БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Вводный курс математики

БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

в Z: 8>5 – истинно; 5>10 – ложно

На множестве точек плоскости:

Можно сказать, какая из точек плоскости наиболее удалена от данной прямой этой плоскости

Различные пары элементов некоторого множества связаны отношением (двуместным или бинарным)

БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

На множестве X определено **бинарное отношение**, если задано подмножество R декартова произведения X×X

$$R \subseteq X \times X$$

Бинарное отношение – соответствие из X в X

Если $(x,y) \in R$, то “x и y связаны отношением R”

$x\ R\ y$ $\qquad\qquad\qquad$ $R(x,y)$

Способы задания бинарного отношения

1. Перечисление элементов:

   $R=\{(1,1),(2,2),(6,6),(1,2),(1,6),(2,6)\}$ определено на множестве $X=\{1,2,6\}$

2. Бинарное отношение - область истинности некоторого двухместного предиката

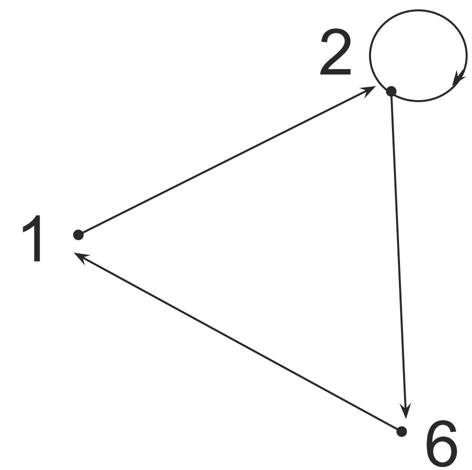
$R = I_P$ - область истинности $P(x,y)$: "x делит y"

3. Характеристическое свойство:

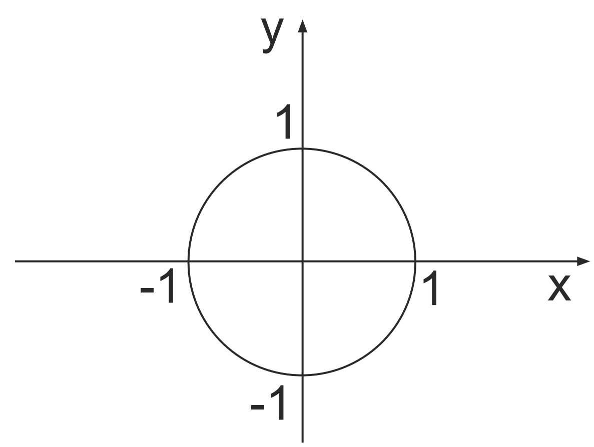
   $R = \{ (x,y) \in Z \times Z \mid x > 3y \}$

4. Граф отношения (рисунок, диаграмма):

R определено на множестве X={1,2,6}



5. На множестве действительных чисел бинарное отношение может быть изображено точками плоскости



6. Матричный способ: X={1,2,6}

R	1	2	6
1	1	0	1
2	1	1	0
6	0	0	1

Если (**a**,**b**)∈R, то на пересечении строки с номером **a** и столбца с номером **b** ставится **1**

Свойства бинарного отношения

R - бинарное отношение, определенное на множестве X

1. R **рефлексивно**, если $\forall x \in X \ (x,x) \in R$

$$R1 = \{ (x,y) \in Z \times Z \mid x \leq y \}$$

$$\forall x \in Z \ \ x \leq x$$

2. R **симметрично**, если

$$\forall x,y \in X \ [(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R]$$

$$R2 = \{ (x,y) \in Z \times Z \mid (x-y) \text{ кратно } 2$$

$$\forall x,y \in \} Z \ [(x-y) \text{ кратно } 2 \Rightarrow (y-x) \text{ кратно } 2]$$

R - бинарное отношение, определенное на множестве X

3. R **транзитивно**, если

$\forall x,y,z \in X\ [\,(x,y) \in R \ \&\ (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R\,]$

Для R1:

$R1 = \{\, (x,y) \in Z \times Z \mid x \le y \,\}$

$\forall x,y,z \in Z\ [\, x \le y \ \&\ y \le z \Rightarrow x \le z \,]$

4. R **антирефлексивно**, если $\forall x \in X\ \ (x,x) \notin R$

$R3 = \{\, (x,y) \in Z \times Z \mid x > y \,\}$

$\forall x \in Z\ \ \rceil (x > x)$, т.е. $x \le x$

R - бинарное отношение, определенное на множестве X

5. R **антисимметрично**, если

$$\forall x,y \in X \; [\, (x,y) \in R \;\&\; (y,x) \in R \Rightarrow x=y \,]$$

Для R1:

$R1 = \{ (x,y) \in Z \times Z \mid x \leq y \}$

$$\forall x,y \in Z \; [\, x \leq y \;\&\; y \leq x \Rightarrow x=y \,]$$

6. R **линейно**, если

$$\forall x,y \in X \; [\, (x,y) \in R \lor (y,x) \in R \lor x=y \,]$$

Для R1:

$$\forall x,y \in Z \; [\, x \leq y \lor y \leq x \lor x=y \,]$$

Отношение порядка

Отношение частичного порядка – рефлексивное, транзитивное и антисимметричное бинарное отношение

$R1 = \{ (x,y)\in Z\times Z \mid x\leq y \}$

Отношение строгого порядка – антирефлексивное, транзитивное, антисимметричное и линейное бинарное отношение

$R3 = \{ (x,y)\in Z\times Z \mid x>y \}$

Частично упорядоченное множество

A≠∅ < A, ≤ > – ЧУМ

Частично упорядоченное множество – множество, на котором задано отношение частичного порядка

1) < Z, ≤ > – ЧУМ 2) < P(A), ⊆ > – ЧУМ

3) На **N** определим R: x R y ⇔ x | y

Рефлексивность: ∀x∈**N** (x | x)

Транзитивность: ∀x,y,z∈**N** (x | y & y | z ⇒ x | z)

Антисимметричность: ∀x,y∈**N** (x | y & y | x ⇒ x=y)

< **N**, R > - ЧУМ < **Z**, R > - не является ЧУМ

Элемент $a \in A$ частично упорядоченного множества $< A, \leq >$ называется **наибольшим элементом**, если $\forall x \in A \;\; x \leq a$

Наименьший элемент ???

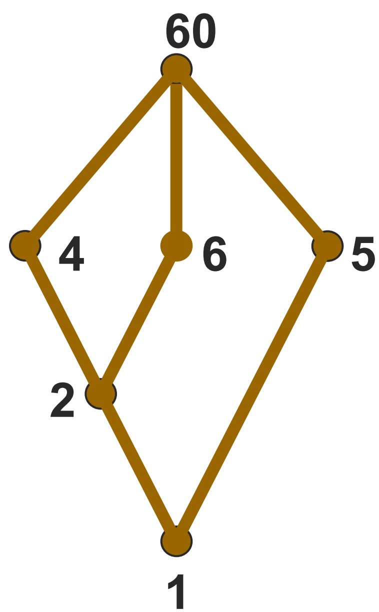
Элемент $a \in A$ частично упорядоченного множества $< A, \leq >$ называется **максимальным элементом**, если:
$\forall x \in A$ (если **x** сравним с **a**, то **x ≤ a**)

Минимальный элемент ???

Частично упорядоченное множество

$\forall x,y \in A \quad x\,R\,y \;\Leftrightarrow\; x \mid y$

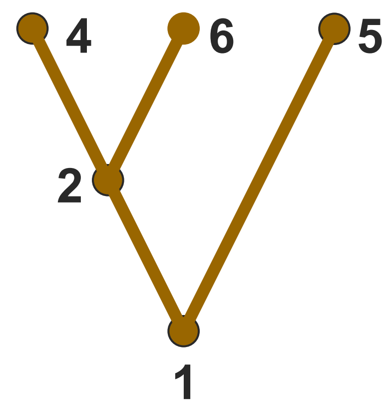
$A = \{1, 5, 60, 4, 6, 2\}$



60 – наибольший и максимальный

$< A, R >$ - ЧУМ

$A = \{1, 5, 4, 6, 2\}$



Нет наибольшего

4, 6, 5 - максимальные

Отношение эквивалентности

Отношение эквивалентности – рефлексивное, симметричное и транзитивное бинарное отношение

R3 = { $(x,y) \in Z \times Z \mid x > y$ - не рефлексивно

R1}= { $(x,y) \in Z \times Z \mid x \leq y$ - не симметрично

R2}= { $(x,y) \in Z \times Z \mid (x-y)$ кратно 2 }

Рефлексивность: $\forall x \in Z$ ($(x-x)$ кратно 2)

Симметричность – проверена (см. ранее)

Транзитивность:

$\forall x,y,z \in Z$ [($(x-y)$ кратно 2) & ($(y-z)$ кратно 2) $\Rightarrow$ ($(x-y)+(y-z)$) кратно 2 $\Rightarrow$ $(x-z)$ кратно 2]

R3 - отношение эквивалентности

УПРАЖНЕНИЕ

Докажите:

$\forall m \in Z \quad m>1$

$R = \{ (x,y) \in Z \times Z \mid (x-y)$ кратно $m \}$ – отношение эквивалентности

Классы эквивалентности

Семейство $\{ X_k \mid k \in K, X_k \subseteq X \}$ образует **разбиение** множества X на классы X_k, если:

1) $\forall k \in K \quad X_k \neq \varnothing$

2) $\forall m,k \in K \ [\, m \neq k \Rightarrow X_m \cap X_k = \varnothing \,]$

3) $X = \bigcup_{k \in K} X_k$

A = {1,2,3,4,5} можно разбить на классы:
$A_1 = \{3\}$, $A_2 = \{1,4\}$, $A_3 = \{2,5\}$

