

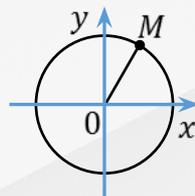
$$1 - \cos^2 \alpha = 1$$

Уравнение $\cos x = a$

Сегодня на уроке

1. Научимся решать простейшие тригонометрические уравнения вида $\cos x = a$.
2. Введём понятие арккосинуса числа a .
3. Выведем общую формулу нахождения корней уравнения $\cos x = a$.

Чему равны координаты точки M , лежащей на единичной окружности и соответствующей числу $\frac{\pi}{3}$?



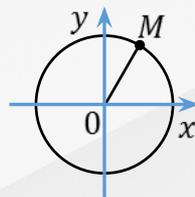
А $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

В $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Б $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Г $(-1; 0)$

Чему равны координаты точки M , лежащей на единичной окружности и соответствующей числу $\frac{\pi}{3}$?



А

$$\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

В

$$\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Б

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Г

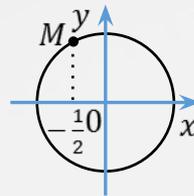
$$(-1; 0)$$

Заполните недостающие значения функции $\cos x$ при указанных значениях аргумента.

Заполните недостающие значения функции $\cos x$ при указанных значениях аргумента.

Дана точка M с абсциссой $-\frac{1}{2}$.

В какие из указанных углов поворота начальная точка с координатами $(1; 0)$ переходит в точку M ?



А $\frac{2\pi}{3}$

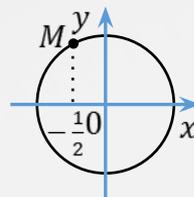
В $\frac{5\pi}{6}$

Б $\frac{5\pi}{4}$

Г $\frac{8\pi}{3}$

Дана точка M с абсциссой $-\frac{1}{2}$.

В какие из указанных углов поворота начальная точка с координатами $(1; 0)$ переходит в точку M ?



А $\frac{2\pi}{3}$

В $\frac{5\pi}{6}$

Б $\frac{5\pi}{4}$

Г $\frac{8\pi}{3}$

Тригонометрические уравнения

Уравнение, которое содержит переменную под знаком тригонометрических функций, называется тригонометрическим уравнением.

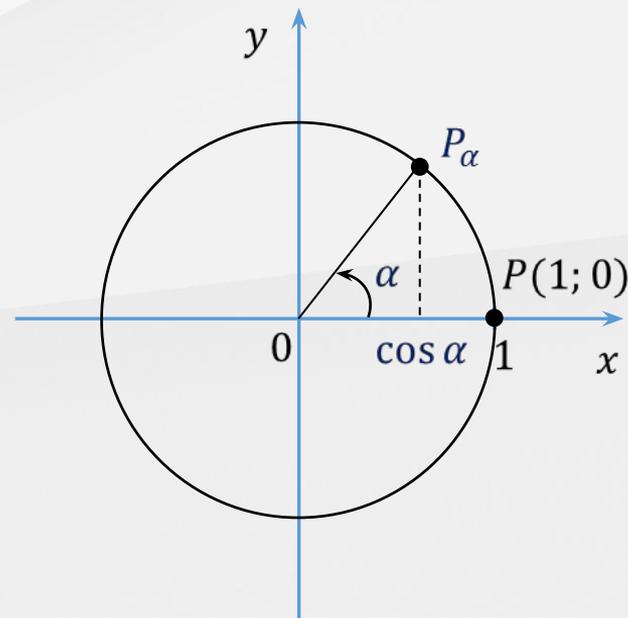
Уравнения вида $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$, где x – переменная, а число $a \in \mathbb{R}$, называются простейшими тригонометрическими уравнениями.

Вспомним

Косинусом угла α называется абсцисса точки P_α , полученной поворотом точки $P(1; 0)$ вокруг начала координат на угол α .

