Тригонометрические уравнения

1. Арккосинус числа $a \in [-1;\ 1]$ (обозначается $\arccos a$) — такое число $\alpha \in [0;\ \pi]$, косинус которого равен a, т. е.

$$0 \leqslant \arccos a \leqslant \pi,\quad \cos(\arccos a) = a.$$

Если $a \in [0;\ 1]$, то $0 \leqslant \arccos a \leqslant \frac{\pi}{2}$, а если $a \in [-1;\ 0)$, то $\frac{\pi}{2} < \arccos a \leqslant \pi$. Если $|a| > 1$, то выражение $\arccos a$ не имеет смысла.

2. Для любого $a \in [-1;\ 1]$ справедливо равенство

$$\cos(\arccos a) = a. \tag{1}$$

Равенство

$$\arccos(\cos\alpha) = \alpha \tag{2}$$

является верным только при $\alpha \in [0; \pi]$, хотя выражение $\arccos(\cos\alpha)$ имеет смысл при всех $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

Для любого $a \in [-1;\ 1]$ верно равенство

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a. \tag{3}$$

3. Если $-1 \leqslant a \leqslant 1$, то все корни уравнения

$$\cos x = a \tag{4}$$

определяются формулой

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \tag{5}$$

Если $|a| > 1$, то уравнение (4) не имеет корней.

4. Формулы корней уравнения (4) при $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$:

$$\cos x = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}; \tag{6}$$

$$\cos x = 1,\ x = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}; \tag{7}$$

$$\cos x = -1,\ x = \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \tag{8}$$

3. Решить уравнение:

1) $5\cos x = 2$; 2) $\cos 5x = -1$; 3) $2\cos\frac{x}{2} = 1$;

4) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$; 5) $4\cos^2 x - 3 = 0$; 6) $\cos 2x = \frac{3}{2\sqrt{2}}$.

Решение.

1) Запишем уравнение в виде $\cos x = \frac{2}{5}$ и по формуле (5) найдём его корни: $x = \pm\arccos\frac{2}{5} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

2) Применив формулу (8), получим $5x = \pi + 2\pi n$, откуда $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi n}{5},\ n \in \boldsymbol{Z}$.

3) Так как $\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$, то по формуле (5) получаем $\frac{x}{2} = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n$, где $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$. Поэтому $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 4\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

4) Применив формулу (6), получим $3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, откуда $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

5) Так как $\cos^2 x = \frac{3}{4}$, то $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ и $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Заметим, что эти две серии корней можно объединить в одну с помощью формулы $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$. Тогда уравнение примет вид $\cos 2x = \frac{1}{2}$, откуда $2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

6) Уравнение $\cos 2x = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ не имеет корней, так как $3 > 2\sqrt{2}$ (это следует из неравенства $9 > 8$).

1. Арксинус числа $a \in [-1;\ 1]$ (обозначается $\arcsin a$) — такое число $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a, т. е.

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin a \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad \sin(\arcsin a) = a.$$

Если $a \in [0;\ 1]$, то $0 \leqslant \arcsin a \leqslant \frac{\pi}{2}$, а если $a \in [-1;\ 0)$, то $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin a < 0$.

Если $|a| > 1$, то выражение $\arcsin a$ не имеет смысла.

2. Для любого $a \in [1;\ 1]$ справедливо равенство

$$\sin(\arcsin a) = a. \tag{1}$$

Равенство

$$\arcsin(\sin\alpha) = \alpha \tag{2}$$

является верным при $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, хотя выражение в левой части имеет смысл при всех $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

Для любого $a \in [-1;\ 1]$ верно равенство

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a. \tag{3}$$

3. Для любого $a \in [-1;\ 1]$ справедливо равенство

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}. \qquad (4)$$

4. Если $|a| \leqslant 1$, то все корни уравнения

$$\sin x = a \qquad (5)$$

определяются формулой

$$x = \arcsin a + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

$$x = \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Если $|a| > 1$, то уравнение (5) не имеет корней.

5. Формулы корней уравнения (5) при $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$:

$$\sin x = 0,\ x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}; \qquad (7)$$

$$\sin x = 1,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}; \qquad (8)$$

$$\sin x = -1,\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \qquad (9)$$

Решить уравнение:

1) $4\sin x = 3$; 2) $\sin 4x = -1$; 3) $2\sin\frac{x}{2} = -\sqrt{3}$;

4) $\sin\left(5x + \frac{3\pi}{4}\right) = 0$; 5) $3\sqrt{3}\sin x = 2\sqrt{7}$;

6) $9\sin^2 x - 1 = 0$; 7) $\sin 5x \cos 2x - \cos 5x \sin 2x = 1$.

