Лекция 14 Понятие о комплексных числах. Рациональные функции одной переменной

Литература.

В.Г. Зубков, В.А.Ляховский, А.И.Мартыненко, В.Б.Миносцев. Курс математики для технических высших учебных заведений Учебное пособие часть I Под редакцией В.Б.Миносцева и Е.А. Пушкаря. 2012г. Лекции 33, 34.

Понятие о комплексных числах. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная форма комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Сложение, умножение, деление и возведение в степень комплексных чисел, извлечение корня из комплексного числа.

Некоторые сведения о многочленах. Разложение многочлена на множители. Разложение рациональных дробей на простейшие.

33.1. Понятие о комплексных числах. Алгебраическая форма комплексного числа

Определение 33.1. *Комплексным числом z называется упорядоченная пара действительных чисел $(x; y)$, x называется действительной частью комплексного числа $x = Re\ z$, y – мнимой частью, $y = Im\ z$:*

$$z = (x; y) \tag{33.1}$$

Действительная единица $1 = (1; 0)$, мнимая обозначается $i = (0; 1)$. Таким образом, множество действительных чисел $x = (x; 0)$ и множество чисто мнимых чисел $iy = (0; y)$ являются подмножествами комплексных чисел. Для мнимой единицы i справедливо равенство:

$$i^2 = -1. \tag{33.2}$$

Определение 33.2. *Выражение $z = x + iy$ называется алгебраической формой комплексного числа.*

$$z = x + iy. \tag{33.3}$$

Рассмотрим свойства комплексных чисел и алгебраические действия с комплексными числами, заданными в алгебраической форме. Для двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ справедливо:

- *Комплексные числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны, если равны их действительные и мнимые части.*

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2. \tag{33.4}$$

- *При сложении (вычитании) комплексных чисел отдельно складываются (вычитаются) действительные и мнимые части.*
$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2). \qquad (33.5)$$

- *Умножение комплексных чисел проводится как умножение многочленов с учётом (33.2)*
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1). \qquad (33.6)$$

- *Комплексное число $\overline{z} = x - iy$ называется сопряженным комплексному числу $z = x + iy$ и их произведение согласно (33.6), равно*
$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2. \qquad (33.7)$$

Таким образом, сумма квадратов двух действительных чисел раскладывается на произведение сопряженных комплексных чисел.

- *Частное от деления комплексных чисел $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ ищется по следующей схеме: числитель и знаменатель дроби $\dfrac{z_1}{z_2}$ умножается на число $\overline{z_2}$, сопряжённое знаменателю, а затем выделяются действительная и мнимая части*
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \qquad (33.8)$$

Пример 33.1. *Сложить, вычесть, умножить и поделить два комплексных числа* $z_1 = 2 + 3i$ *и* $z_2 = 3 - 2i$.

Решение: По формуле (33.5):

$$z_1 + z_2 = 5 + i, \quad z_1 - z_2 = -1 + 5i,$$

по формуле (33.6):

$$z_1 z_2 = 6 + 6 + i(9 - 4) = 12 + 5i,$$

по формуле (33.8):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 3i}{3 - 2i} = \frac{(2 + 3i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \frac{6 - 6 + i(9 + 4)}{9 + 4} = i.$$

Как известно, квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ при дискриминанте $D = \frac{p^2}{4} - q < 0$ не имеет действительных корней. Уравнение

$$z^2 + pz + q = 0 \tag{33.9}$$

имеет при $\frac{p^2}{4} - q < 0$ два комплексных сопряженных корня

$$z_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \tag{33.10}$$

где $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$.

Таким образом, в комплексной области квадратный трёхчлен $z^2 + pz + q$ раскладывается на множители при отрицательном дискриминанте

$$z^2 + pz + q = (z - z_1)(z - z_2) = ((z - \alpha) - \beta i)((z - \alpha) + \beta i). \quad (33.11)$$

Пример 33.2. *Найти корни уравнения $z^2 + 8z + 25 = 0$ и разложить квадратный трёхчлен на множители.*

Р е ш е н и е: По формуле (33.10) находим:
$z_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16 - 25} = -4 \pm 3i$ и $z^2 + 8z + 25 = ((z+4) - 3i)((z+4) + 3i)$.

33.2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Будем откладывать действительную часть $Re\ z = x$ комплексного числа z на оси Ox, а мнимую $Im\ z = y$ на оси Oy декартовой системы координат Oxy (рис. 169).

Тогда каждому комплексному числу $z = x + iy$ будет соответствовать одна точка плоскости Oxy и наоборот каждой точке плоскости Oxy – одно комплексное число z. Поэтому вместо комплексного числа z можно говорить о точке z комплексной плоскости. Назовем эту плоскость комплексной плоскостью и будем обозначать её символом $\boxed{z}$.