Так как координаты x и y точек единичной окружности удовлетворяют неравенствам $-1 \leq y \leq 1$, $-1 \leq x \leq 1$, то для $\alpha \in (0; 360^\circ)$ справедливо неравенство $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$.

Из этого следует, что уравнение $\cos x = a$ имеет корни только при $-1 \leq a \leq 1$.



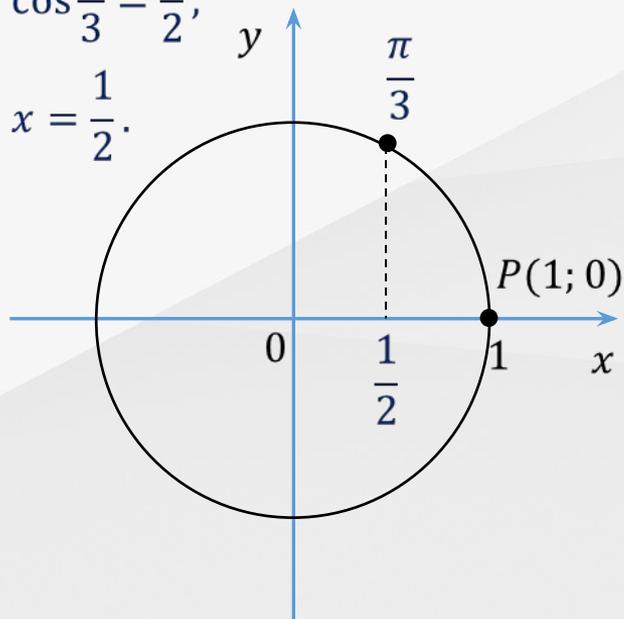
Уравнение $\cos x = a$

$$\cos \frac{\pi}{3} = x,$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

$$x = \frac{1}{2}.$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$



Чему равен косинус

точки $\frac{\pi}{3}$?



Уравнение $\cos x = a$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

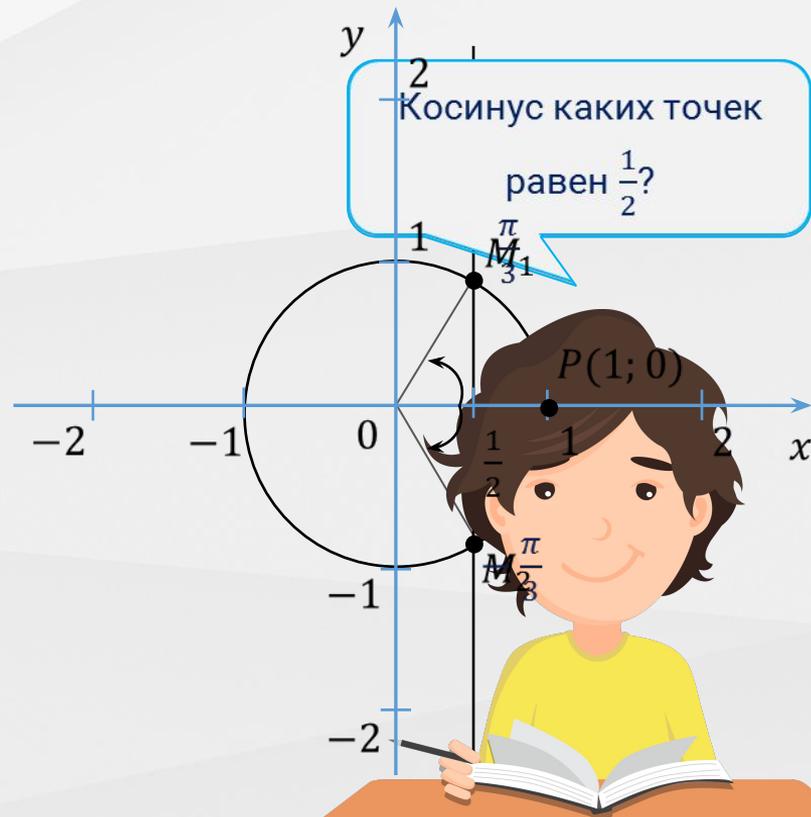
$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

$$x = \frac{\pi}{3},$$

$$\cos x = \frac{1}{2},$$

$$x_1 = \frac{\pi}{3},$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{3},$$