1) Так как $\sin x = \frac{3}{4}$, то по формуле (6) получаем

$$x = (-1)^n \arcsin\frac{3}{4} + \pi n,\ n \in Z.$$

2) По формуле (9) находим $4x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, откуда

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$$

3) Корни уравнения $\sin\frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ найдём по формуле (6).

Учитывая, что $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$, получаем

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n,$$

откуда $x = (-1)^{n+1}\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

4) Применив формулу (7), находим $5x+\frac{3\pi}{4}=\pi n$, откуда $x=-\frac{3\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

5) Уравнение $\sin x=\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$ не имеет корней, так как $\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}>1$ (это вытекает из неравенства $28>27$).

6) Так как $\sin^2 x=\frac{1}{9}$, то $\sin x=\frac{1}{3}$, $\sin x=-\frac{1}{3}$, откуда $x=(-1)^n \arcsin\frac{1}{3}+\pi n$, $x=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Заметим, что эти две серии корней можно записать в виде одной формулы, если заменить $\sin^2 x$ на $\frac{1-\cos 2x}{2}$. Тогда получим $\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{9}$, $\cos 2x=\frac{7}{9}$, откуда $2x=\pm\arccos\frac{7}{9}+2\pi n$, $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{7}{9}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

7) Применив формулу синуса разности, запишем уравнение в виде $\sin(5x-2x)=1$, или $\sin 3x=1$, откуда по формуле (8) получим $3x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

1. Арктангенс числа $a \in \boldsymbol{R}$ (обозначается $\operatorname{arctg} a$) — такое число $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a, т. е.

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = a.$$

2. Для любого $a \in \boldsymbol{R}$ справедливо равенство

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a. \tag{1}$$

Равенство

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \alpha \tag{2}$$

является верным только при $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Для любого $a \in \boldsymbol{R}$ справедливо равенство

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a. \tag{3}$$

3. Для любого $a \in \boldsymbol{R}$ уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет корни, определяемые формулой

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}. \tag{4}$$

3. Решить уравнение:

1) $\operatorname{tg} 2x = 1$; 2) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{3} + 1 = 0$; 3) $4 - 9\operatorname{tg}^2 3x = 0$.

Решение.

1) По формуле (4) находим $2x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n = \frac{\pi}{4} + \pi n$, откуда $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2) Записав уравнение в виде $\operatorname{tg}\frac{x}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, по формуле (4) находим $\frac{x}{3} = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi n$, где $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$.

Поэтому $x = 3\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 3\pi n = -\frac{\pi}{2} + 3\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3) Запишем уравнение в виде $\operatorname{tg}^2 3x = \frac{4}{9}$, откуда $\operatorname{tg} 3x = \frac{2}{3}$, $\operatorname{tg} 3x = -\frac{2}{3}$. Если $\operatorname{tg} 3x = \frac{2}{3}$, то $3x = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi n$, $x = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Если $\operatorname{tg} 3x = -\frac{2}{3}$, то $x = -\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Решение тригонометрических уравнений сводится в итоге к решению одного из простейших тригонометрических уравнений $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$. Напомним общие формулы корней этих уравнений:

Уравнение		Корни
$\sin x = a,\ \lvert a\rvert \leqslant 1$	(1)	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
$\cos x = a,\ \lvert a\rvert \leqslant 1$	(2)	$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
$\operatorname{tg} x = a,\ a \in \boldsymbol{R}$	(3)	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

1. Решить уравнение $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$.

Решение. Полагая $\sin x = y$, получаем уравнение $2y^2 - 3y - 2 = 0$, имеющее корни $y_1 = 2$, $y_2 = -\frac{1}{2}$. Если $y = -\frac{1}{2}$, то $\sin x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$. Если $y = 2$, то $\sin x = 2$. Это уравнение не имеет корней.

Ответ. $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$.

2. Решить уравнение $2\sin^2 x - 3\cos x = 3$.

Решение. Заменим $\sin^2 x$ на $1 - \cos^2 x$. Тогда уравнение примет вид $2(1 - \cos^2 x) - 3\cos x = 3$, или $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$, откуда $\cos x = -1$, $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Если $\cos x = -1$, то $x = \pi + 2\pi n$, а если $\cos x = -\frac{1}{2}$, то $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi$.

Ответ. $x = \pi + 2\pi n$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.

3. Решить уравнение $\operatorname{tg} x - 3\operatorname{ctg} x = 2$.