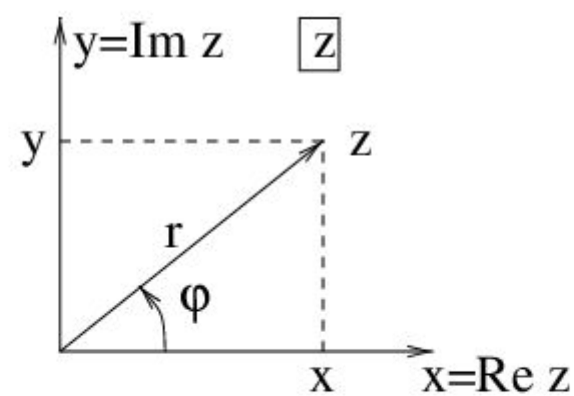

Рис. 169.
Комплексная плоскость

Замечание 33.1. *Отметим, что бесконечность считается одной точкой и обозначается* $z = \infty$. *При изображении комплексных чисел на комплексной плоскости* $\boxed{z}$ *это тяжело себе представить. Однако, если воспользоваться сферой для изображения комплексных чисел (рис. 170), расположив её так, чтобы она касалась плоскости* $\boxed{z}$ *в начале декартовой системы координат* O *и каждой точке* z *(комплексному числу* z*) поставить в соответствие точку* z *на сфере, являющуюся точкой пересечения прямой соединяющей точку* z *на плоскости* $\boxed{z}$ *и точку* N *диаметрально противоположную* O*, то бесконечности на плоскости* $\boxed{z}$ *будет соответствовать одна точка* N *на этой сфере.*

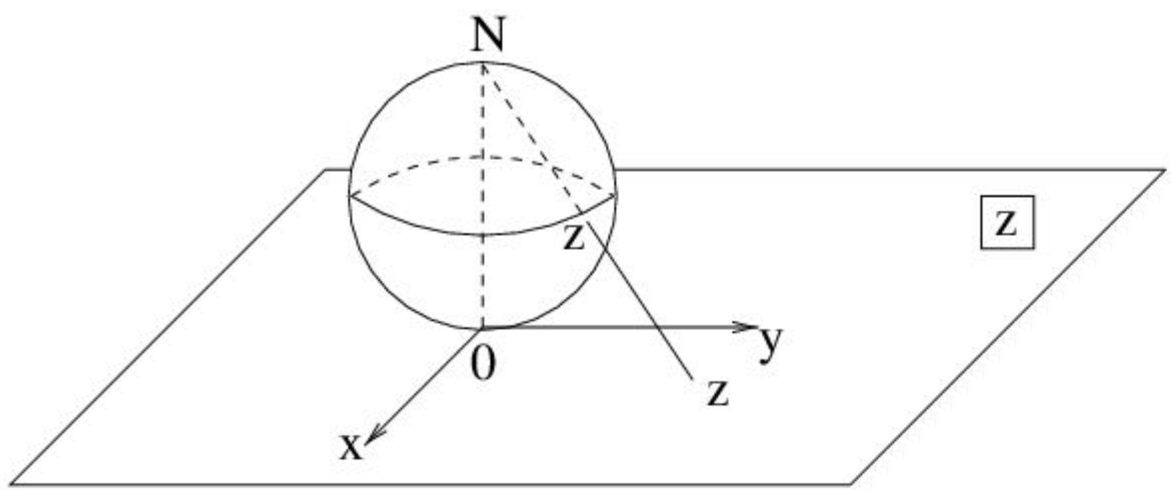

Рис. 170. *Сфера комплексных чисел*

33.3. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая и показательная форма комплексных чисел

Определение 33.3. *Модулем комплексного числа $|z|$ называется квадратный корень из суммы квадратов его действительной и мнимой частей:*

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{33.12}$$

Геометрически модуль комплексного числа равен длине радиуса-вектора $\vec{r}$ точки z.

Определение 33.4. *Аргументом комплексного числа z называется угол между радиус-вектором $\vec{r}$ точки z и осью Ox (рис. 169)*

$$\varphi^o = \arg\, z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} \quad \text{при} \quad x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} \quad \text{при} \quad x < 0, \\ \dfrac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad y > 0, x = 0, \\ -\dfrac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad y < 0, x = 0. \end{cases} \tag{33.13}$$

Пример 33.3. *Определить модуль и аргумент комплексных чисел* $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_3 = -1 - i\sqrt{3}$ *и* $z_4 = 1 - i\sqrt{3}$ *и изобразить их на комплексной плоскости.*

Решение:

Для z_1 и z_3 отношение $\dfrac{y}{x}$ одинаково, однако точка z_1 расположена в I-ом квадранте и $\varphi_1^o = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{1} = \dfrac{\pi}{3}$, точка z_3 расположена в III-ем квадранте и $\varphi_3^o = \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{-\sqrt{3}}{-1} = \dfrac{4}{3}\pi$. для чисел z_2 и z_4 расположены соответственно во II-ом и IV-ом квадрантах и аргументы $\varphi_2^o = \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{-1} = \dfrac{2\pi}{3}$, $\varphi_4^o = \operatorname{arctg}\dfrac{-\sqrt{3}}{1} = -\dfrac{\pi}{3}$.

Модуль всех четырёх комплексных чисел $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+3} = 2$.
Следовательно, все эти числа расположены на окружности радиуса $r = 2$ с найденными значениями аргументов (рис. 171).

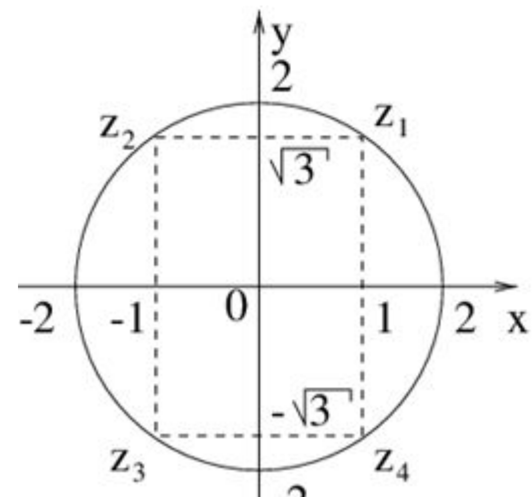

Рис. 171.