Уравнение $\cos x = a$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

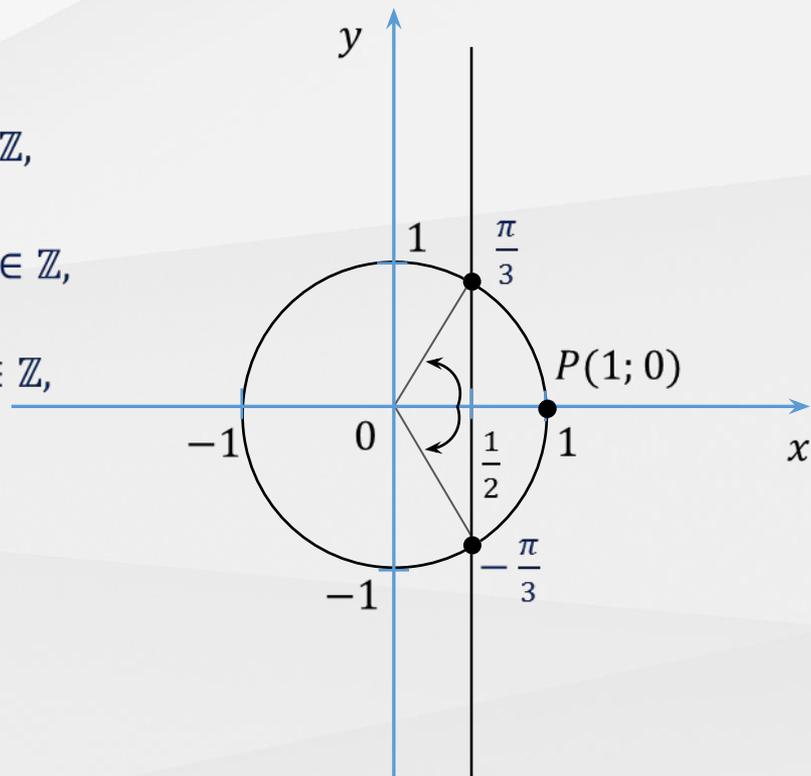
$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

$$x = \frac{\pi}{3},$$

$$\cos x = \frac{1}{2},$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \end{array} \right.$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$



Решение уравнения $\cos x = a$

1. $|a| < 1$.

$$-1 < a < 1$$

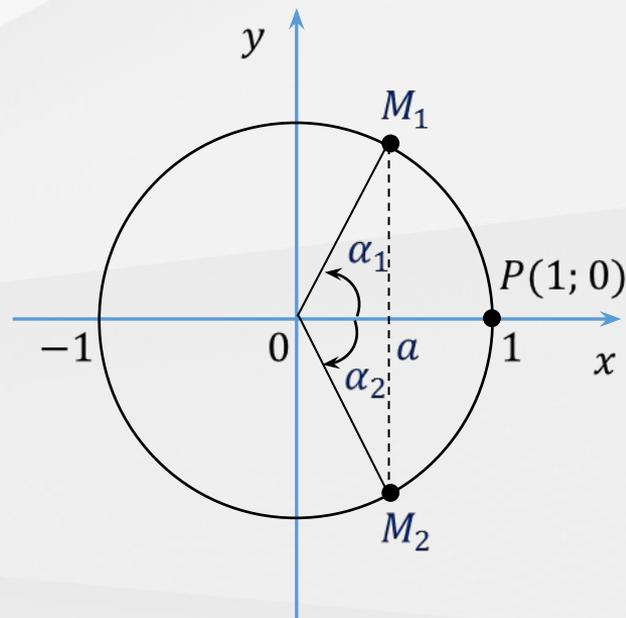
$$\cos x = a,$$

$$x_1 = \alpha_1 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$x_2 = \alpha_2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha,$$

$$x = \pm\alpha + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$



Задание

$$\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Решите уравнения $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение:

