# БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Вводный курс математики

# БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

в Z: $8>5$ – истинно; $5>10$ – ложно

На множестве точек плоскости:

Можно сказать, какая из точек плоскости наиболее удалена от данной прямой этой плоскости

Различные пары элементов некоторого множества связаны отношением (двуместным или бинарным)

На множестве X определено **бинарное отношение**, если задано подмножество R декартова произведения $X \times X$

$$R \subseteq X \times X$$

Бинарное отношение – соответствие из X в X

Если $(x,y) \in R$, то “x и y связаны отношением R”

$x\ R\ y$ $R(x,y)$

# Способы задания бинарного отношения

1. Перечисление элементов:

   R={(1,1),(2,2),(6,6),(1,2),(1,6),(2,6)} определено на множестве X={1,2,6}

2. Бинарное отношение - область истинности некоторого двухместного предиката

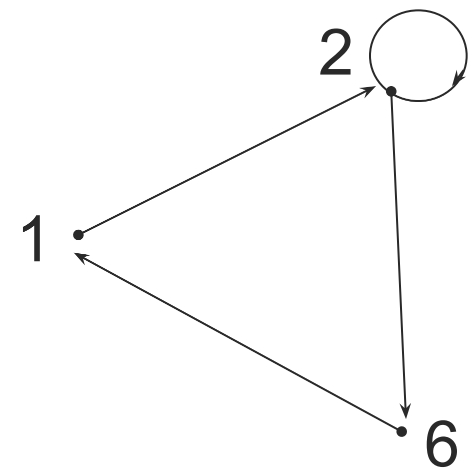
$R = I_P$ - область истинности P(x,y): "x делит y"

3. Характеристическое свойство:

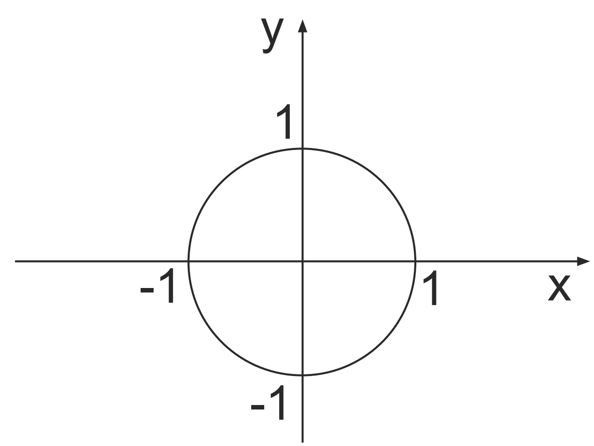
   $R = \{ (x,y) \in Z \times Z \mid x > 3y \}$

4. Граф отношения (рисунок, диаграмма):

R определено на множестве X={1,2,6}




5. На множестве действительных чисел бинарное отношение может быть изображено точками плоскости



6. Матричный способ: $X=\{1,2,6\}$

| R | 1 | 2 | 6 |
|---|---|---|---|
| 1 | **1** | 0 | **1** |
| 2 | **1** | **1** | 0 |
| 6 | 0 | 0 | **1** |

Если $(\mathbf{a},\mathbf{b})\in R$, то на пересечении строки с номером **a** и столбца с номером **b** ставится **1**

# Свойства бинарного отношения

**R - бинарное отношение, определенное на множестве X**

1. R **рефлексивно**, если $\forall x \in X \ (x,x) \in R$

$$R1 = \{ (x,y) \in Z \times Z \mid x \leq y \}$$

$$\forall x \in Z \ \ x \leq x$$

2. R **симметрично**, если

$$\forall x,y \in X \ [ (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R ]$$

$$R2 = \{ (x,y) \in Z \times Z \mid (x-y) \text{ кратно } 2$$

$$\forall x,y \in \} Z \ [ (x-y) \text{ кратно } 2 \Rightarrow (y-x) \text{ кратно } 2 ]$$

