

A decorative graphic consisting of a thin gold circle on the left side. A thick, light olive-green horizontal bar with a gradient from left to right is positioned across the middle. A large black left square bracket is on the left side of the bar, and a large gold right square bracket is on the right side. The text "БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ" is centered on the bar in a bold, gold, sans-serif font.

БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Вводный курс математики

Бинарные отношения

в Z : $8 > 5$ – истинно; $5 > 10$ – ложно

На множестве точек плоскости:

Можно сказать, какая из точек плоскости наиболее удалена от данной прямой этой плоскости

Различные пары элементов некоторого множества связаны отношением (двуместным или бинарным)

На множестве X определено **бинарное отношение**, если задано подмножество R декартова произведения $X \times X$

$$R \subseteq X \times X$$

Бинарное отношение – соответствие из X в X

Если $(x, y) \in R$, то “ x и y связаны отношением R ”

$$x R y$$

$$R(x, y)$$

Способы задания бинарного отношения

1. Перечисление элементов:

$$R = \{(1,1), (2,2), (6,6), (1,2), (1,6), (2,6)\}$$

определено на множестве $X = \{1, 2, 6\}$

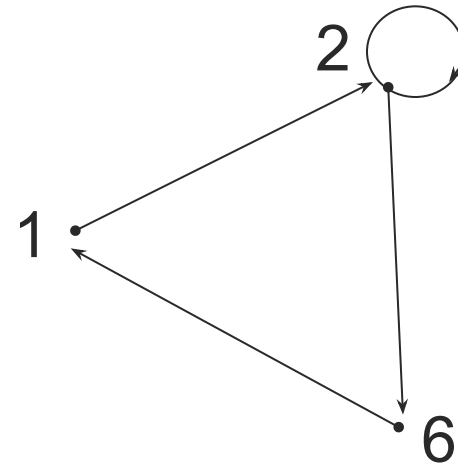
2. Бинарное отношение - область истинности некоторого двухместного предиката

$R = \{P\}$ - область истинности $P(x,y)$: "x делит y"

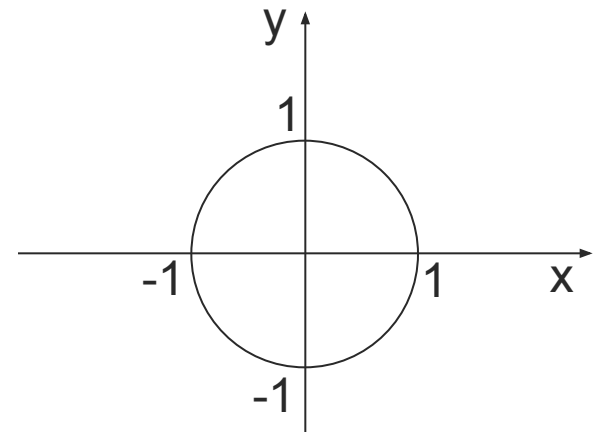
3. Характеристическое свойство:

$$R = \{ (x,y) \in Z \times Z \mid x > 3y \}$$

4. Граф отношения
(рисунок, диаграмма):
 R определено на
множестве $X=\{1,2,6\}$



5. На множестве
действительных чисел
бинарное отношение
может быть изображено
точками плоскости



6. Матричный способ: $X=\{1,2,6\}$

R	1	2	6
1	1	0	1
2	1	1	0
6	0	0	1

Если $(a,b) \in R$, то на пересечении строки с номером a и столбца с номером b ставится **1**

Свойства бинарного отношения

R - бинарное отношение, определенное на множестве X

1. R **рефлексивно**, если $\forall x \in X (x, x)$

$$\in R \quad R1 = \{ (x, y) \in Z \times Z \mid x \leq y \}$$
$$\forall x \in Z \quad x \leq x$$