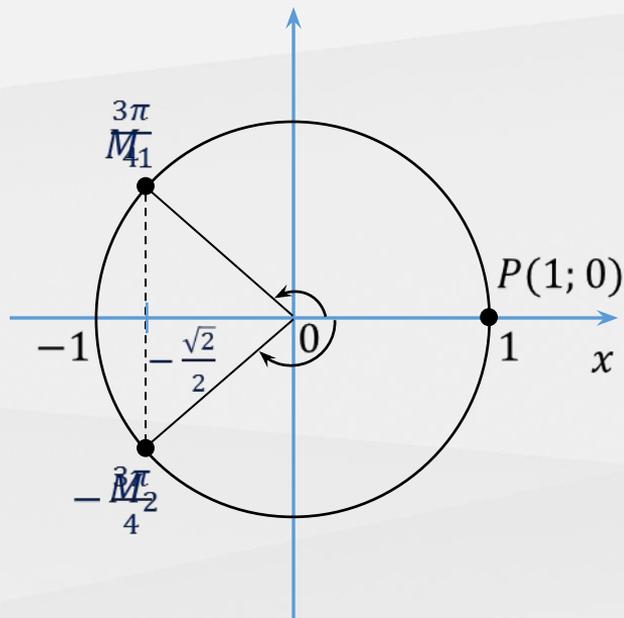
$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x_1 = \frac{3\pi}{4},$$

$$x_2 = -\frac{3\pi}{4},$$

$$x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

Ответ: $x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$



Задание

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Решите уравнения $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение:

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x_1 = \frac{3\pi}{4},$$

$$x_2 = -\frac{3\pi}{4},$$

$$x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

Ответ: $x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

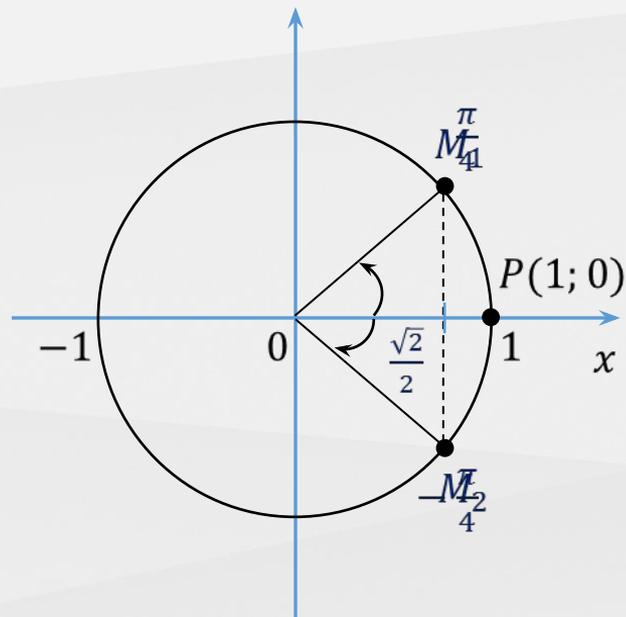
$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4},$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{4},$$

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$



Решение уравнения $\cos x = a$

Каждое из уравнений $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ имеет бесконечное множество корней.

На отрезке $[0; \pi]$ каждое из этих уравнений имеет только один корень.

