

# МЕХАНИКА

## Теоретическая механика

Модуль 1

### Раздел 2 – КИНЕМАТИКА

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

ЛЕКЦИЯ 7

ЛЕКЦИЯ 8

КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО  
ТЕЛА

ЛЕКЦИЯ 9

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

ЛЕКЦИЯ 10

ЛЕКЦИЯ 11

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ  
ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

ЛЕКЦИЯ 12

ЛЕКЦИЯ 13

## КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

*Кинематикой* называется раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их инертности и действующих на них сил.

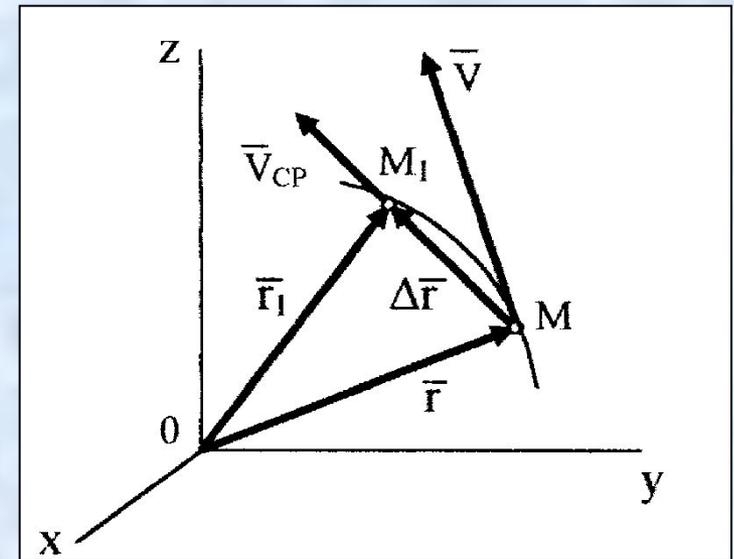
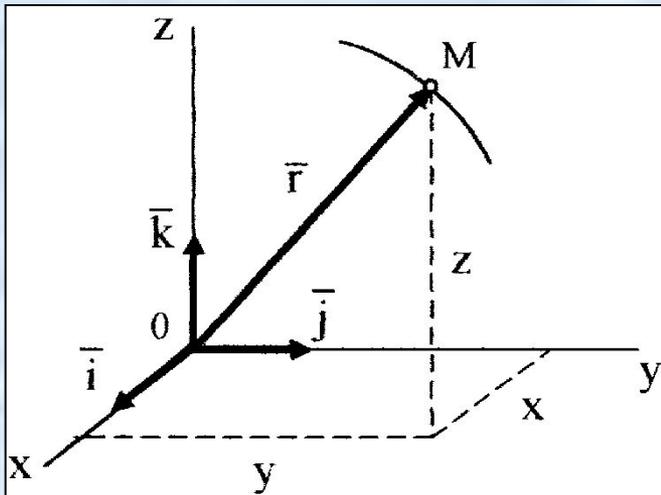
*Траекторией точки* называется непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка относительно данной системы отсчета.

Для задания движения точки можно применять способы:

- *векторный;*
- *координатный;*
- *естественный.*

## Векторный способ задания движения точки

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \quad \text{закон движения точки}$$



Скорость точки в момент времени  $t$

$$\bar{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Ускорение точки в момент времени  $t$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}.$$

## Координатный способ задания движения точки

$$f_1(t);$$

$$y =$$

$$f_2(t);$$

$$z =$$

$$f_3(t).$$

**закон движения точки**

**скорость точки**

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$\cos \alpha = v_x / v$$

$$v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$\cos \beta = v_y / v$$

$$\cos \gamma = v_z / v.$$

**ускорение точки**

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2},$$

$$\cos \alpha_1 = a_x / a,$$

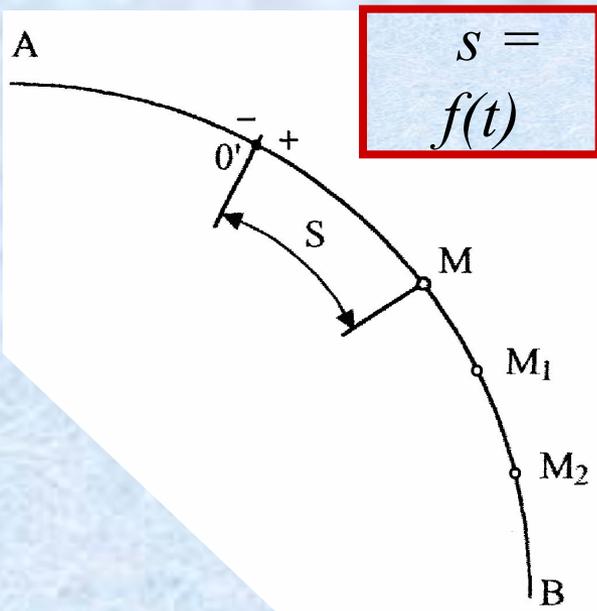
$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2},$$