2. R **симметрично**, если

$$\forall x, y \in X \quad [(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R]$$

$$R2 = \{ (x, y) \in Z \times Z \mid (x - y) \text{ кратно } 2$$

$$\forall x, y \in Z \quad [(x - y) \text{ кратно } 2 \Rightarrow (y - x) \text{ кратно } 2]$$

R - бинарное отношение, определенное на множестве X

3. R **транзитивно**, если

$$\forall x, y, z \in X \ [(x, y) \in R \ \& \ (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R]$$

Для $R1$:

$$R1 = \{ (x, y) \in Z \times Z \mid x \leq y \}$$

$$\forall x, y, z \in Z \ [x \leq y \ \& \ y \leq z \Rightarrow x \leq z]$$

4. R **антирефлексивно**, если $\forall x \in X \ (x, x) \notin R$

$$R3 = \{ (x, y) \in Z \times Z \mid x > y \}$$

$$\forall x \in Z \ \neg (x > x), \text{ т.е. } x \leq x$$

R - бинарное отношение, определенное на множестве X

5. R **антисимметрично**, если

$$\forall x, y \in X [(x, y) \in R \ \& \ (y, x) \in R \Rightarrow x = y]$$

Для R_1 :

$$R_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \leq y \}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} [x \leq y \ \& \ y \leq x \Rightarrow x = y]$$

6. R **линейно**, если

$$\forall x, y \in X [(x, y) \in R \ \vee \ (y, x) \in R \ \vee \ x = y]$$

Для R_1 :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} [x \leq y \ \vee \ y \leq x \ \vee \ x = y]$$

Отношение порядка

Отношение частичного порядка –
рефлексивное, транзитивное и
антисимметричное бинарное отношение

$$R1 = \{ (x,y) \in Z \times Z \mid x \leq y \}$$

Отношение строгого порядка –
антирефлексивное, транзитивное,
антисимметричное и линейное
бинарное отношение

$$R3 = \{ (x,y) \in Z \times Z \mid x > y \}$$

Частично упорядоченное множество

$A \neq \emptyset$ $\langle A, \leq \rangle$ – ЧУМ

Частично упорядоченное множество –
множество, на котором задано отношение
частичного порядка

1) $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ – ЧУМ 2) $\langle P(A), \subseteq \rangle$ – ЧУМ

3) На \mathbf{N} определим R : $x R y \Leftrightarrow x \mid y$

Рефлексивность: $\forall x \in \mathbf{N} (x \mid x)$

Транзитивность: $\forall x, y, z \in \mathbf{N} (x \mid y \ \& \ y \mid z \Rightarrow x \mid z)$

Антисимметричность: $\forall x, y \in \mathbf{N} (x \mid y \ \& \ y \mid x \Rightarrow$

$x=y)$
 $\langle \mathbf{N}, R \rangle$ - ЧУМ

$\langle \mathbf{Z}, R \rangle$ - не является ЧУМ

Элемент $a \in A$ частично упорядоченного множества $\langle A, \leq \rangle$ называется **наибольшим элементом**, если $\forall x \in A \ x \leq a$

Наименьший элемент ???

Элемент $a \in A$ частично упорядоченного множества $\langle A, \leq \rangle$ называется

максимальным элементом, если:

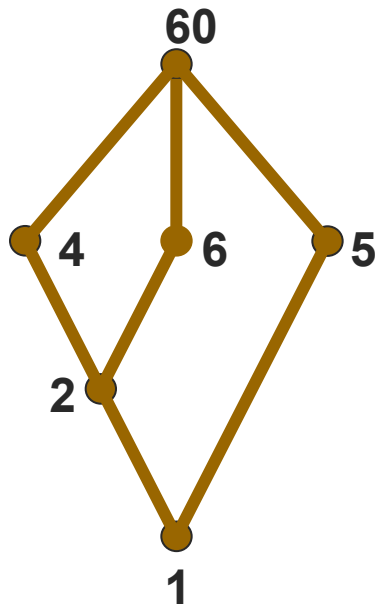
$\forall x \in A$ (если x сравним с a , то $x \leq a$)

Минимальный элемент ???