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x_1 = \frac{3\pi}{4},$$

Число $\frac{3\pi}{4}$ называют

арккосинусом числа $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $x = 2\pi \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

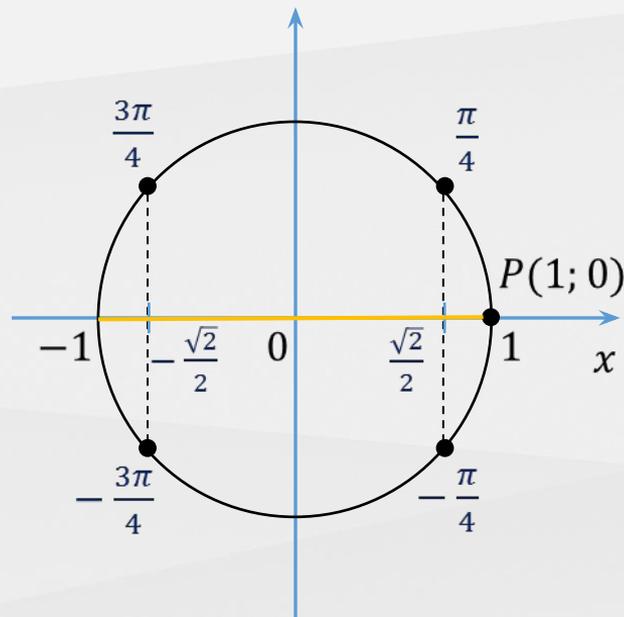
$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4},$$

Число $\frac{\pi}{4}$ называют

арккосинусом числа $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.



Решение уравнения $\cos x = a$

Каждое из уравнений $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ имеет бесконечное множество корней.

На отрезке $[0; \pi]$ каждое из этих уравнений имеет только один корень.

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x_1 = \frac{3\pi}{4},$$

Число $\frac{3\pi}{4}$ называют
арккосинусом числа $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4},$$

Число $\frac{\pi}{4}$ называют
арккосинусом числа $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

«Арккосинус» в переводе с латинского означает «дуга» и «косинус».



Решение уравнения $\cos x = a$

1. $|a| \leq 1$.

$$-1 \leq a \leq 1$$

$$\cos x = a,$$

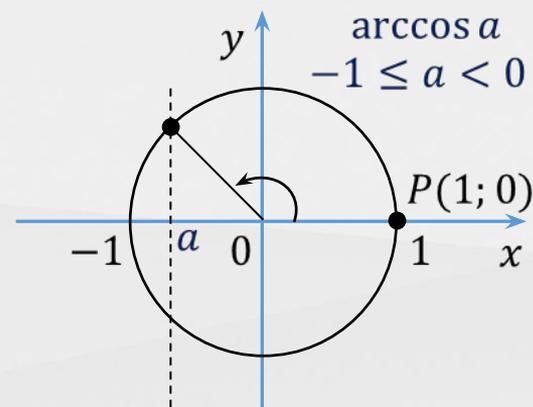
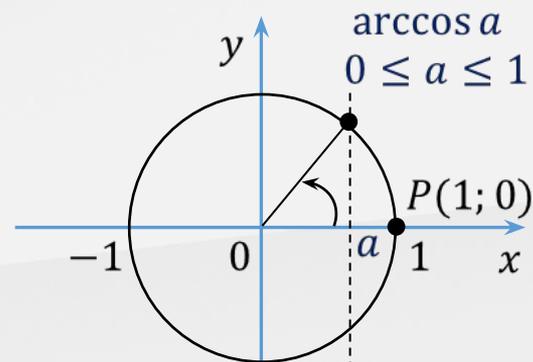
$$x = \pm \alpha + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Уравнение $\cos x = a$, где $|a| \leq 1$,
на отрезке $[0; \pi]$ имеет только один корень.

Если $a \geq 0$, то этот корень заключён в промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Если $a < 0$, то корень располагается в промежутке $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Этот корень называют арккосинусом числа a
и обозначают так: $\arccos a$.



Запомните!

Арккосинусом числа a , $|a| \leq 1$,
называется такое число $x \in [0; \pi]$,
косинус которого равен a .