$$\cos \beta_1 = a_y / a,$$

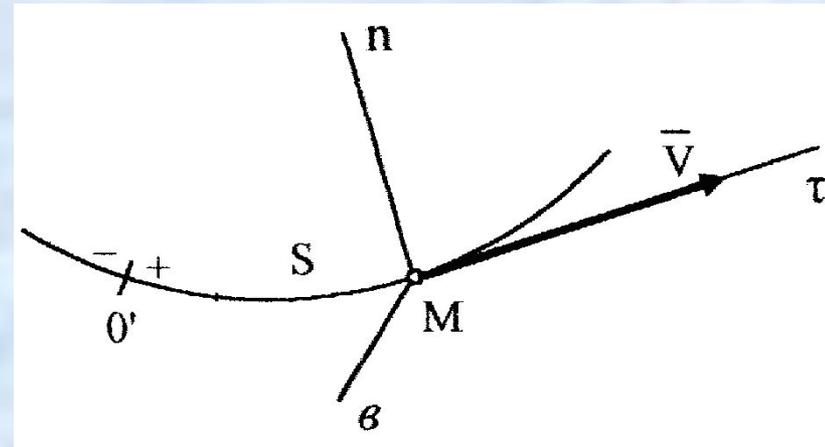
$$\cos \gamma_1 = a_z / a.$$

## Естественный способ задания движения точки

### Закон движения точки



### Оси естественного трехгранника



ось  $M\tau$  - касательная

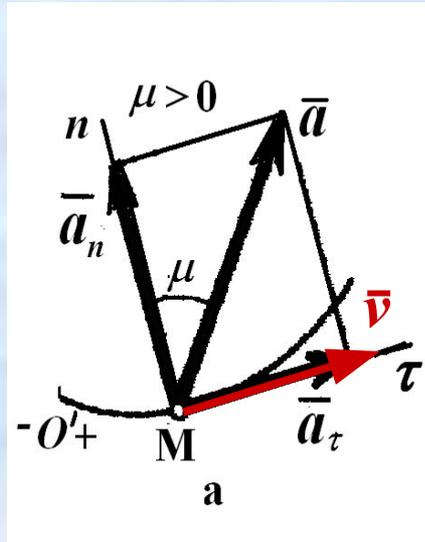
ось  $Mn$  - главная нормаль

ось  $Mb$  - бинормаль

## Естественный способ задания движения точки

### Скорость точки

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{или} \quad v = \frac{ds}{dt}$$



### Кривизна траектории

в точке M

$$k = 1/\rho,$$

для прямой линии  $\rho = \infty$ ;

для окружности  $\rho = R$ .

### Ускорение точки

$$a_\tau \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{a_\tau}{a_n}$$

## Естественный способ задания движения точки

### Частные случаи движения точки

#### Прямолинейное движение

$$\rho = \infty$$

Тогда

$$a_n = v^2 / \rho = 0$$

Полное ускорение :

$$a = a_\tau = dv/dt.$$

При равномерном движении

$$v = \text{const}, a_\tau = 0, \\ a = 0$$

#### Криволинейное движение

- равномерное движение

$$a_\tau = dv/dt = 0$$

$$a = a_n =$$

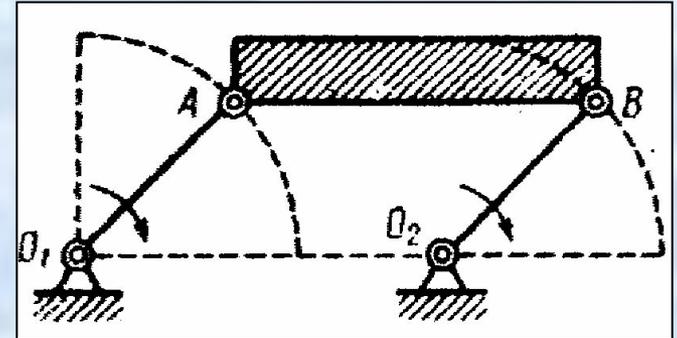
- равнопеременное движение

$$a_\tau = \text{const} \quad a_n = v^2/\rho.$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

## Поступательное движение тела

**Поступательным** называется движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь параллельной своему начальному направлению.



### Свойства поступательного движения:

1. Все точки тела описывают одинаковые траектории
2. Все точки тела имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения

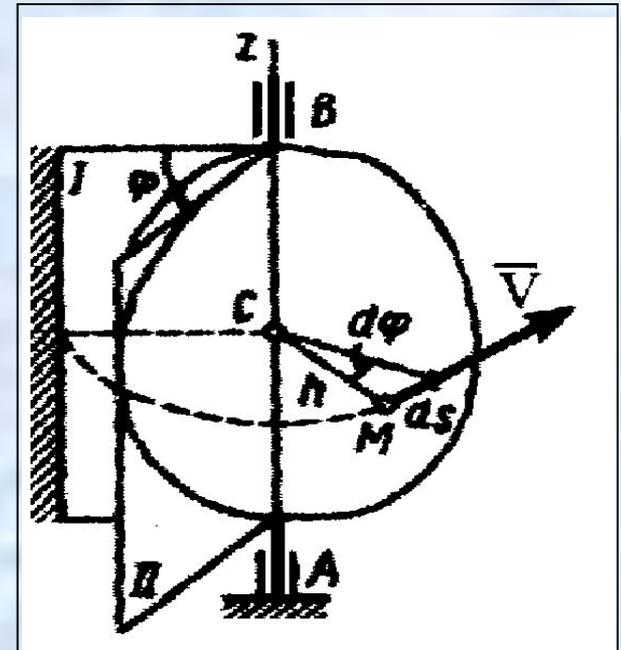
## ВРАЩЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