Частично упорядоченное множество

$$\forall x, y \in A \quad x R y \Leftrightarrow x | y$$

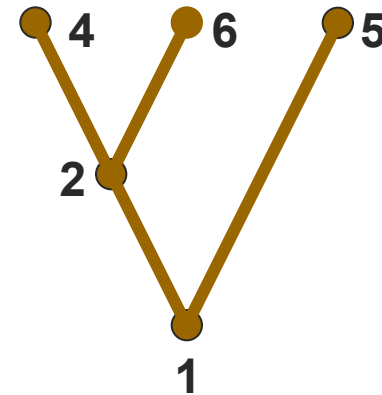
$$A = \{1, 5, 60, 4, 6, 2\}$$



60 – наибольший и
максимальный

$$\langle A, R \rangle - \text{ЧУМ}$$

$$A = \{1, 5, 4, 6, 2\}$$



Нет наибольшего
4, 6, 5 - максимальные

Отношение эквивалентности

Отношение эквивалентности – рефлексивное, симметричное и транзитивное бинарное отношение

$R3 = \{ (x,y) \in Z \times Z \mid x > y \}$ - не рефлексивно

$R1 = \{ (x,y) \in Z \times Z \mid x \leq y \}$ - не симметрично

$R2 = \{ (x,y) \in Z \times Z \mid (x-y) \text{ кратно } 2 \}$

Рефлексивность: $\forall x \in Z \ (x-x) \text{ кратно } 2$

Симметричность – проверена (см. ранее)

Транзитивность:

$\forall x,y,z \in Z \ [((x-y) \text{ кратно } 2) \ \& \ ((y-z) \text{ кратно } 2)$

$\Rightarrow ((x-y)+(y-z)) \text{ кратно } 2 \Rightarrow (x-z) \text{ кратно } 2]$

$R3$ - отношение эквивалентности

УПРАЖНЕНИЕ

Докажите:

$$\forall m \in \mathbb{Z} \quad m > 1$$

$R = \{ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid (x - y) \text{ кратно } m \}$ –
отношение эквивалентности

Классы эквивалентности

Семейство $\{ X_k \mid k \in K, X_k \subseteq X \}$ образует **разбиение** множества X на классы X_k , если:

- 1) $\forall k \in K \quad X_k \neq \emptyset$
- 2) $\forall m, k \in K \quad [m \neq k \Rightarrow X_m \cap X_k = \emptyset]$
- 3) $X = \bigcup_{k \in K} X_k$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ можно разбить на классы:

$$A_1 = \{3\}, A_2 = \{1, 4\}, A_3 = \{2, 5\}$$

Всякому **разбиению** множества X на классы X_k отвечает **бинарное отношение** R , задаваемое следующим образом:

$(x, y) \in R$ т.т.т., когда $\exists k \in K (x \in X_k \ \& \ y \in X_k)$

Упражнение: Покажите, что R – отношение эквивалентности

Любые два элемента одного класса эквивалентны между собой

Никакие два элемента разных классов не эквивалентны между собой

Пусть \sim – отношение эквивалентности,
заданное на X , и $a \in X$

Класс K_a эквивалентности \sim

с порождающим элементом a :

$$K_a = \{ x \in X \mid x \sim a \}$$

$$\{ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid (x - y) \text{ кратно } 2 \} -$$

отношение эквивалентности \sim

$$K_0 = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x \sim 0 \} = \{ x \in \mathbb{Z} \mid (x - 0) \text{ кратно } 2 \} = 2\mathbb{Z}$$

$$K_1 = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x \sim 1 \} = \{ x \in \mathbb{Z} \mid (x - 1) \text{ кратно } 2 \} = 2\mathbb{Z} + 1$$

