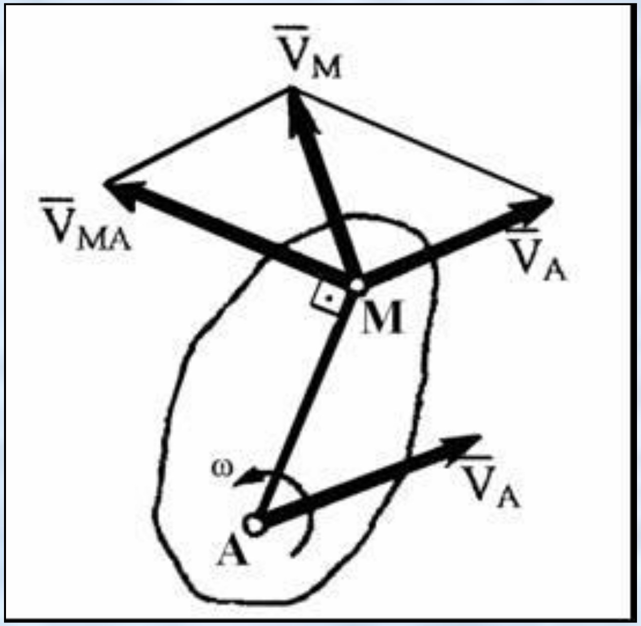
Закон движения плоской фигуры:

$$x_A = f_1(t);\quad y_A = f_2(t);\quad \varphi = f_3(t)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

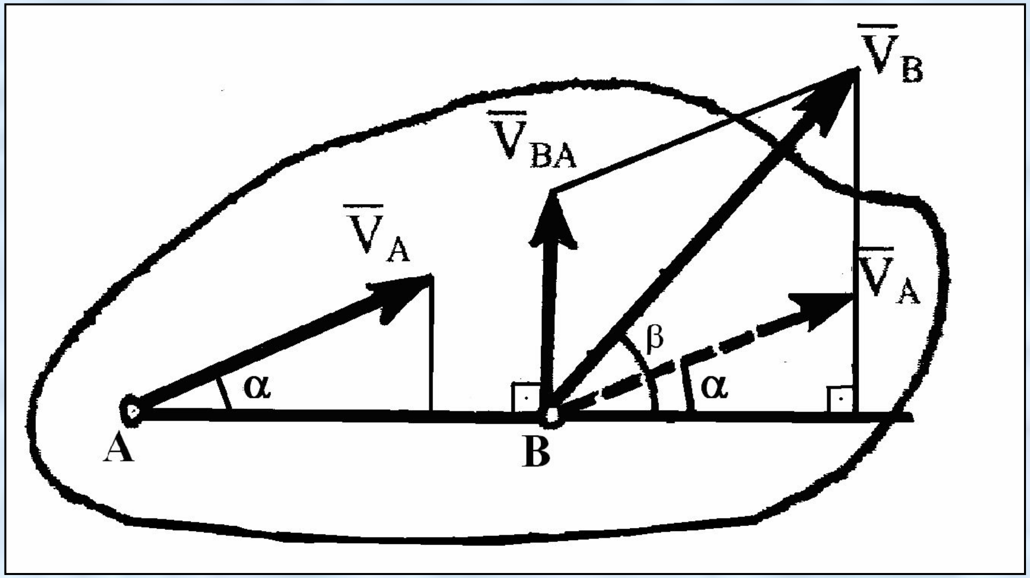


$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{MA}$$



$$\bar{v}_M = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{r}'}{dt},$$

ТЕОРЕМА О ПРОЕКЦИЯХ СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ



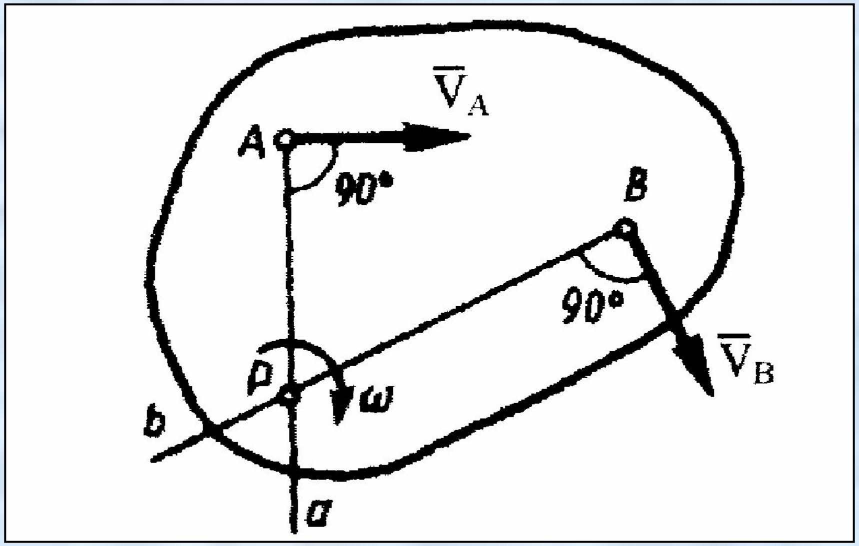
$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{v}_{BA}$$

$$v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha.$$

Проекции скоростей точек плоской фигуры на прямую, проходящую через эти точки, равны, между собой.