**Вращательным движением** *твердого тела* вокруг неподвижной оси называется движение, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу (или неизменно с ним связанные), остаются во все время движения неподвижными

Проходящая через неподвижные точки прямая - **ось вращения**.

$$\phi = f(t)$$

$\phi$  - угол поворота тела



**закон вращательного движения**  
твердого тела вокруг неподвижной оси.

# ВРАЩЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

## Угловая скорость тела

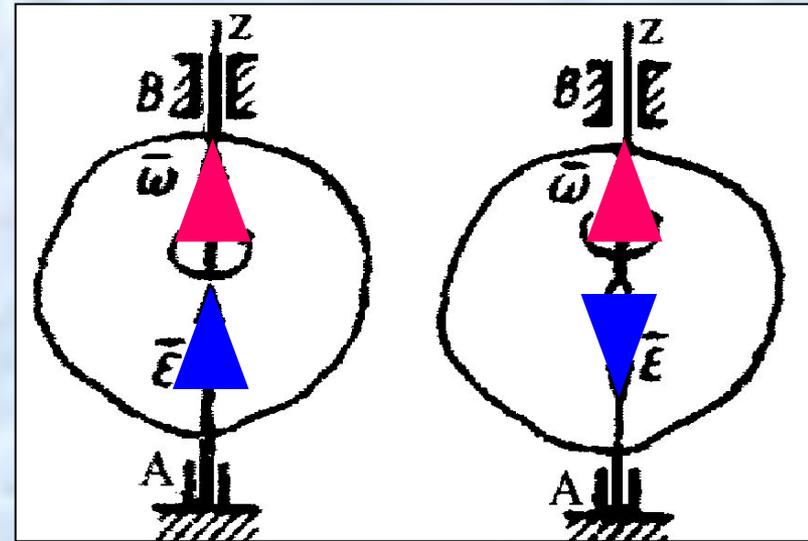
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

Единица измерения  $\omega$   
рад/с, 1/с, с<sup>-1</sup>.

## Угловое ускорение тела

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Единица измерения  $\varepsilon$   
рад/с<sup>2</sup>, 1/с<sup>2</sup>, с<sup>-2</sup>.

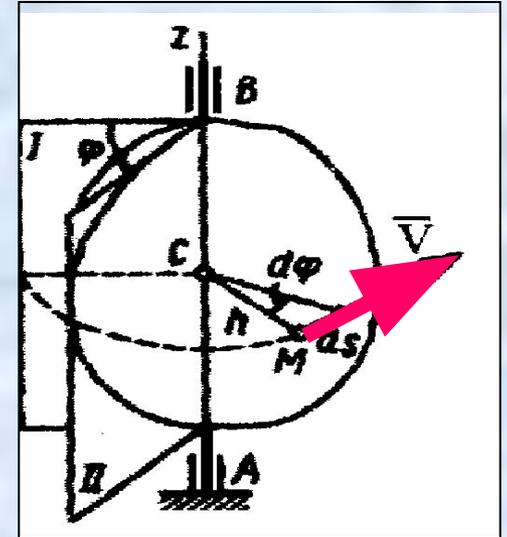


# ВРАЩЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

## Скорости точек вращающегося тела

$$v = \frac{ds}{dt} = h \frac{d\varphi}{dt}$$

$v = h \omega$  -линейная или окружная  
скорость точки  $M$ .