**R - бинарное отношение, определенное на множестве X**

3. R **транзитивно**, если

$\forall x,y,z \in X$ [ $(x,y) \in R$ & $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$ ]

Для R1:

$R1 = \{ (x,y) \in Z \times Z \mid x \leq y \}$

$\forall x,y,z \in Z$ [ $x \leq y$ & $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ ]

4. R **антирефлексивно**, если $\forall x \in X \ (x,x) \notin R$

$R3 = \{ (x,y) \in Z \times Z \mid x > y \}$

$\forall x \in Z \ \rceil(x > x)$, т.е. $x \leq x$

**R - бинарное отношение, определенное на множестве X**

5. R **антисимметрично**, если

$\forall x,y \in X \; [\, (x,y) \in R \;\&\; (y,x) \in R \Rightarrow x=y \,]$

Для R1: $R1 = \{ (x,y) \in Z \times Z \mid x \leq y \}$

$\forall x,y \in Z \; [\, x \leq y \;\&\; y \leq x \Rightarrow x=y \,]$

6. R **линейно**, если

$\forall x,y \in X \; [\, (x,y) \in R \vee (y,x) \in R \vee x=y \,]$

Для R1:

$\forall x,y \in Z \; [\, x \leq y \vee y \leq x \vee x=y \,]$

# Отношение порядка

**Отношение частичного порядка** – рефлексивное, транзитивное и антисимметричное бинарное отношение

$R1 = \{ (x,y) \in Z \times Z \mid x \le y \}$

**Отношение строгого порядка** – антирефлексивное, транзитивное, антисимметричное и линейное бинарное отношение

$R3 = \{ (x,y) \in Z \times Z \mid x > y \}$

# Частично упорядоченное множество

**$A \neq \varnothing$ $\quad$ $< A, \leq >$ – ЧУМ**

**Частично упорядоченное множество** – множество, на котором задано отношение частичного порядка

1) $< Z, \leq >$ – ЧУМ $\qquad$ 2) $< P(A), \subseteq >$ – ЧУМ

3) На **N** определим R: $\quad x\,R\,y \Leftrightarrow x \mid y$

Рефлексивность: $\forall x \in \mathbf{N}\ (x \mid x)$

Транзитивность: $\forall x,y,z \in \mathbf{N}\ (x \mid y\ \&\ y \mid z \Rightarrow x \mid z)$

Антисимметричность: $\forall x,y \in \mathbf{N}\ (x \mid y\ \&\ y \mid x \Rightarrow x=y)$

$< \mathbf{N}, R >$ - ЧУМ $\qquad$ $< \mathbf{Z}, R >$ - не является ЧУМ

Элемент $a \in A$ частично упорядоченного множества $< A, \leq >$ называется **наибольшим элементом**, если $\forall x \in A \;\; x \leq a$

**Наименьший элемент ???**

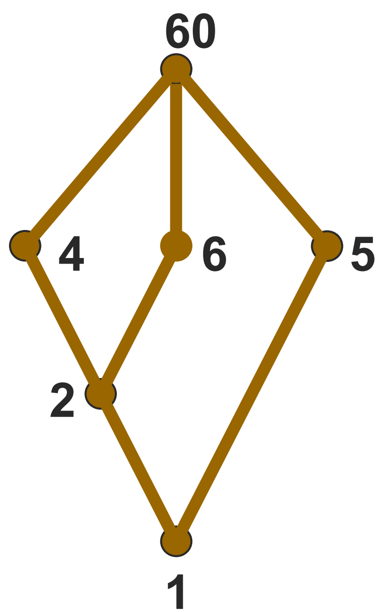
Элемент $a \in A$ частично упорядоченного множества $< A, \leq >$ называется **максимальным элементом**, если:
$\boldsymbol{\forall x \in A}$ (если **x** сравним с **a**, то $\boldsymbol{x \leq a}$)