$\arccos a = x$, если $\cos x = a$ и $0 \leq x \leq \pi$.

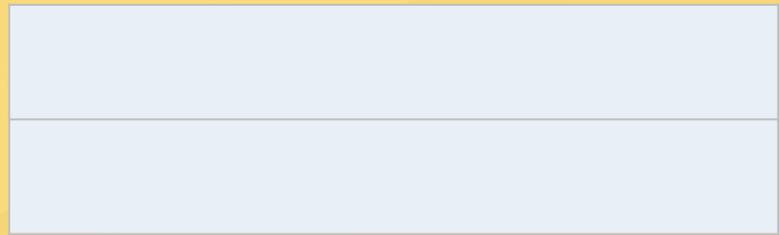
Арккосинус числа a

$$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4},$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \leq \frac{\pi}{4} \leq \pi.$$

$$\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6},$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \leq \frac{\pi}{6} \leq \pi.$$



Решение уравнения $\cos x = a$

1. $|a| \leq 1$.

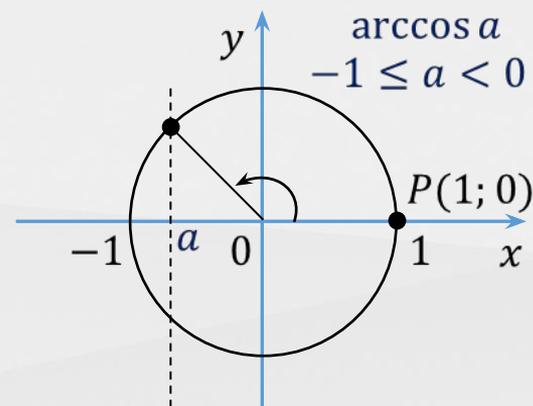
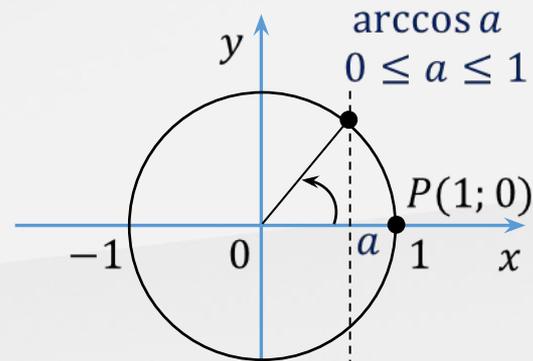
$$-1 \leq a \leq 1$$

$$\cos x = a,$$

$$x = \pm \alpha + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Все корни уравнения $\cos x = a$ можно найти по формуле:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



Запомните!

Для любого $a \in [-1; 1]$ справедлива формула:

$$\arccos a + \arccos(-a) = \pi$$

Эта формула позволяет находить значения арккосинусов отрицательных чисел через значения арккосинусов положительных чисел.

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Решение уравнения $\cos x = a$

2. $|a| > 1$.

