

Основные вопросы лекции

1. Понятие композиции отношений
2. Виды отношений
3. Способы задания отношений
4. Операции над отношениями


Пусть - $R \subseteq A \times B$ отношение на $A \times B$
, а - $S \subseteq B \times C$ отношение на $B \times C$

Композицией отношений S и R

называется **отношение** , определенное
следующим образом:

$$T = \{(a, c) : \text{существует такой элемент } b \text{ из } B, \text{ что } (a, b) \in R \text{ и } (b, c) \in S\}.$$

- Это множество обозначается

$$T = S \boxtimes R$$


Пример:

Даны, множества

$$A = \{1,2,3\}, B = \{x,y\}, C = \{\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit\}.$$

Отношения R на $A \times B$

и S на $B \times C$ заданы в виде:

$$R = \{(1,x), (1,y), (3,x)\};$$

$$S = \{(x, \spadesuit), (x, \heartsuit), (y, \clubsuit), (y, \diamondsuit)\}.$$

$$(1, x) \in R \text{ и } (x, \spadesuit) \in S \rightarrow (1, \spadesuit) \in S \circ R$$



$$(1, x) \in R \text{ и } (x, \heartsuit) \in S \rightarrow (1, \heartsuit) \in S \circ R$$



$$(1, y) \in R \text{ и } (y, \clubsuit) \in S \rightarrow (y, \clubsuit) \in S \circ R$$



$$(1, y) \in R \text{ и } (y, \spadesuit) \in S \rightarrow (1, \spadesuit) \in S \circ R$$



$$(3, x) \in R \text{ и } (x, \spadesuit) \in S \rightarrow (3, \spadesuit) \in S \circ R$$



$$(3, x) \in R \text{ и } (x, \heartsuit) \in S \rightarrow (3, \heartsuit) \in S \circ R$$



- Тогда

$$\overset{\leftarrow}{S} \circ R = \{(1, \spadesuit), (1, \heartsuit), (y, \clubsuit), (1, \spadesuit), (3, \diamondsuit), (3, \heartsuit)\}.$$

Теорема.

Композиция отношений ассоциативна;

т.е. если A , B , и C – множества и если

$$R \subseteq A \times B \quad S \subseteq B \times C \quad T \subseteq C \times D$$

тогда

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$$

Виды отношений

В зависимости от того, какими
свойствами обладает отношения, они
делятся на три вида;
отношение эквивалентности,
отношение порядка,
отношение доминирования.

Бинарное отношение R на множестве A^2 называется *отношением эквивалентности*, если оно обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Эквивалентные элементы

(т.е. находящиеся в отношении эквивалентности), как правило, обладают какими-то общими признаками.

Пример

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), \\ (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (3, 5), (5, 3), (4, 1), \\ (4, 2)\}.$$

Бинарное отношение R на A

рефлексивно, симметрично,

транзитивно, следовательно, R есть

отношение эквивалентности на
множестве A .

Если на множестве задано отношение эквивалентности, то все его элементы можно разбить на непересекающиеся подмножества, состоящие из эквивалентных друг другу элементов (*классы эквивалентности*).

Разбиением множества A называется совокупность попарно непересекающихся непустых подмножеств A_1, A_2, \dots, A_n из множества A таких, что каждый элемент множества A принадлежит одному и только одному из этих подмножеств.

Пусть $a \in A$, и R отношение эквивалентности на $A \times A$. Пусть $[a]$ обозначает

множество

$$\{x: xRa\} = \{x: (x, a) \in R\}$$

называемое ***классом эквивалентности***, содержащим a .

Символ $[A]_R$ обозначает множество всех классов эквивалентности множества A по отношению R .

Пример

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), \\ (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (3, 5), (5, 3), (4, 1), \\ (4, 2)\}.$$

Класс эквивалентности по отношению к R
получаются путем определения класса
эквивалентности **каждого элемента**
множества A .

$$[1] = \{x : (x,1) \in R\} = \{x : xR1\} = \{1,2,4\}$$

$1 \in [1]$, поскольку $(1,1) \in R$,

$2 \in [1]$, поскольку $(2,1) \in R$,

$4 \in [1]$, поскольку $(4,1) \in R$.

Больше не существует иного x из A такого, что $(x,1) \in R$.

$$[2] = \{x : (x, 2) \in R\} = \{x : xR2\} = \{2, 1, 4\}$$

$2 \in [2]$, поскольку $(2, 2) \in R$,

$1 \in [2]$, поскольку $(1, 2) \in R$,

$4 \in [2]$, поскольку $(4, 2) \in R$.

Больше не существует иного x из A такого, что $(x, 2) \in R$.

$$[3] = \{x : (x, 3) \in R\} = \{x : xR3\} = \{3, 5\}$$

$3 \in [3]$, поскольку $(3, 3) \in R$,

$5 \in [3]$, поскольку $(5, 3) \in R$.