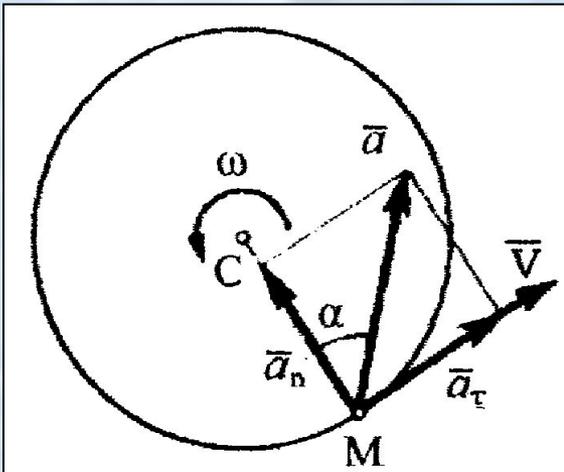


## Ускорение точки $M$

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2}$$

$$a_{\tau} = h \varepsilon, \quad a_n = h \omega^2.$$

$$a = h \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

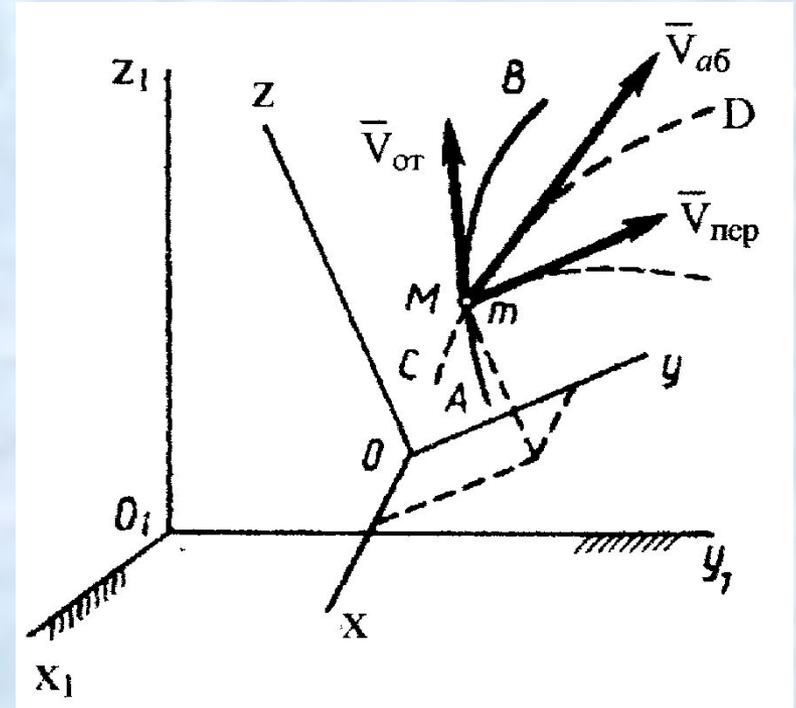


## Основные определения

**Сложное движение точки**  
– это такое движение, при котором точка одновременно участвует в нескольких движениях.

Две системы отсчёта:

- **подвижная система** отсчета -  $Oxyz$
- **неподвижная система** отсчета  $O_1x_1y_1z_1$



## Основные определения

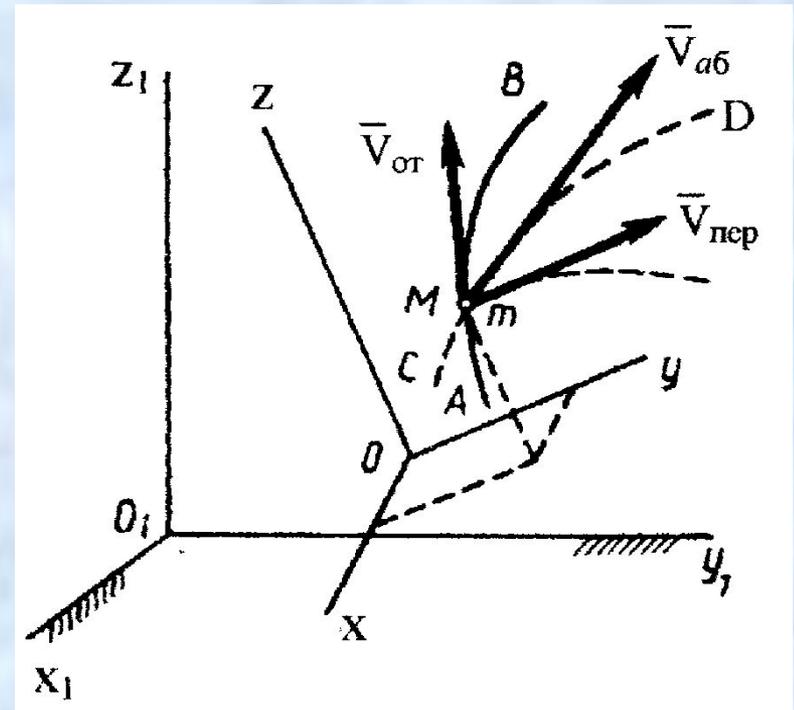
**Относительное движение** - движение точки по отношению к подвижной системе отсчета

$$\bar{v}_{от} \quad \bar{a}_{от}$$

**Переносное движение** - движение, совершаемое подвижной системой отсчета по отношению к неподвижной системе

$$\bar{v}_{пер} \quad \bar{a}_{пер}$$

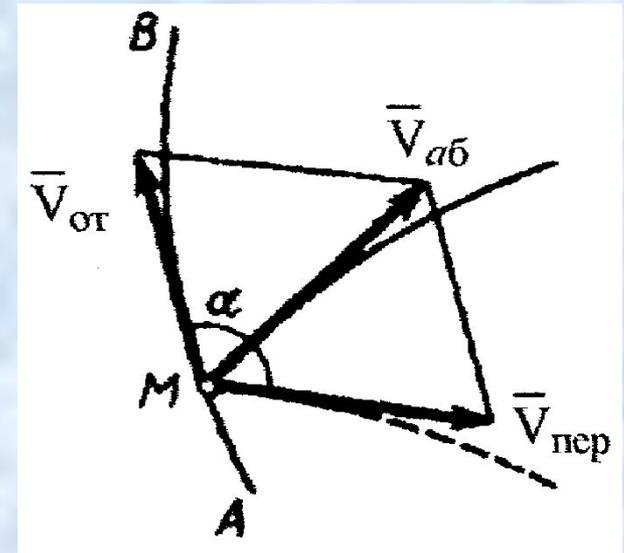
**Абсолютное движение** - движение, совершаемое точкой по отношению к неподвижной системе отсчета