Все точки комплексной плоскости $\boxed{z}$ с модулем, равным R, удовлетворяют уравнению

$$|z| = R, \qquad (33.14)$$

которое таким образом является уравнением окружности радиуса R с центром в начале координат.

Множество комплексных точек, расположенных внутри этой окружности определяется неравенством

$$|z| < R, \qquad (33.15)$$

вне её

$$|z| > R. \qquad (33.16)$$

Очевидно, что если центр этой окружности сместить в точку z_0 (рис. 172), её уравнение будет

$$|z - z_0| = R \qquad (33.17)$$

Множество всех точек, лежащих внутри этой окружности удовлетворяет неравенству

$$|z - z_0| < R, \qquad (33.18)$$

вне её

$$|z - z_0| > R. \qquad (33.19)$$

Области, определяемые неравенствами (33.15) и (33.18), заштрихованы на рис. 172.

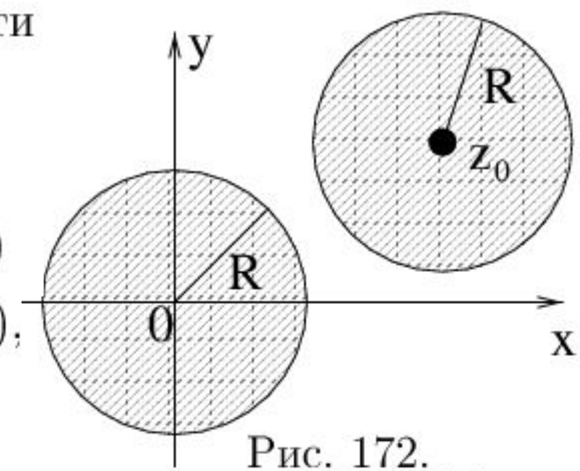

Рис. 172.
Множество точек $|z| < R$ *и* $|z - z_0| < R$.

Значения аргумента z, определяемое формулой (33.13) принято называть главным, что мы отмечаем верхним индексом «о» и прописной буквой а. Очевидно, что комплексное число z не изменится, если его аргумент изменить на $2\pi k$, $k \in Z$. Таким образом более общее значение аргумента $\varphi = \text{Arg } z$ определяется формулой

$$\varphi = \text{Arg } z = \arg z + 2\pi k = \varphi^o + 2\pi k, \ k \in Z, \qquad (33.20)$$

которая при $k = 0$ определяет главное значение аргумента (33.13).

Из рис. 169 видно, что

$$x = r\cos\varphi, \ y = r\sin\varphi \qquad (33.21)$$

и, следовательно, комплексное число может быть определено через r и φ по формуле

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad (33.22)$$

следующей из (33.3) с учётом (33.21).

Определение 33.5. *Выражение (33.22) называется тригонометрической формой комплексного числа.*

Можно показать, что между показательной и тригонометрической функциями имеется связь, устанавливаемая формулой Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \qquad (33.23)$$

Определение 33.6. *Выражение*

$$z = r e^{i\varphi}, \qquad (33.24)$$

следующее из (33.22) с учётом (33.23) называется показательной формой комплексного числа.

Формулы (33.1), (33.3), (33.22) и (33.24) являются различной записью комплексного числа z, и переход от одной из них к другой не представляет сложности.

Пример 33.4. *Представить в тригонометрической и показательной формах следующие комплексные числа z, заданные в алгебраической форме: 1) $z_1 = 3$; 2) $z_2 = -3$; 3) $z_3 = 3i$; 4) $z_4 = -3i$ и 5) $z_5 = 3 - i\sqrt{3}$.*

Р е ш е н и е: 1) Главное значение аргумента для любого положительного действительного числа $\varphi^\circ = 0$ и, следовательно, по формулам (33.22), (33.24) с учётом (33.12) и (33.20) $z_1 = 3 = 3(\cos 2\pi k + i\sin 2\pi k) = 3e^{i2\pi k}$.

2) Для любого отрицательного действительного числа $\varphi^o = \pi$ и, следовательно,

$$z_2 = -3 = 3(\cos(2k+1)\pi + i\sin(2k+1)\pi) = 3e^{i(2k+1)\pi}.$$

3) Для любого чисто мнимого числа $x = 0$ и при $y > 0 \rightarrow \varphi^o = \dfrac{\pi}{2}$ и, следовательно,

$$z_3 = 3i = 3(\cos\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi + i\sin\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi) = 3^{i(2k+1/2)\pi}.$$

4) При $y < 0 \rightarrow \varphi^o = -\dfrac{\pi}{2}$

и

$$z_4 = -3i = 3\left(\cos\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi + i\sin\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi\right) = 3^{i(2k-\frac{1}{2})\pi}.$$

5) Для $z_5 = 3 - i\sqrt{3}$ главное значение аргумента $\varphi^o = \operatorname{arctg}\dfrac{-\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}$

и, следовательно,

$$z_5 = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(2k - \frac{1}{6}\right)\pi + i\sin\left(2k - \frac{1}{6}\right)\pi\right) = 2\sqrt{3}e^{\left(2k-\frac{1}{6}\right)\pi}.$$

Наиболее удобно использование показательной и тригонометрической форм комплексных чисел при умножении, делении, возведении в степень и извлечении корней.

Пусть $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, тогда

$$z = re^{i\varphi} = z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \tag{33.25}$$

$$z = re^{i\varphi} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \tag{33.26}$$

и, следовательно, при *умножении комплексных чисел их модули перемножаются* $r = r_1 r_2$, *а аргументы складываются* $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, *при делении – модули делятся* $r = \dfrac{r_1}{r_2}$, *а аргументы вычитаются* $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.