Понятие МЦС и способы его нахождения

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю



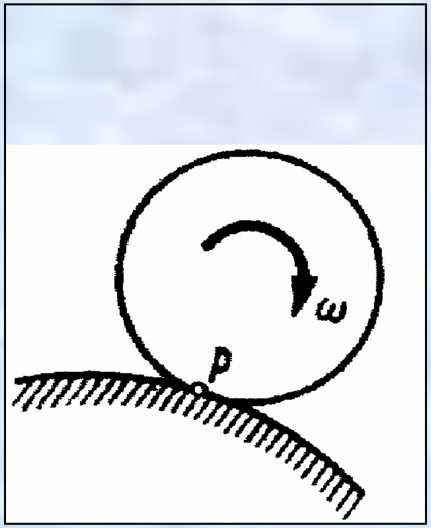
$$\bar{v}_A = \bar{v}_P + \bar{v}_{PA} = \bar{v}_{PA}$$

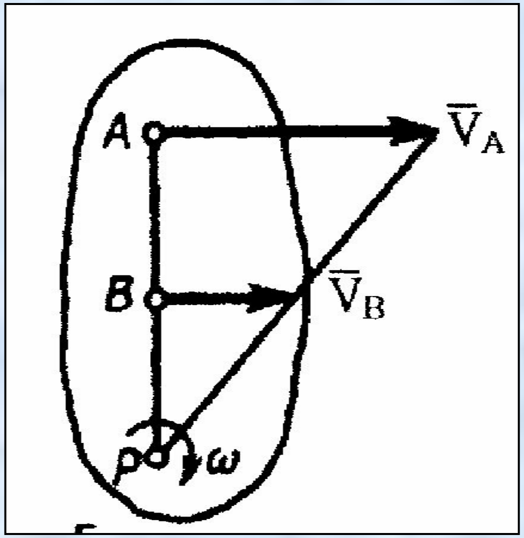
$$\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}$$

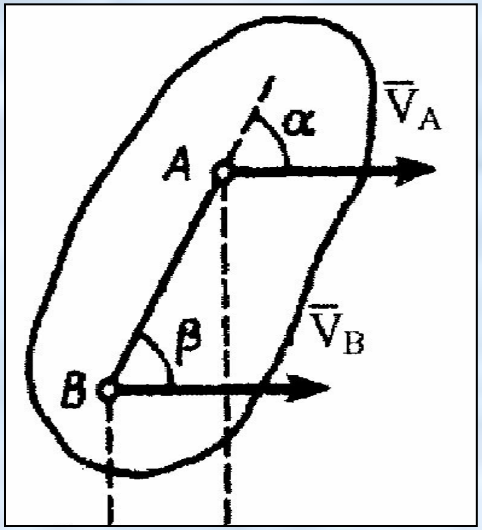
$$\omega = \frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}$$

Понятие МЦС и способы его нахождения

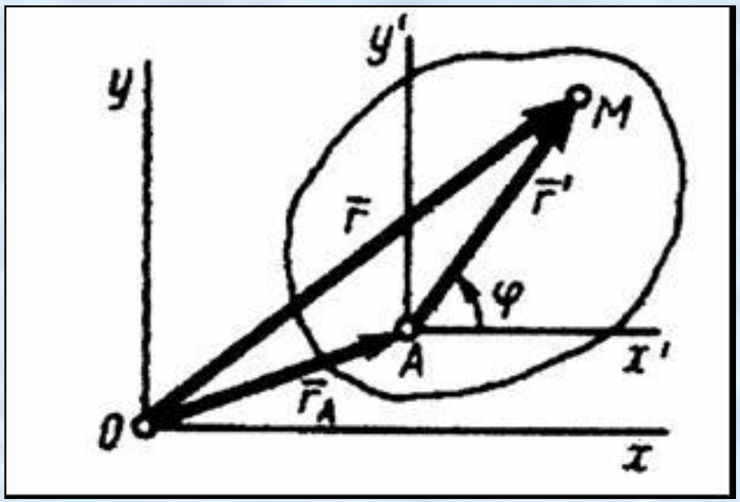
Частные случаи определения мгновенного центра скоростей