$$a < -1, a > 1,$$

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1,$$

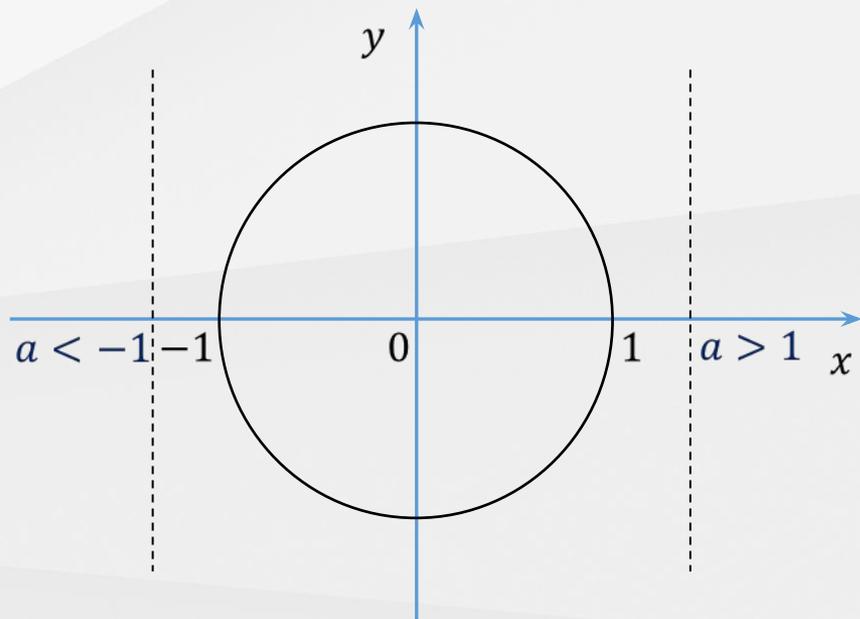
Уравнение $\cos x = a$ не имеет корней.

$$\cos x = -2,5,$$

$$x = \emptyset.$$

$$\cos x = 7,$$

$$x = \emptyset.$$



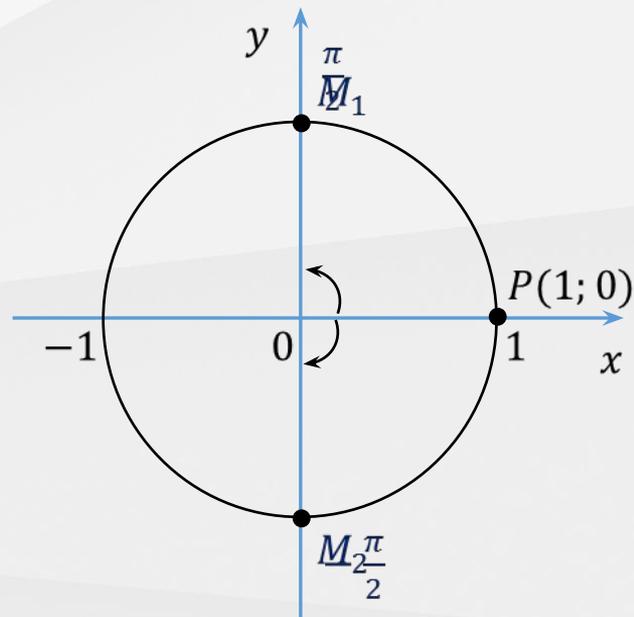
Решение уравнения $\cos x = a$

3. $a = 0$.

$$\cos x = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$



Решение уравнения $\cos x = a$

4. $|a| = 1$.

$$a = -1, a = 1$$

$$x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

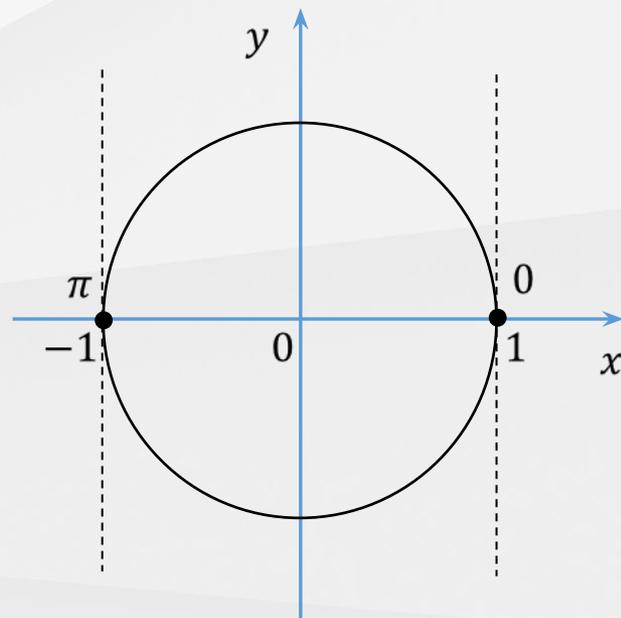
$$x = 0 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = -1,$$

$$x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 1,$$

$$x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



Задание № 1

Решите уравнение $\cos x = 0,3$.