Очевидно, при возведении в степень комплексного числа $z = re^{i\varphi}$ имеем

$$z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}. \tag{33.27}$$

В тригонометрической форме формула (33.27) носит название *формулы Муавра*

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{33.28}$$

Поскольку $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, а следовательно, согласно (33.24) и $e^{i\varphi}$ являются периодическими функциями с периодом 2π, в формулах (33.21)–(33.26), а при целом n и в формулах (33.27), (33.28) φ следует брать равным своему главному значению $\varphi^o = \arg z$.

Формулы (33.27) и (33.28) справедливы и при дробном n, но при этом в этих формулах необходимо учитывать многозначность аргумента комплексного числа и в соответствии с формулой (33.20) положить $\varphi = \mathrm{Arg}\ z = \arg\ z + 2\pi k$. В частности, при извлечении корня n-ой степени и комплексного числа $z = re^{i\varphi}$ получаем

$$\sqrt[n]{z} = r^{1/n} e^{i\dfrac{\varphi^o + 2\pi k}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi^o + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi^o + 2\pi k}{n}\right). \quad (33.29)$$

Придавая k последовательно значения $0, 1, 2, ..., n-1$, получим *n различных значений $\sqrt[n]{z}$ с одинаковым модулем, но различными аргументами. На комплексной плоскости $\boxed{z}$ все эти значения расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$ в вершинах правильного n-угольника, вписанного в эту окружность.* Если k принимает значения больше $n-1$, то эти точки повторяются.
Из сказанного очевидно, что уравнение n-ой степени

$$z^n - a = 0, \qquad (33.30)$$

где $a = re^{i\varphi}$ – комплексное число, имеет n корней $z = \sqrt[n]{a}$, определяемых по формуле (33.29).

Пример 33.5. *Возвести в 6-ую степень и извлечь корень 6-ой степени из комплексного числа* $z = 3 - i\sqrt{3}$.

Р е ш е н и е: Модуль и главное значение аргумента числа $z = 3 - i\sqrt{3}$ мы нашли в примере 33.4. Они равны соответственно $2\sqrt{3}$ и $-\dfrac{\pi}{6}$. Следовательно, по формуле (33.27)

$$(3 - i\sqrt{3})^6 = (2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}})^6 =$$
$$= 2^6 3^3 e^{i11\pi} = 1728(\cos\pi - i\sin\pi) = 1728(-1 - i0) = -1728,$$

а по формуле (33.29)

$$\sqrt[6]{3 - i\sqrt{3}} = \left(2\sqrt{3}e^{-i(\frac{\pi}{6}+2\pi k)}\right)^{1/6} = \sqrt[6]{2}\,\sqrt[12]{3}e^{i\frac{(-1+12k)\pi}{36}}.$$

Придавая k значения 0,1,...,5 получим 6 разных значений $\sqrt[6]{3 - i\sqrt{3}}$:

$$z_1 = (\sqrt[6]{3 - i\sqrt{3}})_1 = \sqrt[12]{12}e^{-i\frac{\pi}{36}}, \quad z_2 = (\sqrt[6]{3 - i\sqrt{3}})_2 = \sqrt[12]{12}e^{i\frac{11}{36}\pi},$$
$$z_3 = (\sqrt[6]{3 - i\sqrt{3}})_3 = \sqrt[12]{12}e^{i\frac{23}{36}\pi}, \quad z_4 = (\sqrt[6]{3 - i\sqrt{3}})_4 = \sqrt[12]{12}e^{i\frac{35}{36}\pi},$$
$$z_5 = (\sqrt[6]{3 - i\sqrt{3}})_5 = \sqrt[12]{12}e^{i\frac{47}{36}\pi}, \quad z_6 = (\sqrt[6]{3 - i\sqrt{3}})_6 = \sqrt[12]{12}e^{i\frac{59}{36}\pi}.$$

Все эти значения на комплексной плоскости $\boxed{z}$ расположены в вершинах правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[12]{12}$ (рис. 173).

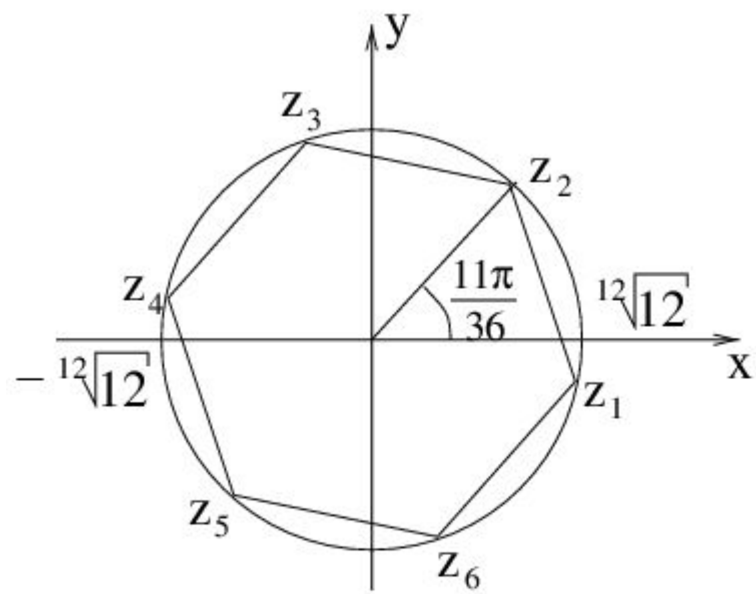

Рис. 173. *К примеру 33.5*

Пример 33.6. *Найти все корни уравнения* $z^4+1=0$.