Свойства классов эквивалентности

Пусть \sim – отношение эквивалентности, заданное на X

1) Любой класс K_a не пуст

$a \sim a$ (рефлексивность), т.е. $a \in K_a$

2) Если $x \in K_a$ и $y \in K_a$, то $x \sim y$

$x \in K_a$ и $y \in K_a$, т.е. $x \sim a$ и $y \sim a$

По симметричности: $y \sim a \Rightarrow a \sim y$

По транзитивности: $x \sim a \ \& \ a \sim y \Rightarrow x \sim y$

3) Если $a \sim b$, то $K_a = K_b$

Пусть $x \in K_a$, тогда $x \sim a$

Но по условию $a \sim b$

$\Rightarrow K_a \subseteq$

K_b

транзитивность

$\xrightarrow{\hspace{2cm}}$ $x \sim b \Rightarrow$

Аналогично: $K_b \subseteq x \in K_b$

Итак, $K_a = K_b$

Пусть \sim – отношение эквивалентности, заданное на X

4) Элементы из разных классов не эквивалентны друг другу

Пусть $K_a \neq K_b$

Пусть $x \in K_a \Rightarrow x \sim a \Rightarrow K_x = K_a$

Пусть $y \in K_b \Rightarrow y \sim b \Rightarrow K_y = K_b$

Если $x \sim y$, то $K_x = K_y$



ПРОТИВОРЕЧИЕ

5) Различные классы не пересекаются

Пусть $K_a \neq K_b$. Пусть $K_a \cap K_b \neq \emptyset$, т.е.

, Тогда $x \in K_a$ и $x \in K_b \Rightarrow \exists x \in K_a \cap K_b$ и $K_x = K_b$

$\Rightarrow K_a = K_b$ **ПРОТИВОРЕЧИЕ**

ТЕОРЕМА

Всякое отношение эквивалентности, заданное на множестве X , определяет разбиение множества X на классы эквивалентности

Доказательство: Пусть \sim – отношение эквивалентности на X

$\{ X_k \mid k \in K, X_k \subseteq X \}$ – множество классов эквивалентности по отношению \sim

1) По свойству 1: $\forall k \in K \quad X_k \neq \emptyset$

2) По свойству 5: $\forall m, k \in K \quad [m \neq k \Rightarrow X_m \cap X_k = \emptyset]$

Доказательство ТЕОРЕМЫ

продолжение

$$3) \quad \forall k \in K \quad X_k \subseteq X, \text{ т.е. } \bigcup_{k \in K} X_k \subseteq X$$

$$\forall a \in X \quad \exists k \in K \quad (a \in X_k) \quad \Rightarrow \quad a \in \bigcup_{k \in K} X_k \quad \Rightarrow \quad X \subseteq \bigcup_{k \in K} X_k$$

$$\text{Итак, } X = \bigcup_{k \in K} X_k$$

Следовательно, $\{ X_k \mid k \in K, X_k \subseteq X \}$
образует **разбиение** множества X на
классы X_k

Теорема доказана

Фактор-множество

Фактор-множеством множества X по отношению эквивалентности R называется множество, каждый элемент которого является одним из классов эквивалентности

Обозначение: X / R

Пример 1: $R = \{ (x, y) \mid (x - y) \text{ кратно } 2 \}$ на Z

$$K_0 = 2Z \quad K_1 = 2Z + 1$$

$$X / R = \{ 2Z, 2Z + 1 \}$$

Пример 2: $X = \{ (p, q) \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \}$

На X определим отношение эквивалентности R :

$$(p, q) R (m, n) \text{ т.т.т. } p \cdot n - q \cdot m = 0$$

Это равенство дробей: $\frac{p}{q} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow p \cdot n = q \cdot m$

Рациональное число – класс эквивалентности
(все равные дроби с точностью до
сократимости)

X / R можно рассматривать как множество
рациональных чисел