**Минимальный элемент ???**

## Частично упорядоченное множество

$\forall x, y \in A \quad x\,R\,y \Leftrightarrow x \mid y$

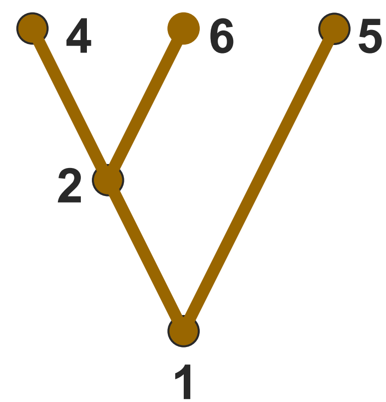
$A = \{1, 5, 60, 4, 6, 2\}$




60 – наибольший и максимальный

$< A, R >$ - ЧУМ

$A = \{1, 5, 4, 6, 2\}$




Нет наибольшего

4, 6, 5 - максимальные

# Отношение эквивалентности

**Отношение эквивалентности** – рефлексивное, симметричное и транзитивное бинарное отношение

$R3 = \{ (x,y)\in Z\times Z \mid x>y$ - не рефлексивно

$R1\}= \{ (x,y)\in Z\times Z \mid x\leq y$ - не симметрично

$R2\}= \{ (x,y)\in Z\times Z \mid (x-y)$ кратно $2 \}$

Рефлексивность: $\forall x\in Z$ ( (x-x) кратно 2 )

Симметричность – проверена (см. ранее)

Транзитивность:

$\forall x,y,z\in Z$ [ ((x-y) кратно 2) & ((y-z) кратно 2) $\Rightarrow$ ((x-y)+(y-z)) кратно 2 $\Rightarrow$ (x-z) кратно 2 ]

R3 - отношение эквивалентности

# УПРАЖНЕНИЕ

**Докажите:**

$\forall m \in Z \quad m>1$

$R = \{ (x,y) \in Z \times Z \mid (x-y)$ кратно $m \}$ – отношение эквивалентности

# Классы эквивалентности

Семейство $\{ X_k \mid k \in K, X_k \subseteq X \}$ образует **разбиение** множества X на классы $X_k$, если:

1) $\forall k \in K \quad X_k \neq \varnothing$

2) $\forall m,k \in K \ [\, m \neq k \Rightarrow X_m \cap X_k = \varnothing \,]$

3) $X = \bigcup\limits_{k \in K} X_k$

A = {1,2,3,4,5} можно разбить на классы:
$A_1 = \{3\}$, $A_2 = \{1,4\}$, $A_3 = \{2,5\}$

Всякому **разбиению** множества X на классы $X_k$ отвечает **бинарное отношение R**, задаваемое следующим образом:

$(x,y)\in R$ т.т.т., когда $\exists k\in K$ $(x\in X_k$ & $y\in X_k)$

**Упражнение:** Покажите, что R – отношение эквивалентности

Любые два элемента одного класса эквивалентны между собой

Никакие два элемента разных классов не эквивалентны между собой

# Классы эквивалентности

Пусть **~** – отношение эквивалентности, заданное на X, и **a**$\in$X

**Класс $K_a$ эквивалентности ~**

с порождающим элементом **a**:

$K_a = \{ x \in X \mid x \sim a \}$

$\{ (x,y) \in Z \times Z \mid (x-y)$ кратно $2 \}$ -

отношение эквивалентности **~**

$K_0 = \{ x \in Z \mid x \sim 0 \} = \{ x \in Z \mid (x-0)$ кратно $2 \} = 2Z$

$K_1 = \{ x \in Z \mid x \sim 1 \} = \{ x \in Z \mid (x-1)$ кратно $2 \} = 2Z+1$

# Свойства классов эквивалентности

Пусть ~ – отношение эквивалентности, заданное на X

**1) Любой класс $K_a$ не пуст**

$a \sim a$ (рефлексивность), т.е. $a \in K_a$

**2) Если $x \in K_a$ и $y \in K_a$, то $x \sim y$**

$x \in K_a$ и $y \in K_a$, т.е. $x \sim a$ и $y \sim a$

По симметричности: $y \sim a \Rightarrow a \sim y$

По транзитивности: $x \sim a \;\&\; a \sim y \Rightarrow x \sim y$

**3) Если $a \sim b$, то $K_a = K_b$**

Пусть $x \in K_a$, тогда $x \sim a$

Но по условию $a \sim b$ $\xrightarrow{\text{транзитивность}}$ $x \sim b \Rightarrow x \in K_b$

$\Rightarrow K_a \subseteq K_b$

Аналогично: $K_b \subseteq K_a$

Итак, $K_a = K_b$

## Свойства классов эквивалентности

Пусть ~ – отношение эквивалентности, заданное на X

**4) Элементы из разных классов не эквивалентны друг другу**

Пусть $K_a \neq K_b$

Пусть $x \in K_a \Rightarrow x \sim a \Rightarrow K_x = K_a$

Пусть $y \in K_b \Rightarrow y \sim b \Rightarrow K_y = K_b$

Если $x \sim y$, то $K_x = K_y$

$\Longrightarrow K_a = K_b$

**ПРОТИВОРЕЧИЕ**

**5) Различные классы не пересекаются**

Пусть $K_a \neq K_b$. Пусть $K_a \cap K_b \neq \varnothing$, т.е. $\exists x \in K_a \cap K_b$.

, Тогда $x \in K_a$ и $x \in K_b \Rightarrow K_x = K_a$ и $K_x = K_b$

$\Rightarrow K_a = K_b$ **ПРОТИВОРЕЧИЕ**

# ТЕОРЕМА

Всякое отношение эквивалентности, заданное на множестве X, определяет разбиение множества X на классы эквивалентности

**Доказательство:** Пусть **~** – отношение эквивалентности на X

$\{ X_k \mid k \in K, X_k \subseteq X \}$ – множество классов эквивалентности по отношению **~**

1) По свойству 1: $\forall k \in K \quad X_k \neq \varnothing$

2) По свойству 5: $\forall m,k \in K \ [\, m \neq k \Rightarrow X_m \cap X_k = \varnothing \,]$

# Доказательство ТЕОРЕМЫ

продолжение

3) $\forall k \in K \quad X_k \subseteq X$, т.е. $\bigcup\limits_{k \in K} X_k \subseteq X$

$\forall a \in X \quad \exists k \in K \ (a \in X_k) \quad \Rightarrow \quad a \in \bigcup\limits_{k \in K} X_k \quad \Rightarrow \quad X \subseteq \bigcup\limits_{k \in K} X_k$

Итак, $X = \bigcup\limits_{k \in K} X_k$

Следовательно, $\{ X_k \mid k \in K, X_k \subseteq X \}$ образует **разбиение** множества X на классы $X_k$

**Теорема доказана**

# Фактор-множество

**Фактор-множеством** множества X по отношению эквивалентности R называется множество, каждый элемент которого является одним из классов эквивалентности

**Обозначение:** **$X / R$**

Пример 1: $R = \{ (x,y) \mid (x-y) \text{ кратно } 2 \}$ на $Z$

$K_0 = 2Z \qquad K_1 = 2Z+1$

$X / R = \{ 2Z, 2Z+1 \}$

<u>Пример 2:</u> $X = \{ (p,q) \mid p,q \in Z,\ q \neq 0 \}$

На X определим отношение эквивалентности R:

$(p,q)\ R\ (m,n)$ т.т.т. $p \cdot n - q \cdot m = 0$

Это равенство дробей: $\frac{p}{q} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow p \cdot n = q \cdot m$

Рациональное число – класс эквивалентности (все равные дроби с точностью до сократимости)

**X / R** можно рассматривать как множество рациональных чисел