Р е ш е н и е: $z^4+1=0 \;\to\; z^4=-1 \;\to\; z=\sqrt[4]{-1}$.
Поскольку для любого отрицательного действительного числа

$$\arg z=\pi, \quad -1=1e^{i(\pi+2\pi k)}$$

и, следовательно,

$$z=e^{i\frac{\pi+2\pi k}{4}}.$$

Находим четыре корня, положив k равным 0,1,2,3:

$$z_1=e^{i\frac{\pi}{4}}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),$$

$$z_2=e^{i\frac{3\pi}{4}}=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i),$$

$$z_3=e^{i\frac{5\pi}{4}}=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i),$$

$$z_4=e^{i\frac{7\pi}{4}}=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

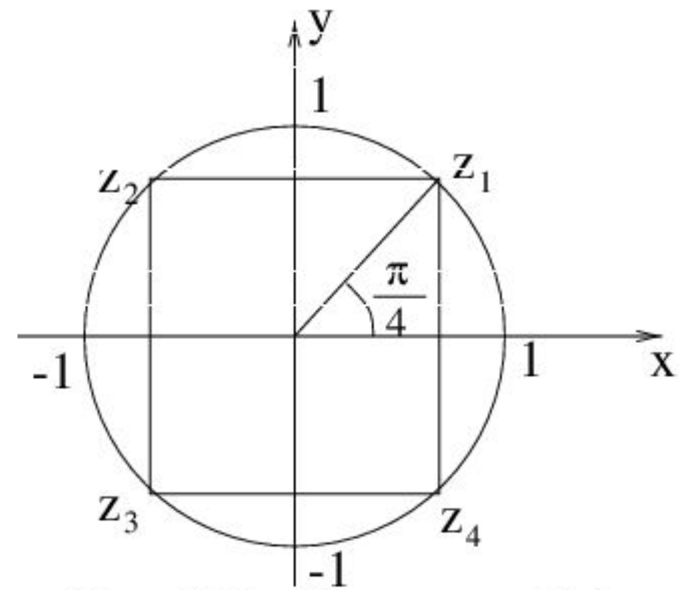

Рис. 174. *К примеру 33.6*

На плоскости $\boxed{z}$ эти корни расположены в вершинах квадрата, вписанного в окружность единичного радиуса (рис. 174).

Пример 33.7. *Определить расположение всех корней уравнения $z^5 - 32 = 0$ на плоскости* $\boxed{z}$.

Р е ш е н и е:

Поскольку $z^5 = 32 = 2^5$, один из корней легко находится, и он равен $z_1 = 2$. Остальные четыре корня расположены в вершинах правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиуса 2 (рис. 175).

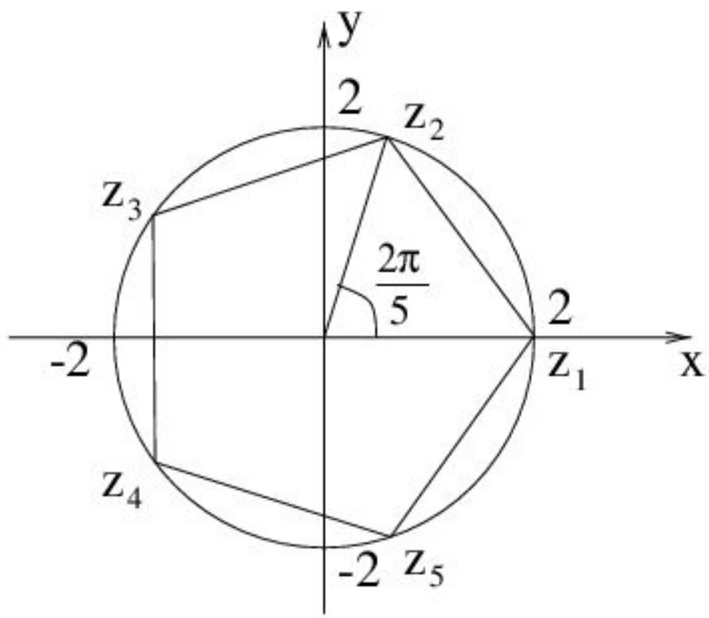

Рис. 175. *К примеру 33.7*

Интересно отметить, что из формулы Муавра (33.28) можно получить тригонометрические формулы, выражающие $\sin nx$ и $\cos nx$ через $\sin x$ и $\cos x$.

4. Найти $\sqrt[3]{1+i}$.

Решение. Тригонометрическая форма $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Для вычисления кубических корней из данного числа воспользуемся формулой $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{argz+2\pi k}{n}+i\sin\frac{argz+2\pi k}{n}\right), k=1,\dots,(n-1)$.

В нашем случае $n=3, k=0,1,2$.

Получим три различных значения корня:

$$\sqrt[3]{1+i}_k=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}\right), k=0,1,2.$$

$$z_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right),$$

$$z_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{12}+i\sin\frac{9\pi}{12}\right),$$

$$z_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right).$$

3. Вычислить $\left(-\sqrt{3}-i\right)^5$.