## Теорема о сложении скоростей

$$\vec{v}_{a\bar{b}} = \vec{v}_{от} + \vec{v}_{пер}$$

$$v_{a\bar{b}} = \sqrt{v_{от}^2 + v_{пер}^2 + 2v_{от}v_{пер}\cos\alpha}$$



*при сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей.*

## ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ УСКОРЕНИЙ (ТЕОРЕМА КОРИОЛИСА)

$$\bar{a}_{a\bar{b}} = \frac{d\bar{v}_{a\bar{b}}}{dt} = \frac{d\bar{v}_{от}}{dt} + \frac{d\bar{v}_{пер}}{dt}$$

$$\bar{a}_{a\bar{b}} = \frac{(d\bar{v}_{от})_{от}}{dt} + \frac{(d\bar{v}_{от})_{пер}}{dt} + \frac{(d\bar{v}_{пер})_{от}}{dt} + \frac{(d\bar{v}_{пер})_{пер}}{dt}$$

$$\bar{a}_{a\bar{b}} = \bar{a}_{от} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор}$$

$$a_{кор} = \frac{(d\bar{v}_{пер})_{от}}{dt} + \frac{(d\bar{v}_{пер})_{пер}}{dt} \quad \text{- кориолисово ускорение}$$

(ускорение Кориолиса)

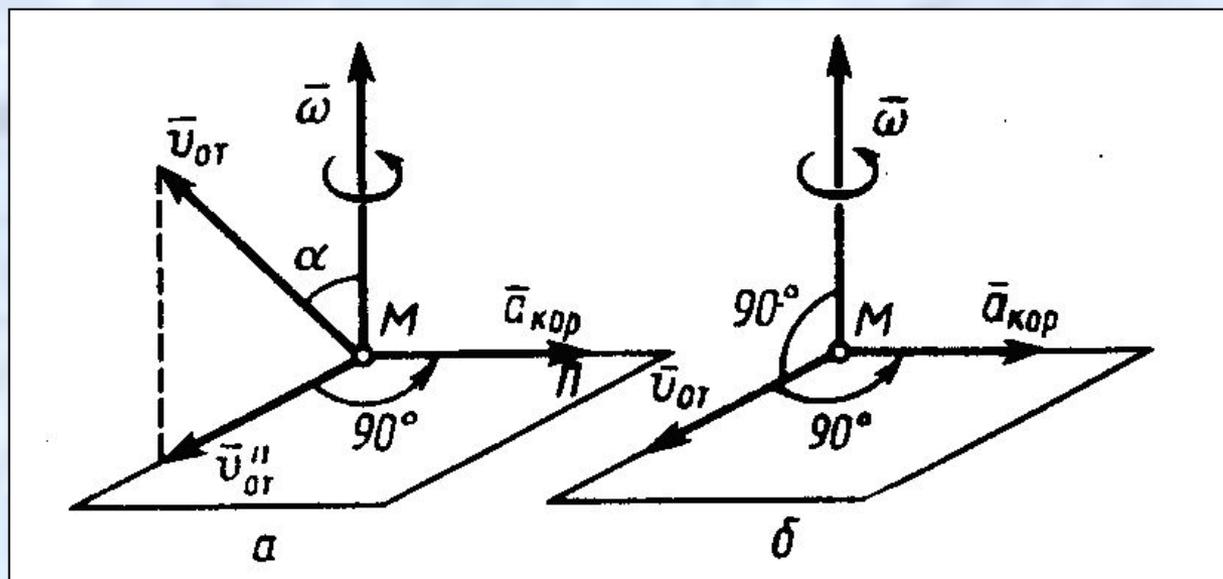
## УСКОРЕНИЕ КОРИОЛИСА

$$\bar{a}_{\text{кор}} = 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_{\text{от}})$$

$$a_{\text{кор}} = 2|\omega| \cdot |v_{\text{от}}| \sin\alpha$$

Направление вектора  $\bar{a}_{\text{кор}}$   
можно найти двумя способами:

- по **правилу Жуковского**;
- по **правилу векторного произведения**



## УСКОРЕНИЕ КОРИОЛИСА

$$\bar{a}_{\text{кор}} = 0$$

$$\bar{a}_{\text{кор}} = 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_{\text{от}})$$

*в следующих случаях:*

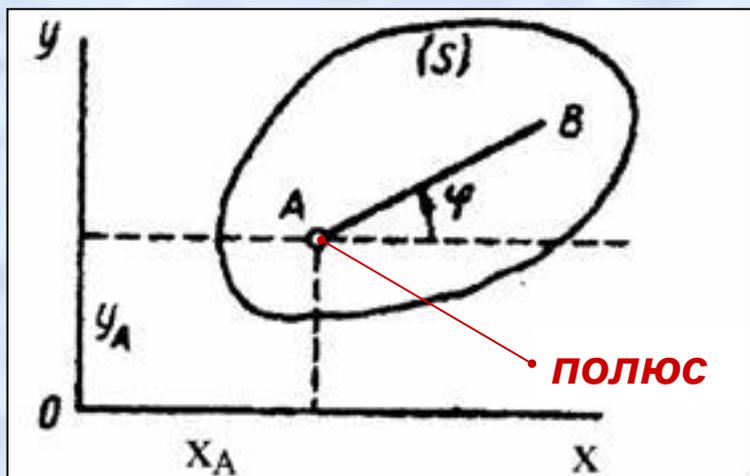
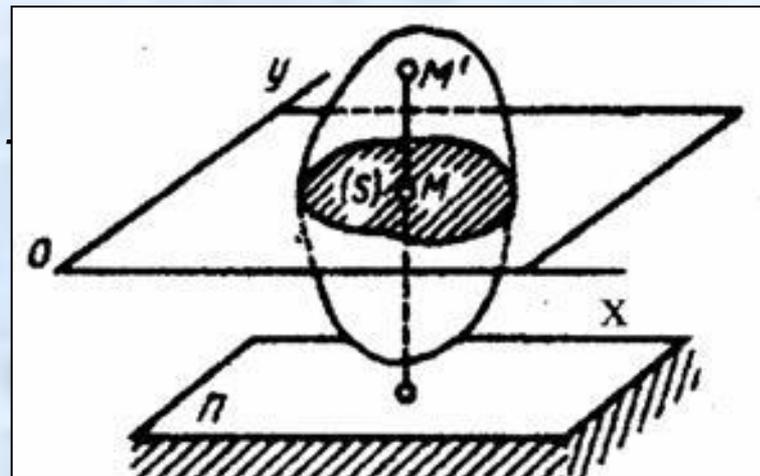
*- когда  $\omega = 0$ , т. е. переносное движение является поступательным;*