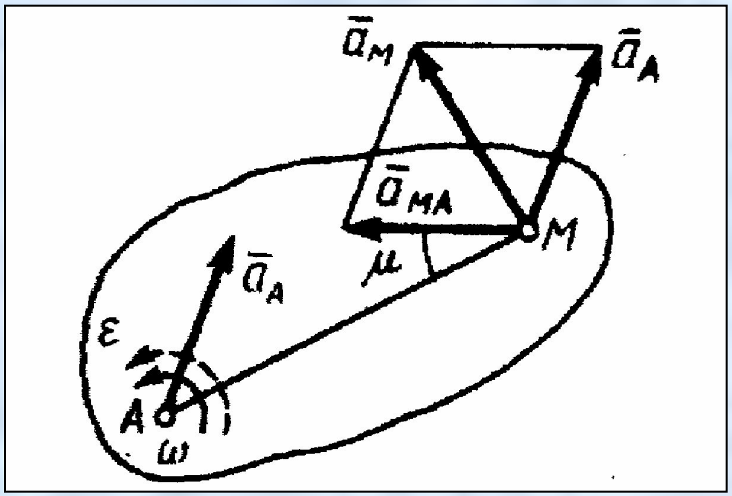
ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ



$$\bar{a}_M = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2\bar{r}_A}{dt^2} + \frac{d^2\bar{r}'}{dt^2}$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}^{\tau} + \bar{a}_{MA}^{n}$$



$$a_{MA}^{\tau} = MA \cdot \varepsilon$$

$$a_{MA}^{n} = \omega^2 MA$$

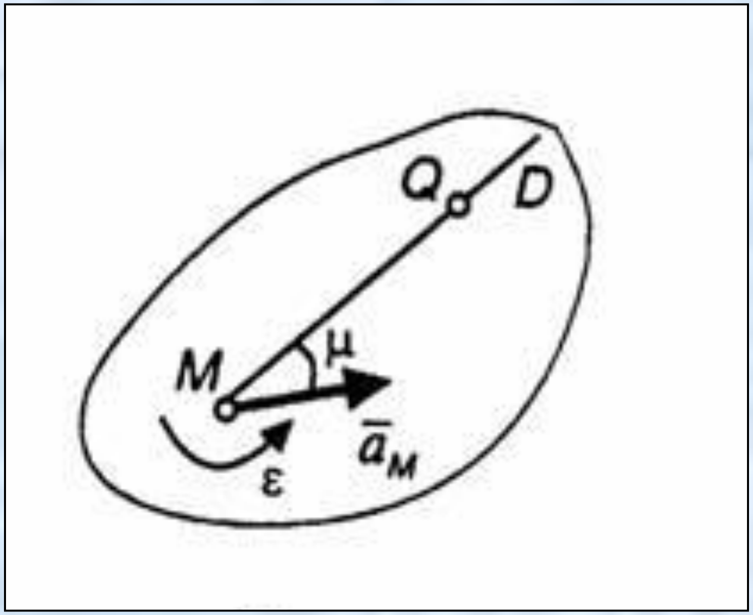
МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР УСКОРЕНИЙ

Точка, ускорение которой в данный момент времени равно нулю называется ***мгновенным центром ускорений*** **(МЦУ).**

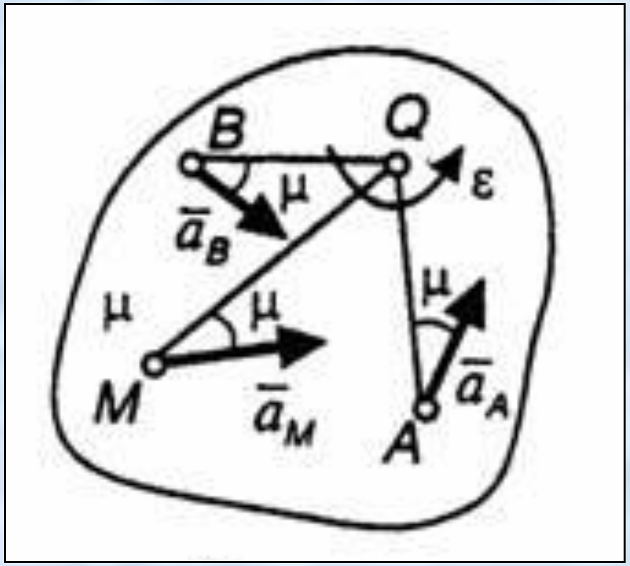
$$\bar{a}_M = \bar{a}_Q + \bar{a}_{MQ} = \bar{a}_{MQ}$$

$$a_M = MQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

$$\mathrm{tg}\mu = \varepsilon/\omega;$$



МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР УСКОРЕНИЙ



$$a_M = MQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

$$\mathrm{tg}\,\mu = \varepsilon/\omega;$$

Частные случаи :

- если $\varepsilon = 0$, $\omega \neq 0$, то угол $\mu = 0$ и ускорения всех точек будут направлены к МЦУ;

- если $\varepsilon \neq 0$, $\omega = 0$, то угол $\mu = 90^\circ$ и ускорения всех точек направлены перпендикулярно к отрезкам, соединяющим эти точки с МЦУ