Решение. В предыдущей задаче мы нашли тригонометрическую форму числа $-\sqrt{3}-i$

$$-\sqrt{3}-i = 2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right).$$

Применим формулу Муавра

$$\left(-\sqrt{3}-i\right)^5 = 2^5\left(\cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{25\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 32\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 32\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right) = 16\sqrt{3}-16i.$$

34.1. Рациональные дроби. Выделение целой части и правильной дроби

Рациональной функцией или рациональной дробью, называется функция, равная частному от деления двух многочленов:

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}, \qquad (34.1)$$

где

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad (34.2)$$

$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \cdots + b_1 x + b_0 = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k. \quad (34.3)$$

Рациональная дробь называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя и неправильной – в противном случае.
Всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби.

Пример 34.1. *Представить в виде суммы многочлена и правильной дроби следующую неправильную дробь:*

$$R(x) = \frac{x^4 + 5x^3 - 6x + 5}{x^3 + 2x^2 - 1}.$$

Р е ш е н и е: Разделив числитель на знаменатель, получим в частном $x + 3$ и в остатке $-6x^2 - 5x + 8$, т.е.

$$R(x) = x + 3 + \frac{-6x^2 - 5x + 8}{x^3 + 2x^2 - 1}.$$

Остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на разность $x - a$ можно найти, не выполняя самого процесса деления на основании следующей теоремы.

Теорема 34.1. *(Теорема Безу). Остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на разность $x - a$ равен значению многочлена $P_n(x)$ при $x = a$.*

Пример 34.2. *Найти остаток от деления многочлена $P(x) = 3x^9 - 2x^5 + 3x^2 + 4x - 8$ на двучлен $x + 1$.*

Р е ш е н и е:
Здесь $a = -1$. Поэтому искомый остаток равен:

$$P(-1) = 3(-1)^9 - 2(-1)^5 + 3(-1)^2 + 4(-1) - 8 =$$
$$= -3 + 2 + 3 - 4 - 8 = -10.$$

34.2. Некоторые сведения о многочленах

Рассмотрим кратко некоторые сведения о многочленах, которые понадобятся нам в дальнейшем.

1. Корнем многочлена (34.2)

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

называется всякое число γ (действительное или комплексное), которое обращает многочлен в нуль, т.е. такое, что $P_n(\gamma) = 0$.

Пример 34.3. *Проверить, что* $\gamma = 1$ *является корнем многочлена* $x^3 + 5x^2 - 2x - 4$.

Р е ш е н и е: Действительно: $1^3 + 5 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0$.

2. Имеет место следующая теорема, принимаемая без доказательства:

Теорема 34.2. *Всякий многочлен степени n может быть представлен в виде произведения n множителей вида $x-\gamma$ и множителя при старшей степени x, т.е.*

$$P_n(x) = a_n(x-\gamma_1)(x-\gamma_2)...(x-\gamma_n). \qquad (34.4)$$

Числа $\gamma_1, \gamma_2 ... \gamma_n$ очевидно являются корнями многочлена.

Если в разложении 34.4 раскрыть скобки, то свободный член многочлена будет равен произведению корней многочлена $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdots \gamma_n$.

Отсюда вытекает следующее правило: *Если многочлен $P_n(x)$ имеет целые корни, то эти корни являются делителями свободного члена.*
Так как любое число имеет конечное множество целых делителей, то это правило позволяет решать алгебраические уравнения степени выше двух при условии, что хотя бы один корень – целое число.

Пример 34.4. *Решить уравнение*

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Р е ш е н и е:
Если у него есть целые корни, то только ± 1, ± 2, ± 3, ± 6. Подставив в уравнение, например, $x = 1$, получим тождество. Следовательно, на основании теоремы Безу многочлен $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ делится на разность $x - 1$ без остатка. Выполнив это деление, получим:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x^2 - 5x - 6).$$

Решив квадратное уравнение

$$x^2 - 5x - 6 = 0,$$

найдем корни: -3 и 2. Следовательно, корни данного уравнения:

$$x_1 = 1,\ x_2 = -3,\ x_3 = 2.$$

Пример 34.5. *Легко проверить, что* $5x^4 - 4x^3 + 115x^2 - 140x + 60 =$
$= 5(x - 1)(x - 2)(x - 2)(x - 3).$

Пример 34.6. *Многочлен* $x^3 + x = x(x - i)(x + i).$

3. Среди линейных множителей в (34.4) могут быть одинаковые. Объединяя их, можем записать разложение многочлена на множители в виде:

$$P_n(x) = a_n(x-a)^{k_1}(x-b)^{k_2}...(x-p)^{k_s}, \qquad (34.5)$$

где все корни $a, b...p$ различны, и сумма показателей степени равна n.
Корни $a, b...p$ называются кратными корнями многочлена, а именно a – корень кратности k_1, b – корень кратности k_2, p – корень кратности k_s.

4. Среди корней в разложении (34.4) могут быть комплексные $\alpha \pm \beta i$. В алгебре доказывается: если $\alpha + \beta i$ является корнем многочлена кратности k, то и сопряжённое число $\alpha - \beta i$ также является корнем этого же многочлена той же кратности.

5. Поэтому, если в разложении (34.5) есть множитель $(x-(\alpha+\beta i))^k$, то в этом разложении присутствует множитель $(x-(\alpha-\beta i))^k$.
Перемножив два множителя, соответствующие комплексным сопряженным корням, получим (см. 33.7):

$$(x-(\alpha+\beta i))^k(x-(\alpha-\beta i))^k = ((x-\alpha)-\beta i)^k((x-\alpha)+\beta i)^k =$$
$$= ((x-\alpha)^2+\beta^2)^2 = (x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^k = (x^2+px+q)^k,$$

где $p = -2\alpha, q = \alpha^2+\beta^2$.
Обратите внимание, что трёхчлен x^2+px+q, равный сумме двух квадратов, имеет отрицательный дискриминант.