Всякому **разбиению** множества X на классы X_k отвечает **бинарное отношение R**, задаваемое следующим образом:
$(x,y)\in R$ т.т.т., когда $\exists k\in K$ $(x\in X_k$ & $y\in X_k)$

Упражнение: Покажите, что R – отношение эквивалентности

Любые два элемента одного класса эквивалентны между собой

Никакие два элемента разных классов не эквивалентны между собой

Классы эквивалентности

Пусть **~** – отношение эквивалентности, заданное на X, и **a**$\in$X

Класс K_a эквивалентности ~

с порождающим элементом **a**:

$K_a = \{ x \in X \mid x \sim a \}$

$\{ (x,y) \in Z \times Z \mid (x-y)$ кратно $2 \}$ -

отношение эквивалентности **~**

$K_0 = \{ x \in Z \mid x \sim 0 \} = \{ x \in Z \mid (x-0)$ кратно $2 \} = 2Z$

$K_1 = \{ x \in Z \mid x \sim 1 \} = \{ x \in Z \mid (x-1)$ кратно $2 \} = 2Z+1$

Свойства классов эквивалентности

Пусть ~ – отношение эквивалентности, заданное на X

1) Любой класс K_a не пуст

$a \sim a$ (рефлексивность), т.е. $a \in K_a$

2) Если $x \in K_a$ и $y \in K_a$, то $x \sim y$

$x \in K_a$ и $y \in K_a$, т.е. $x \sim a$ и $y \sim a$

По симметричности: $y \sim a \Rightarrow a \sim y$

По транзитивности: $x \sim a \ \& \ a \sim y \Rightarrow x \sim y$

3) Если $a \sim b$, то $K_a = K_b$

Пусть $x \in K_a$, тогда $x \sim a$ $\xrightarrow{\text{транзитивность}}$ $x \sim b \Rightarrow x \in K_b$

Но по условию $a \sim b$

$\Rightarrow K_a \subseteq K_b$

Аналогично: $K_b \subseteq K_a$

Итак, $K_a = K_b$

Пусть ~ – отношение эквивалентности, заданное на X

4) Элементы из разных классов не эквивалентны друг другу

Пусть $K_a \neq K_b$

Пусть $x \in K_a \Rightarrow x \sim a \Rightarrow K_x = K_a$

Пусть $y \in K_b \Rightarrow y \sim b \Rightarrow K_y = K_b$

Если $x \sim y$, то $K_x = K_y$

$\Longrightarrow K_a = K_b$

ПРОТИВОРЕЧИЕ

5) Различные классы не пересекаются

Пусть $K_a \neq K_b$. Пусть $K_a \cap K_b \neq \varnothing$, т.е. $\exists x \in K_a \cap K_b$.

, Тогда $x \in K_a$ и $x \in K_b \Rightarrow K_x = K_a$ и $K_x = K_b$

$\Rightarrow K_a = K_b$ **ПРОТИВОРЕЧИЕ**

ТЕОРЕМА

Всякое отношение эквивалентности, заданное на множестве X, определяет разбиение множества X на классы эквивалентности

Доказательство: Пусть **~** – отношение эквивалентности на X

$\{ X_k \mid k \in K, X_k \subseteq X \}$ – множество классов эквивалентности по отношению **~**

1) По свойству 1: $\forall k \in K \quad X_k \neq \varnothing$

2) По свойству 5: $\forall m,k \in K \ [\, m \neq k \Rightarrow X_m \cap X_k = \varnothing \,]$

Доказательство ТЕОРЕМЫ
продолжение

3) $\forall k \in K \quad X_k \subseteq X$, т.е. $\bigcup_{k \in K} X_k \subseteq X$

$\forall a \in X \quad \exists k \in K \ (a \in X_k) \quad \Rightarrow \quad a \in \bigcup_{k \in K} X_k \quad \Rightarrow \quad X \subseteq \bigcup_{k \in K} X_k$

Итак, $X = \bigcup_{k \in K} X_k$

Следовательно, $\{ X_k \mid k \in K, X_k \subseteq X \}$ образует **разбиение** множества X на классы X_k

Теорема доказана

Фактор-множество

Фактор-множеством множества X по отношению эквивалентности R называется множество, каждый элемент которого является одним из классов эквивалентности

Обозначение: **X / R**

Пример 1: $R = \{ (x,y) \mid (x-y) \text{ кратно } 2 \}$ на Z

$K_0 = 2Z \qquad K_1 = 2Z+1$

$\mathbf{X / R} = \{ 2Z, 2Z+1 \}$

Пример 2: $X = \{ (p,q) \mid p,q \in Z,\ q \neq 0 \}$

На X определим отношение эквивалентности R:

$(p,q)\ R\ (m,n)$ т.т.т. $p \cdot n - q \cdot m = 0$

Это равенство дробей: $\frac{p}{q} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow p \cdot n = q \cdot m$

Рациональное число – класс эквивалентности (все равные дроби с точностью до сократимости)

X / R можно рассматривать как множество рациональных чисел