Решение. Записав уравнение в виде $\operatorname{tg} x - \frac{3}{\operatorname{tg} x} = 2$ и умножив обе его части на $\operatorname{tg} x$, получим $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$, откуда $\operatorname{tg} x = -1$, $\operatorname{tg} x = 3$. Если $\operatorname{tg} x = -1$, то $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, а если $\operatorname{tg} x = 3$, то $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n$.

В процессе решения мы умножили обе части уравнения на $\operatorname{tg} x$, что могло привести к появлению посторонних корней, которые являются корнями уравнения $\operatorname{tg} x = 0$. Так как значения x, при которых $\operatorname{tg} x = 0$, не являются корнями уравнения $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$, то это уравнение и исходное уравнение равносильны.

Ответ. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

4. Решить уравнение $\cos 2x - 2\cos x = 0$.

Решение. Используя формулу $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ и полагая $\cos x = t$, получаем уравнение $2t^2 - 2t - 1 = 0$, имеющее корни $t_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, $t_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Так как $-1 < t_1 < 0$, $t_2 > 1$, то $x = \pm\arccos t_1 + 2\pi n$, где $\arccos t_1 = \arccos\frac{1-\sqrt{3}}{2} = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Ответ. $x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Уравнения, однородные относительно $\sin x$ и $\cos x$

Однородные уравнения — это уравнения вида

$$a \sin x + b \cos x = 0,$$
$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0.$$

5. Решить уравнение $2 \sin x + 5 \cos x = 0$.

Решение. Заметим, что $\cos x \neq 0$. Действительно, если $\cos x = 0$, то из уравнения следует, что $\sin x = 0$, а это невозможно, так как $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Поэтому, разделив обе части уравнения на $\cos x$, получим уравнение $2 \operatorname{tg} x + 5 = 0$, равносильное исходному. Отсюда находим $\operatorname{tg} x = -\frac{5}{2}$. Ответ. $x = -\operatorname{arctg} \frac{5}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

6. Решить уравнение $\sin^2 x - 3\sin x\cos x - 4\cos^2 x = 0$.

Решение. Разделив обе части данного уравнения на $\cos^2 x$, получаем равносильное уравнение $\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x - 4 = 0$, откуда $\operatorname{tg} x = 4$, $\operatorname{tg} x = -1$. **Ответ.** $x = \operatorname{arctg} 4 + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

Замечание. Уравнение $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$ можно свести к однородному, если воспользоваться тождеством $d = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$.

Уравнения, решаемые с помощью разложения их левой части на множители

8. Решить уравнение $2\sin x\cos 2x - 1 + \sin x - 2\cos 2x = 0$.

Решение. Сгруппируем слагаемые левой части уравнения и получим

$$2\cos 2x(\sin x - 1) + (\sin x - 1) = 0,$$
$$(\sin x - 1)(2\cos 2x + 1) = 0.$$

Поэтому исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $\sin x = 1$ и $\cos 2x = -\frac{1}{2}$. В подобных случаях говорят также, что уравнение распадается на два уравнения.

Ответ. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

9. Решить уравнение $\sin x \cos 3x = \cos x \sin 5x$.

Решение. Преобразуя в обеих частях уравнения произведение в сумму (см. формулу (5) § 11), запишем уравнение в виде

$$\frac{1}{2}(\sin 4x - \sin 2x) = \frac{1}{2}(\sin 6x + \sin 4x),$$

$$\sin 6x + \sin 2x = 0.$$

По формуле суммы синусов получаем $2\sin 4x \cos 2x = 0$. Заметим, что все корни уравнения $\cos 2x = 0$ содержатся среди корней уравнения $\sin 4x = 0$, и найдём все решения исходного уравнения: $x = \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$.

10. Решить уравнение $\cos^2 2x + \sin^2 x = \cos^2 3x$.

Решение. Применяя формулы понижения степени, запишем уравнение в виде

$$\cos^2 2x = \frac{1+\cos 6x}{2} - \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 2x = \frac{\cos 6x + \cos 2x}{2}.$$

По формулам суммы и разности косинусов последовательно преобразуем полученное уравнение:

$$\cos^2 2x = \cos 4x \cos 2x, \quad \cos 2x(\cos 2x - \cos 4x) = 0,$$
$$2\cos 2x \sin 3x \sin x = 0.$$

Так как все корни уравнения $\sin x = 0$ содержатся среди корней уравнения $\sin 3x = 0$, то исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $\cos 2x = 0$, $\sin 3x = 0$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.