6. Все вышесказанное позволяет сформулировать утверждение: всякий многочлен с действительными коэффициентами можно представить в следующем виде:

$$P_n(x) = a_n(x-a)^{k_1}(x-b)^{k_2}...(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}(x^2+p_2x+q_2)^{s_2}.... \quad (34.6)$$

В формуле (34.6) $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_s + 2(s_1 + s_2 + \cdots + s_m)$.
В нём линейные множители соответствуют действительным корням, а квадратные трёхчлены, имеющие по два корня – комплексным корням многочлена.

34.3. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие

Определение 34.1. *Дроби*

$$I.\ \frac{A}{x-a},$$

$$II.\ \frac{A}{(x-a)^n}\ (n=2,3,...),$$

$$III.\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\ (D=p^2-4q<0),$$

$$IV.\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\ (D=p^2-4q<0, n=2,3...)$$

называются простейшими дробями первого, второго, третьего и четвёртого типов.

В высшей алгебре доказывается следующая теорема:

Теорема 34.3. *Правильную рациональную дробь* $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, *где* $P_n(x) = (x-a)^k \cdots (x^2+px+q)^l \cdots$, *можно единственным образом разложить на сумму простейших дробей:*

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \cdots \qquad (34.7)$$
$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{M_lx+N_l}{(x^2+px+q)^l}, \cdots,$$

где A_i, B_i, M_i, N_i $(i = 1, 2, ...)$ – *действительные числа.*

В формуле (34.7) первое многоточие в разложении многочлена $P_n(x)$ на множители соответствует другим, кроме a, действительным корням, а второе – комплексным.

Из формулы (34.7) следует, что линейным множителям в разложении знаменателя соответствуют дроби I и II типов, а квадратичным множителям соответствуют простейшие дроби III и IV типов.

При этом число простейших дробей, соответствующих данному множителю, равно степени, с которой этот множитель входит в разложение знаменателя дроби на множители.

Правило разложения правильной рациональной дроби остается справедливым при любом числе линейных и квадратичных множителей в разложении знаменателя $P_n(x)$.

Рассмотрим два способа нахождения коэффициентов разложения (34.7).

34.3.1. *Метод неопределённых коэффициентов.*

Этот метод основан на следующем утверждении, принимаемом без доказательства: если два многочлена тождественно равны, то равны и коэффициенты при одинаковых степенях неизвестной в обеих частях тождества.
Поэтому приводя в правой части разложения (34.7) к общему знаменателю, получаем тождественное равенство двух рациональных дробей с равными знаменателями.
Следовательно, числители тождественно равны. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях неизвестной, получим систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $A, B, \ldots$.
Рассмотрим примеры.

Пример 34.7. *Разложить на простейшие дроби:* $\dfrac{x^2+2x-6}{x^3+x^2-6x}$.

Р е ш е н и е:

$$\frac{x^2+2x-6}{x(x+3)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-2}. \qquad (34.8)$$

Приводим правую часть этого тождества к общему знаменателю:

$$\frac{x^2+2x-6}{x(x+3)(x-2)}=\frac{A(x+3)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+3)}{x(x+3)(x-2)}.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{cases} x^2: A+B+C=1, \\ x: A-2B+3C=2, \\ \text{свободные члены:} -6A=-6. \end{cases}$$

Можно показать, что эта система всегда имеет единственное решение. Это решение следующее:

$$A=1,\ B=-\frac{1}{5},\ C=\frac{1}{5}.$$

Подставив найденные коэффициенты в разложение (34.8), окончательно получим:

$$\frac{x^2+2x-6}{x^3+x^2-6x}=\frac{1}{x}-\frac{\frac{1}{5}}{x+3}+\frac{\frac{1}{5}}{x-2}. \qquad (34.9)$$

Пример 34.8. *Разложить на простейшие дроби:* $\dfrac{3x^2+5}{(x-1)^2(x^2+2x+5)}$.

Р е ш е н и е:

$$\frac{3x^2+5}{(x-1)^2(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+2x+5}. \qquad (34.10)$$

Приведем правую часть к общему знаменателю:

$$\frac{3x^2+5}{(x-1)^2(x^2+2x+5)} =$$

$$= \frac{A(x-1)(x^2+2x+5) + Bx(x^2+2x+5) + (Mx+N)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+2x+5)}.$$

Приравнивая числители, получаем:

$$x^2+5 = A(x^3+x^2+3x-5) + B(x^2+2x+5) +$$
$$+M(x^3-2x^2+x) + N(x^2-2x+1)$$

или

$$x^2+5 = (A+M)x^3 + (A+B-2M+N)x^2 +$$
$$+(3A+2B+M-2N)x + (-5A+5B+N).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x получаем систему:

$$\begin{cases} x^3: \ A + M = 0, \\ x^2: \ A + B - 2M + N = 3, \\ x: \ 3A + 2B + M - 2N = 0, \\ \text{свободные члены:} \ -5A + 5B + N = 5. \end{cases}$$

Её решение: $A = \frac{1}{4}, \ B = 1, \ M = -\frac{1}{4}, \ N = \frac{5}{4}$.

