Цель: Рассмотреть понятия размещения и сочетания.

*

Размещения

Определение.

Размещениями из n элементов по m называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их следования.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример 1

Сколько существует трехзначных чисел, в которых цифры различные и нечетные?

Нечетных цифр пять: 1, 3, 5, 7, 9. Их надо разместить на три позиции. Поэтому количество искомых чисел равно числу размещений

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60.$$

Пример 2

Сколько трехзначных чисел с различными цифрами можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5?

Из шести данных цифр можно составить A_6^3 чисел, но среди них будут и трехзначные числа, начинающиеся с нуля (чего, естественно, быть не может). Посчитаем количество таких чисел. В них на первом месте стоит нуль. Значит, на оставшиеся две позиции размещают оставшиеся пять цифр. Поэтому таких чисел будет A_5^2. Следовательно, искомых чисел можно получить: $A_6^3 - A_5^2 = \frac{6!}{(6-3)!} - \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{6!}{3!} - \frac{5!}{3!} =$

$= 4 \cdot 5 \cdot 6 - 4 \cdot 5 = 120 - 20 = 100.$

Пример 3

При расследовании хищения установлено, что у преступника семизначный телефонный номер, в котором ни одна цифра не повторяется и нет нуля. Следователь, полагая, что перебор этих номеров потребует одного-двухчасов, доложил о раскрытии преступления. Прав ли он?

Число номеров равно числу размещений из 9 элементов по 7, т.е. равно A_9^7

$$A_9^7 = \frac{9!}{(9-7)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}{1\cdot2} = 3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9 = 181440$$

Даже если на проверку одного номера тратить 1 минуту, то на все уйдет 3024 часа или 126 суток. Таким образом, следователь – не прав.

Пример 4

Вычислить:

$$\frac{A_{20}^{7}+A_{20}^{6}}{A_{20}^{5}}=\frac{\frac{20!}{13!}+\frac{20!}{14!}}{\frac{20!}{15!}}=\frac{15!}{13!}+\frac{15!}{14!}=$$

$$=14\cdot 15+14=15(14+1)=225$$

Ответ: 225

Сочетания

Определение.

Сочетаниями из n элементов по m называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Пример 5

Сколькими способами можно составить расписание на вторник, если изучаются 10 предметов и должно быть 6 уроков (порядок уроков неважен)?

Используем формулу для числа C_n^k сочетаний из n элементов по k

и получим $C_{10}^6 = \dfrac{10!}{6!4!} = \dfrac{6!\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{6!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 7\cdot 3\cdot 10 = 210$ способов.

Пример 5

У Кати есть семь разных книг по математике, у Коли девять книг по физике. Сколькими способами они могут обменяться пятью книгами?

Катя может выбрать пять книг из семи $C_7^5 = \dfrac{7!}{5!2!} = 21$ способом,

Коля (независимо от Кати) может выбрать пять книг из девяти $C_9^5 = \dfrac{9!}{5!4!} = \dfrac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126$ способами. Итого возможных вариантов обмена: $C_7^5 \cdot C_9^5 = 21 \cdot 126 = 2646.$

Пример 6

В штате прокуратуры областного центра имеется 16 следователей. Сколькими способами можно выбрать 2 из них для проверки оперативной информации о готовящемся преступлении?

Способов столько, сколько существует двухэлементных подмножеств у множества, состоящего из 16 элементов, т.е. их число равно

$$C_{16}^{2}=\frac{16!}{(16-2)!2!}=\frac{16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot...\cdot1}{14\cdot13\cdot..\cdot1\cdot2\cdot1}=\frac{15\cdot16}{2}=120$$

Ответ: 120 способов выбрать двух следователей для проверки оперативной информации.

Выбор формул для решения комбинаторных задач

Все ли элементы входят в комбинацию?

Да

Перестановки

$$P_n = n!$$

Нет

Важен порядок элементов?

Да

Размещения

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Нет

Сочетания

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$