*- когда относительная скорость в данный момент времени обращается в нуль;*

*- когда угол между векторами  $\bar{\omega}$  и  $\bar{v}_{\text{от}}$   $\alpha = 0$ , или  $\alpha = 180^\circ$ , т.е. когда  $\bar{v}_{\text{от}}$  параллелен оси переносного вращения*

## Понятие о плоскопараллельном движении тела

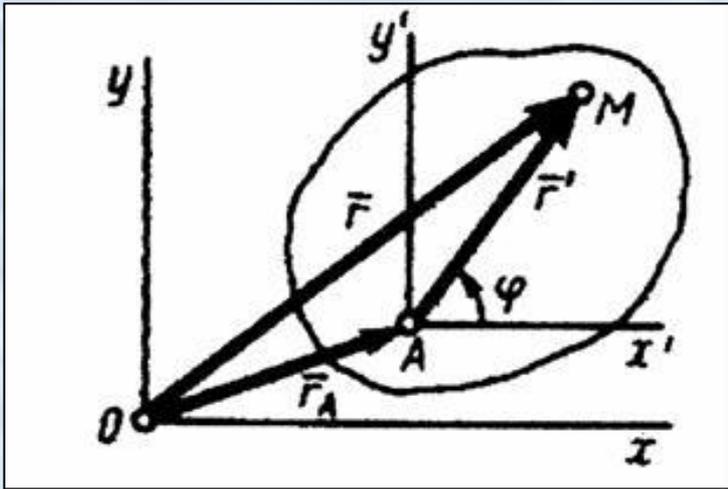
**Плоскопараллельное (плоское)** движение такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой фиксированной плоскости  $\Pi$



Закон движения плоской фигуры:

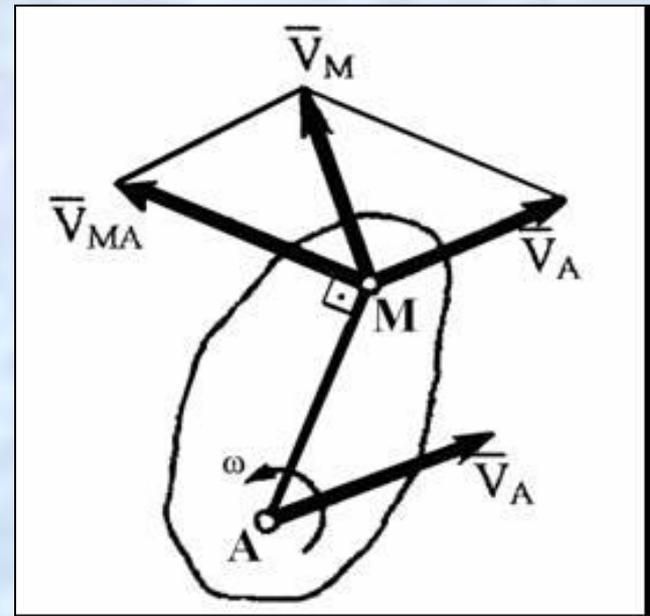
$$\begin{aligned}
 &x_A = \\
 &f_1(t); \\
 &y_A = \\
 &f_2(t); \\
 &\phi = f_3(t)
 \end{aligned}$$