Больше не существует иного x из A такого, что $(x, 3) \in R$.

$$[4] = \{x : (x,4) \in R\} = \{x : xR4\} = \{4,1,2\}$$

$4 \in [4]$, поскольку $(4,4) \in R$,

$1 \in [4]$, поскольку $(1,4) \in R$,

$2 \in [4]$, поскольку $(2,4) \in R$.

Больше не существует иного x из A такого, что $(x,4) \in R$.

$$[5] = \{x : (x, 5) \in R\} = \{x : xR5\} = \{5, 3\}$$

$5 \in [5]$, поскольку $(5, 5) \in R$,

$3 \in [5]$, поскольку $(3, 5) \in R$,

Больше не существует иного x из A такого, что $(x, 5) \in R$.

$$[6] = \{x : (x, 6) \in R\} = \{x : xR6\} = \{6\}$$

$6 \in [6]$, поскольку $(6, 6) \in R$,

Больше не существует иного x из A такого, что $(x, 6) \in R$.

Имеется только три различных класса эквивалентности

$$[1] = [2] = [4] = \{1, 2, 4\},$$

$$[3] = [5] = \{3, 5\},$$

$$[6] = \{6\}.$$

$$[A]_{\mathcal{R}} = \{[1], [3], [6]\} = \{\{1, 2, 4\}, \{3, 5\}, \{6\}\}.$$

Выводы

Любой элемент класса эквивалентности порождает класс эквивалентности: если

$$b \in [a], \text{ то } [a] = [b]$$

На основании этого свойства следует, что любой элемент класса эквивалентности представляет собой класс.

Каждый класс эквивалентности
содержит по крайней мере, один элемент,
в силу рефлексивности отношения.

Множество всех элементов,
эквивалентных a , должно содержать a .

Никакой элемент не может
принадлежать двум разным классам
эквивалентности.

Отношение эквивалентности разбивает множество A на попарно непересекающиеся классы эквивалентных элементов, таким образом, что каждый элемент A принадлежит **точно одному** классу эквивалентности.

1. Всякое разбиение множества A на классы задает на множестве A отношение эквивалентности.
2. Всякое отношение эквивалентности R , определенное на множестве A , задает разбиение множества A на классы.
3. Между разбиениями множества на классы и отношениями эквивалентности, заданными на этом множестве, существует взаимно однозначное соответствие.

Отношение порядка

Отношение R на множестве A^2 называется *отношением частичного порядка*, если оно обладает свойствами рефлексивности, антисимметричности, транзитивности.

Обычно отношения частичного порядка обозначают знаком \leq .

Множество A вместе с заданным на нем отношением частичного порядка R называется частично упорядоченным множеством (ЧУ-множеством с порядком R).

Если для двух элементов x и y выполняется $x \leq y$, то говорят, что x «предшествует» y .

У произвольно взятого элемента y может быть много предшествующих элементов.

Однако, если x предшествует y , и не существует таких элементов z , для которых xRz и zRy , то x – непосредственный предшественник y , обозначение $x \prec y$.

Элементы a и b частично упорядоченного множества (A, \leq) называется **сравнимыми**, если $a \leq b$ или $b \leq a$, в противном случае – несравнимыми.

Частичный порядок называется **линейным** (полным), если любые два элемента сравнимы.

Другими словами ***линейным порядком*** на множестве A называется отношение частичного порядка, при котором из любой пары элементов можно выделить предшествующий и последующий.

Пример линейного порядка: « \leq » на
множестве вещественных чисел,
лексикографическое упорядочение слов в
словаре.

Если каждые два элемента частично упорядоченные множества (A, \leq) сравнимы, то (A, \leq) называется **вполне упорядоченным множеством** или **цепью**.

Простым примером отношения порядка является отношение, задаваемое обычным неравенством \leq на множестве вещественных чисел \mathbb{R} .

Рассмотрим на множестве A всех сотрудников некоторого предприятия.

Отношение, задается следующим образом: сотрудник x предшествует сотруднику y тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий: $x=y$; x является начальником (не обязательно непосредственным) y .

Назовем такое отношение «быть начальником».

Отношение «быть начальником» является отношением порядка.

Поскольку существуют такие пары сотрудников x и y , для которых не выполняется ни $x \leq y$, ни $y \leq x$ (например, если x и y являются сослуживцами).

Такие отношения, в которых есть несравнимые между собой элементы, называют *отношениями частичного порядка*.

Вершины графа изображают элементы ЧУ-множества A , и если $x \prec u$, то вершина x помещается ниже вершины u и соединяется с ней ребром.

Диаграмма Хассе позволяет получить полную информацию об исходном частичном порядке.

Пример:

Дано отношение «...делитель...»
определяет частичный порядок на
множестве $A = \{1, 2, 3, 6, 12, 18\}$.

Составить таблицу предшественников и
непосредственных предшественников.

Построить соответствующую диаграмму
Хассе.

элемент	Предшественник	Непосредственный предшественник
1	нет	нет
2	1	1
3	1	1
6	1,2,3	2,3
12	1,2,3,6	6
18	1,2,3,6	6

Диаграмма Хассе