Решение:

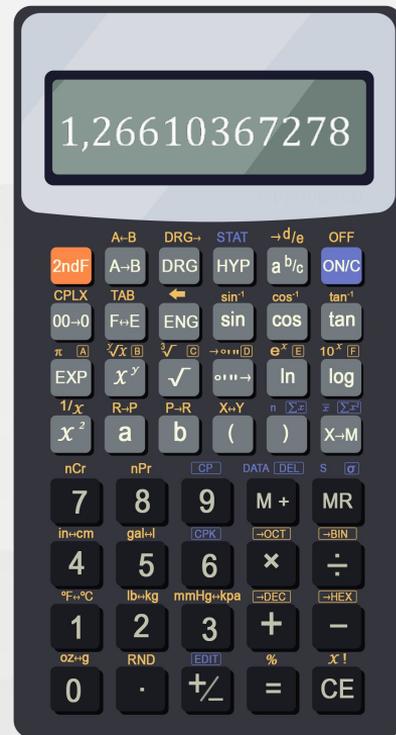
$$\cos x = 0,3,$$

$$x = \pm \arccos 0,3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$x \approx \pm 1,266 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

Ответ: $x \approx \pm 1,266 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



Задание № 2

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Решите уравнение $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение:

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6},$$

$$2x = \pm \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

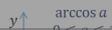
$$x = \pm \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z},$$

Ответ: $x = \pm \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Итоги урока

Решение уравнения $\cos x = a$

1. $|a| \leq 1$.



Решение уравнения $\cos x = a$

2. $|a| > 1$.



Решение уравнения $\cos x = a$

3. $a = 0$.



Решение уравнения $\cos x = a$

4. $|a| = 1$.



Запомните!

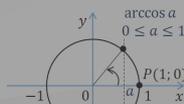
Решение уравнения $\cos x = a$

1. $|a| \leq 1$.

$-1 \leq a \leq 1$

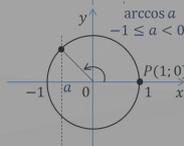
$\cos x = a$,

$x = \pm \alpha + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.



Все корни уравнения $\cos x = a$ можно найти по формуле:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



Решение уравнения $\cos x = a$

1. $|a| \leq 1$.

$-1 \leq a \leq 1$

$\cos x = a$,

$x = \pm \alpha + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Уравнение $\cos x = a$, где $|a| \leq 1$,

на отрезке $[0; \pi]$ имеет только один корень.

Если $a \geq 0$, то этот корень заключён в промежутке $[0; \frac{\pi}{2}]$.

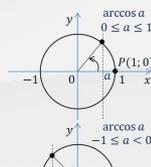
Если $a < 0$, то этот корень заключён в промежутке $(\frac{\pi}{2}; \pi]$.

Если $a = 1$,

то $x = 2\pi k$,

и если $a = -1$,

то $x = \pi + 2\pi k$.



Решение уравнения $\cos x = a$

2. $|a| > 1$.

$a < -1, a > 1$,

$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$,

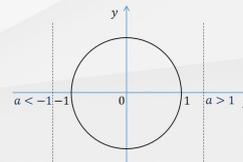
Уравнение $\cos x = a$ не имеет корней.

$\cos x = -2,5$,

$x = \emptyset$.

$\cos x = 7$,

$x = \emptyset$.



Решение уравнения $\cos x = a$

1. $|a| \leq 1$.

$-1 \leq a \leq 1$

$\cos x = a$,

$x = \pm \alpha + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Все корни уравнения $\cos x = a$ можно найти по формуле:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