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

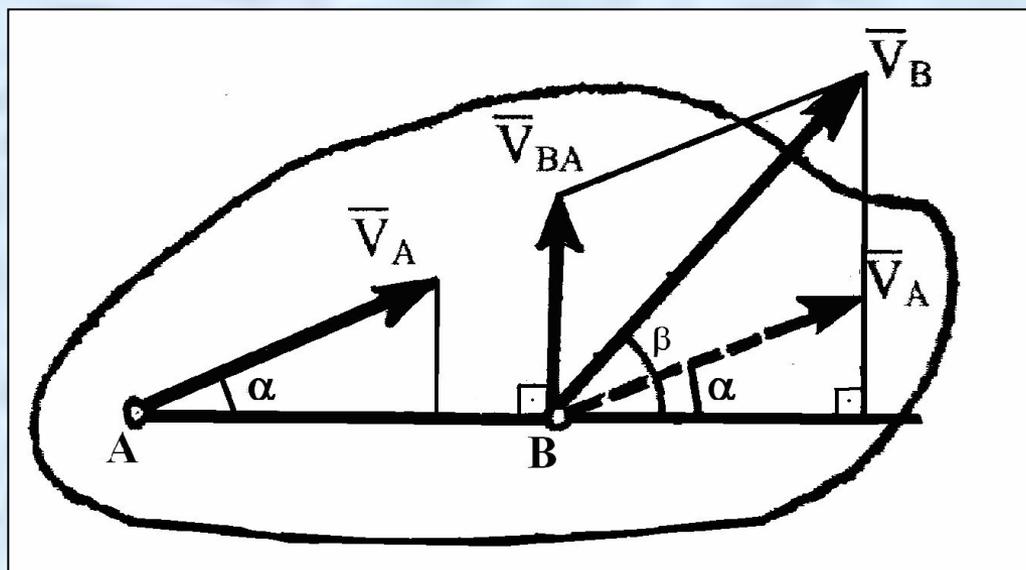


$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{MA}$$

$$\bar{v}_M = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{r}'}{dt},$$



## ТЕОРЕМА О ПРОЕКЦИЯХ СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ



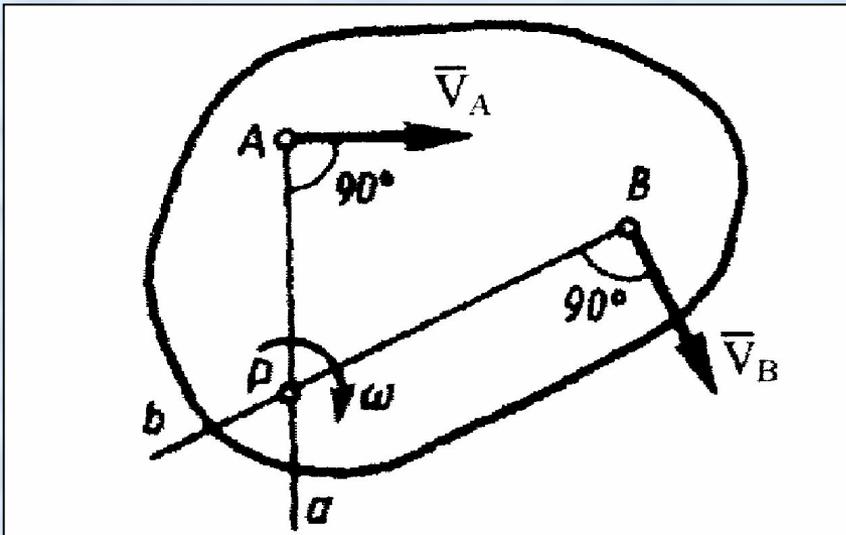
$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$$

$$v_B \cos \beta = v_A \cos \alpha.$$

*Проекции скоростей точек плоской фигуры на прямую, проходящую через эти точки, равны, между собой.*

## Понятие МЦС и способы его нахождения

*Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю*



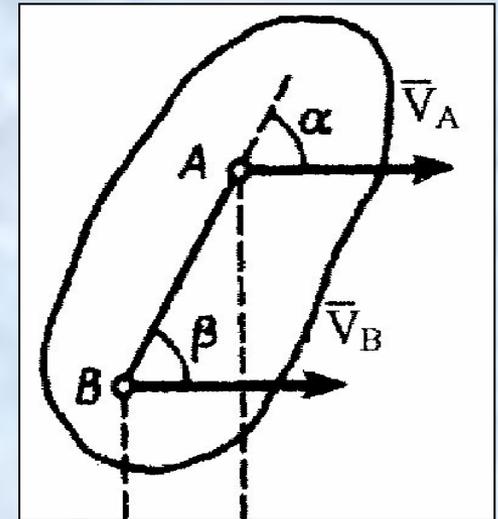
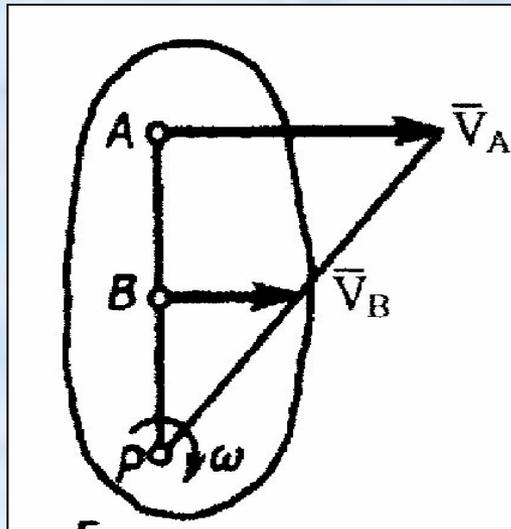
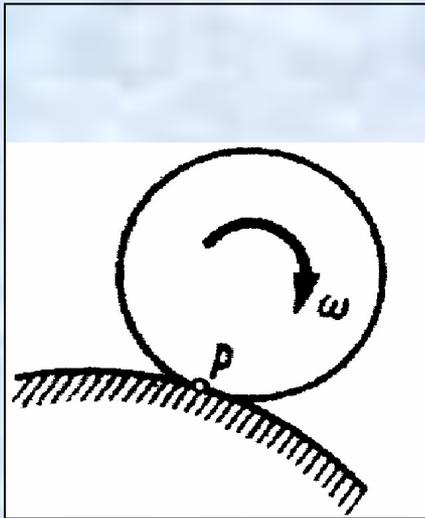
$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PA}$$