Следовательно, подставив найденные коэффициенты в (34.10), получим:

$$\frac{3x^2 + 5}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 5)} = \frac{\frac{1}{4}}{x - 1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{-\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}}{x^2 + 2x + 5}.$$

34.3.2. *Метод произвольных значений.*

Этот метод основан на очевидном утверждении: если два многочлена тождественно равны: $P(x) \equiv Q(x)$, то они равны при любом значении независимой переменной $x = a$: $P(a) = Q(a)$, где a - произвольное число.
Поэтому вместо приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях неизвестной в разложении (34.7) можно подставлять туда вместо x несколько произвольных чисел.
Этот метод особенно эффективен, когда многочлен $P_n(x)$, стоящий в знаменателе имеет, различные действительные корни и в качестве произвольных значений берутся числа, равные действительным корням знаменателя.

Пример 34.9. *Разложить на простейшие дроби функцию из примера 34.7.*

Р е ш е н и е: Ранее, при использовании метода неопределённых коэффициентов, было получено:

$$x^2 + 2x - 6 = A(x+3)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+3).$$

Подставим в это тождество последовательно три значения x:

$$x = 0: \ -6 = -6A \implies A = 1,$$

$$x = 2: \ 2 = 10C \implies C = \frac{1}{5},$$

$$x = -3: \ -3 = 15B \implies B = -\frac{1}{5}.$$

Опять получаем соотношение (34.10).

Рассмотрим теперь пример, в котором для разложения знаменателя на множители можно использовать операцию извлечения корня из комплексного числа.

Пример 34.10. *Разложить на простейшие дроби* $\dfrac{1}{x^4+1}$.

Решение:
Многочлен x^4+1, стоящий в знаменателе имеет лишь комплексные корни, которые мы нашли ранее:

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i),\quad x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i),\quad x_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i),\quad x_4=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i).$$

Таким образом,

$$x^4+1=\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Объединив первую скобку с последней, вторую с третьей, получим:

$$x^4+1=\left(\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=$$

$$=\left(\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{i^2}{2}\right)\left(\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{i^2}{2}\right)=\left(x^2-\frac{2}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{2}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1).$$

В соответствии с формулой (34.7) и методом неопределённых коэффициентов, находим:

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1} = \tag{34.11}$$
$$= \frac{(Ax+B)(x^2+\sqrt{2}x+1)+(Cx+D)(x^2-\sqrt{2}x+1)}{x^4+1}$$

и, следовательно,

$$Ax^3 + A\sqrt{2}x^2 + Ax + Bx^2 + B\sqrt{2}x + B + Cx^3 -$$
$$-C\sqrt{2}x^2 + Cx + Dx^2 - D\sqrt{2}x + D = 1.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства, получим систему уравнений для определения неизвестных A, B, C, D:

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ A\sqrt{2} + B - C\sqrt{2} + D = 0, \\ A + B\sqrt{2} + C - D\sqrt{2} = 0, \\ B + D = 1. \end{cases}$$

Выразив из первого уравнения C через A, а из последнего D через B и подставив $C = -A$ и $D = 1 - B$ во второе и третье уравнения системы, получим:

$$A\sqrt{2} + B + A\sqrt{2} + 1 - B = 0 \Rightarrow 2A\sqrt{2} = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ A=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}\ \Rightarrow\ C=-A=\frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$A+B\sqrt{2}-A-\sqrt{2}+B\sqrt{2}=0\ \Rightarrow$$

$$2B\sqrt{2}=\sqrt{2}\ \Rightarrow\ B=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ D=\frac{1}{2}.$$

Подставляя найденные значения $A,\ B,\ C,\ D$ в (34.11), найдем разложение дроби $\dfrac{1}{x^4+1}$ на простейшие:

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{-\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\dfrac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\dfrac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}. \qquad (34.12)$$

Замечание 34.1. *Разложение (34.12) многочлена* $P_4(x)=x^4+1$ *на множители можно было бы получить и методом неопределённых коэффициентов. Учитывая, что комплексные корни входят в разложение многочлена на множители как корни квадратных трёхчленов вида* x^2+px+q *при* $D<0$*, запишем:*

$$x^4+1=(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)=$$
$$=x^4+p_1x^3+q_1x^2+p_2x^3+p_1p_2x^2+p_2q_1x+q_2x^2+p_1q_2x+q_1q_2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа в полученном тождестве, получим уравнения для определения p_1, p_2, q_1, q_2 и найдем их так:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 0 \;\Rightarrow\; p_2 = -p_1 \;\Rightarrow\; p_2 = -\sqrt{2}, \\ q_1 + p_1 p_2 + q_2 = 0 \;\Rightarrow\; p_1 p_2 = -q_1 - q_2 = -2 \;\Rightarrow \\ \Rightarrow p_1^2 = 2 \;\Rightarrow\; p_1 = \sqrt{2}, \\ p_2 q_1 + p_1 q_2 = 0 \;\Rightarrow\; -p_1 q_1 + p_1 q_2 = p_1(q_2 - q_1) = 0 \;\Rightarrow\; q_1 = q_2, \\ \text{т.к. } p_1 \neq 0, \\ q_1 q_2 = 1 \;\Rightarrow\; q_1^2 = q_2^2 = 1 \;\Rightarrow\; q_1 = q_2 = 1. \end{cases}$$

Отметим, что $q_1 = q_2 \neq -1$, так как в этом случае из второго уравнения следовало бы, что $p^2 = -2$, что невозможно. Таким образом, мы получили опять разложение (34.12).

Замечание 34.2. *Разложить $x^4 + 1$ на множители можно ещё и так. Прибавим и вычтем $2x^2$ и воспользуемся формулой сокращённого умножения:*

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 =$$
$$= (x^2 + 1 - \sqrt{2}x)(x^2 + 1 + \sqrt{2}x).$$

Этот пример показывает, что нестандартные приемы решения часто очень эффективны!

Спасибо за внимание