$$\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}$$

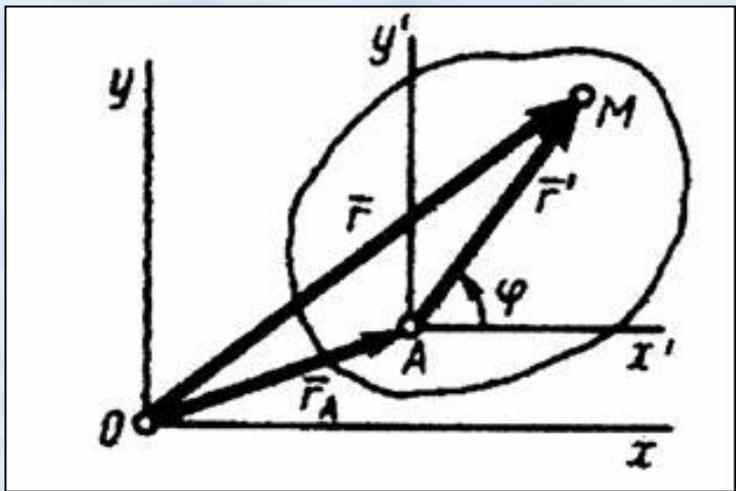
$$\omega = \frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}$$

● ● ●  
Понятие МЦС и способы  
его нахождения

Частные случаи определения мгновенного центра скоростей



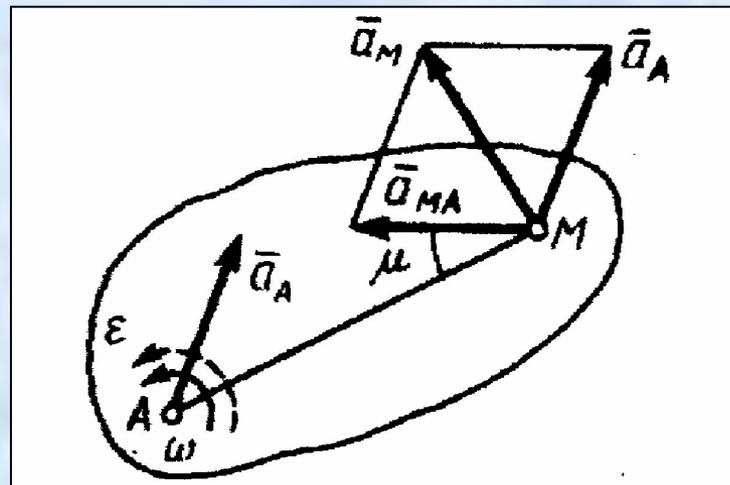
# ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ



$$\bar{a}_M = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \bar{r}_A}{dt^2} + \frac{d^2 \bar{r}'}{dt^2}$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}^{\tau} + \bar{a}_{MA}^n$$



$$a_{MA}^{\tau} = MA \cdot \varepsilon$$

$$a_{MA}^n = \omega^2 MA$$

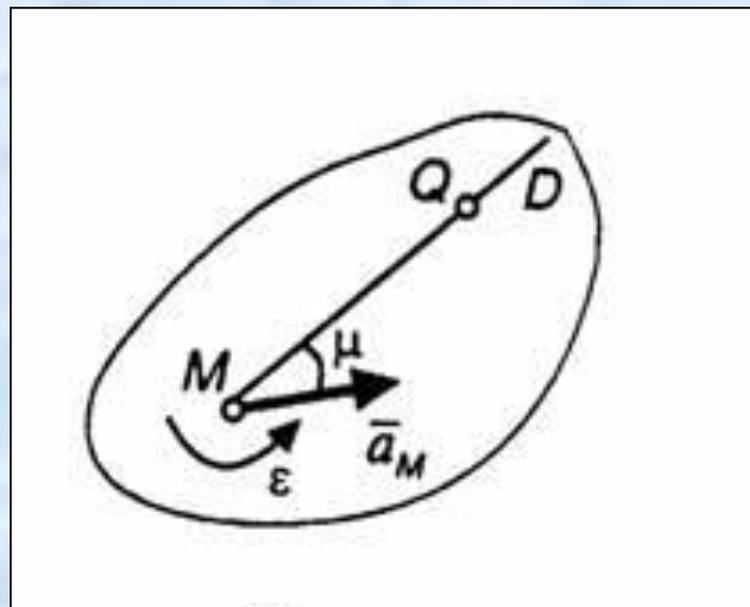
## МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР УСКОРЕНИЙ

Точка, ускорение которой в данный момент времени равно нулю называется **мгновенным центром ускорений (МЦУ)**.

$$\bar{a}_M = \bar{a}_Q + \bar{a}_{MQ} = \bar{a}_{MQ}$$

$$a_M = MQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

$$\operatorname{tg}\mu = \varepsilon/\omega;$$



## МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР УСКОРЕНИЙ

$$a_M = MQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

$$\operatorname{tg} \mu = \varepsilon/\omega;$$

*Частные случаи :*

- если  $\varepsilon = 0$ ,  $\omega \neq 0$ , то угол  $\mu = 0$  и ускорения всех точек будут направлены к МЦУ;
- если  $\varepsilon \neq 0$ ,  $\omega = 0$ , то угол  $\mu = 90^\circ$  и ускорения всех точек направлены перпендикулярно к отрезкам, соединяющим эти точки с МЦУ

