СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Подготовили:

Гусаченко Е., Захарченко Д.

Сафронова А., Битюков Н.

Болотов А., Лучининов И.

СОДЕРЖАНИЕ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Систе́ма счисле́ния (англ. *numeral system* или *system of numeration*) — символический метод записи чисел, представление чисел с помощью письменных знаков.

Система счисления – это способ представления чисел и соответствующие ему правила действий над числами. Система счисления – это знаковая система, в которой числа записываются по определенным правилам с помощью символов некоторого алфавита, называемых цифрами.

*Вещественными числами называются все положительныечисла, отрицательные числа и ноль.

Функции системы счисления:

- даёт представления множества чисел (целых и/или вещественных*);
- даёт каждому числу уникальное представление (или, по крайней мере, стандартное представление);
- отражает алгебраическую и арифметическую структуру чисел.

КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ

ПОЗИЦИОННЫЕ И НЕПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

ПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Позиционными называются системы счисления, в которых значение цифры зависит от ее места (позиции) в записи числа.

Позиционной является привычная для нас в повседневной жизни **десятичная** система счисления, в которой значение (вес) цифры зависит от ее позиции в записи числа. В числе 1111 одна и та же цифра 1 означает последовательно единицу, десяток, сотню, тысячу.

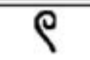
Все системы счисления, используемые в информатике (двоичная, восьмеричная, шестнадцатеричная и т. д.), являются позиционными. Это важно, т. к. правила образования чисел, перевода из одной системы в другую, выполнения арифметических операций во всех позиционных системах аналогичны.

НЕПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Непозиционными называются системы счисления, в которых значение цифры не зависит от ее места (позиции) в записи числа.

Непозиционной системой счисления является, например, римская. Правила выполнения арифметических операций в непозиционных системах счисления совсем иные

Единицы	Десятки	Сотни	Тысячи
1 I	10 X	100 C	1000 M
2 II	20 XX	200 CC	2000 MM
3 III	30 XXX	300 CCC	3000 MMM
4 IV	40 XL	400 CD	
5 V	50 L	500 D	
6 VI	60 LX	600 DC	
7 VII	70 LXX	700 DCC	
8 VIII	80 LXXX	800 DCCC	
9 IX	90 XC	900 CM	

число	значение	описание
|	1	черта
∩	10	пятка
	100	петля веревки
	1 000	кувшинка (или лотос)
	10 000	палец
 или 	100 000	жаба или личинка
	1 000 000	человек с поднятыми вверх руками

Египетская система счисления – десятичная непозиционная система счисления

КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ ПО ЧИСЛУ СИМВОЛОВ

САМЫЕ РАСПРОСТРАНЕННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Самые распространенные системы счисления:

- Двоичную систему счисления
- Троичную систему счисления
- Восьмеричную систему счисления
- Десятичную систему счисления
- Шестнадцатеричную систему счисления

ОСНОВАНИЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Основанием системы счисления называется количество различных символов (цифр), используемых в каждом из разрядов числа для его изображения в данной системе счисления. Различают позиционные и непозиционные системы счисления.

Развернутая форма числа в системе счисления с основанием ***q*:**

$$\boldsymbol{A_q = a_{n-1} * q^{n-1} + a_{n-2} * q^{n-2} + \cdots + a_0 * q^0 + a_{-1} * q^{-1} + \cdots + a_{-m} * q^{-m}}$$

Где: A_q - число в q-ичной системе счисления

q – основание системы счисления

a_i *- цифры, принадлежащие алфавиту данной системе счисления*

n – число целых разрядов числа

m – число дробных разрядов числа

ДВОИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Двоичная система счисления — позиционная система счисления с основанием 2. Благодаря непосредственной реализации в цифровых электронных схемах на логических вентилях, двоичная система используется практически во всех современных компьютерах и прочих вычислительных электронных устройствах.

В двоичной системе счисления числа записываются с помощью двух символов (0 и 1). Чтобы не путать, в какой системе счисления записано число, его снабжают указателем справа внизу. Например, число в десятичной системе 5_{10}, в двоичной 101_2. Иногда двоичное число обозначают префиксом 0b или символом & (амперсанд), например 0b101 или соответственно &101.

В двоичной системе счисления (как и в других системах счисления, кроме десятичной) знаки читаются по одному. Например, число 101_2 произносится «один ноль один».

Двоичная система	Десятичная система
0	0
1	1
10	2
11	3
100	4
101	5
110	6
111	7
1000	8
1001	9
1010	10

ТРОИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Трои́чная систе́ма счисле́ния — позиционная система счисления с целочисленным основанием, равным 3.

В распечатках ЭВМ «Сетунь» использовалось кодирование {1,0,1}. Троичные цифры можно обозначать любыми тремя знаками {A,B,C}, но при этом дополнительно нужно указать старшинство знаков, например, A<B<C.

Практическое применение:

- Работая в палате мер и весов, Д. И. Менделеев, с учётом симметричной троичной системы счисления, разработал цифровой ряд значений весов разновеса для взвешивания на лабораторных весах, который используется по сей день.
- В распечатках ЭВМ «Сетунь» использовалось кодирование {1,0,1}. Троичные цифры можно обозначать любыми тремя знаками {A,B,C}, но при этом дополнительно нужно указать старшинство знаков, например, A<B<C.

«Се́тунь» — малая ЭВМ на основе троичной логики, разработанная в вычислительном центре Московского государственного университета в 1959 году.

Трайт — минимальная непосредственно адресуемая единица главной памяти «Сетуни-70» Брусенцова. Трайт равен 6 тритам (почти 9,51 бита). В «Сетуни-70» интерпретируется как знаковое целое число в диапазоне от −364 до 364. Трайт достаточно велик, чтобы закодировать, например, алфавит, включающий русские и латинские буквы (включая заглавные и строчные), цифры, математические и служебные знаки. В трайте может содержаться целое число как девятеричных, так и двадцатисемеричных цифр.

ТРОИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Существует в двух вариантах: несимметричная и симметричная.

В несимметричной троичной системе счисления чаще применяются цифры {0,1,2}, а в троичной симметричной системе счисления знаки {−,0,+}, {−1,0,+1}, {1,0,1}, {1,0,1}, {i,0,1}, {N,O,P}, {N,Z,P} и цифры {2,0,1}, {7,0,1}.

Десятичное число	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Троичное число	0	1	2	10	11	12	20	21	22	100	101

ВОСЬМЕРИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Восьмери́чная систе́ма счисле́ния — позиционная целочисленная система счисления с основанием 8. Для представления чисел в ней используются цифры от 0 до 7.

Восьмеричная система чаще всего используется в областях, связанных с цифровыми устройствами. Характеризуется лёгким переводом восьмеричных чисел в двоичные и обратно, путём замены восьмеричных чисел на триплеты* двоичных. Широко использовалась в программировании и компьютерной документации, однако позднее была почти полностью вытеснена шестнадцатеричной.

*Триплет — комбинация из трёх последовательно расположенных чисел.

$0_8 = 000_2$
$1_8 = 001_2$
$2_8 = 010_2$
$3_8 = 011_2$
$4_8 = 100_2$
$5_8 = 101_2$
$6_8 = 110_2$
$7_8 = 111_2$

ПРИМЕНЕНИЕ ВОСЬМЕРИЧНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Восьмеричная система применяется при выставлении прав доступа к файлам и прав исполнения для участников в Linux-системах.

Восьмеричная система счисления употребляется в ЭВМ как вспомогательная для записи информации в сокращённом виде. Ранее широко использовалась в программировании и компьютерной документации, в настоящее время почти полностью вытеснена 16-ричной.

ДЕСЯТИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Десяти́чная систе́ма счисле́ния — позиционная система счисления по целочисленному основанию 10. Одна из наиболее распространённых систем. В ней используются цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, называемые арабскими цифрами. Предполагается, что основание 10 связано с количеством пальцев на руках у человека.

Один десятичный разряд в десятичной системе счисления иногда называют **декадой**. В цифровой электронике одному десятичному разряду десятичной системы счисления соответствует один десятичный триггер.

Десятичная непозиционная система счисления с единичным кодированием десятичных цифр (от 1 до 1 000 000) возникла **во второй половине третьего тысячелетия до н. э. в Древнем Египте** (египетская система счисления*).

*Египетская система счисления — непозиционная система счисления, которая употреблялась в Древнем Египте вплоть до начала X века н. э. В этой системе цифрами являлись иероглифические символы; они обозначали числа 1, 10, 100 и т. д. до миллиона.

ДЕСЯТИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Древнейшая известная запись позиционной десятичной системы обнаружена **в Индии в 595 г.** Нуль в то время применялся не только в Индии, но и в Китае. В этих старинных системах для записи одинакового числа использовались символы, рядом с которыми дополнительно помечали, в каком разряде они стоят. Потом перестали помечать разряды, но число всё равно можно прочитать, так как у каждого разряда есть своя позиция. А если позиция пустая, её нужно пометить нулём. В поздних вавилонских текстах такой знак стал появляться, но в конце числа его не ставили. **Лишь в Индии нуль окончательно занял своё место**, эта запись распространилась затем по всему миру.

Индийская нумерация пришла сначала **в арабские страны**, затем и **в Западную Европу**. О ней рассказал среднеазиатский математик аль-Хорезми. Простые и удобные правила сложения и вычитания чисел, записанных в позиционной системе, сделали её особенно популярной. А поскольку труд аль-Хорезми был написан на арабском, то за индийской нумерацией в Европе закрепилось иное название — «арабская» (арабские цифры).

ШЕСТНАДЦАТЕРИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Шестнадцатеричная система счисления — позиционная система счисления по основанию 16.

В качестве цифр этой системы счисления обычно используются цифры от 0 до 9 и латинские буквы от A до F. Буквы A, B, C, D, E, F имеют значения 10_{10}, 11_{10}, 12_{10}, 13_{10}, 14_{10}, 15_{10} соответственно.

В стандарте Юникода номер символа принято записывать в шестнадцатеричном виде, используя не менее 4 цифр (при необходимости — с ведущими нулями).

Шестнадцатеричный цвет — запись трёх компонентов цвета (RGB) в шестнадцатеричном виде.

Десятичная система	Двоичная система	Шестнадцатеричная система
0	0	0
1	1	1
2	10	2
3	11	3
4	100	4
5	101	5
6	110	6
7	111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F
16	10000	10

ПРИМЕНЕНИЕ ШЕСТНАДЦАТЕРИЧНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Широко используется в низкоуровневом программировании и компьютерной документации, поскольку в современных компьютерах минимальной адресуемой единицей памяти является 8-битный байт, значения которого удобно записывать двумя шестнадцатеричными цифрами. Такое использование началось с системы IBM/360, где вся документация использовала шестнадцатеричную систему, в то время как в документации других компьютерных систем того времени (даже с 8-битными символами, как, например, PDP-11 или БЭСМ-6) использовали восьмеричную систему.

ПРИМЕНЕНИЕ ШЕСТНАДЦАТЕРИЧНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Использование MAC-адресов является одним из наиболее важных аспектов технологии локальной сети Ethernet. MAC-адреса используют шестнадцатеричную систему счисления.

В системе счисления с основанием 16 используются цифры от 0 до 9 и буквы от A до F. На рис. 1 показаны соответствующие десятичные и шестнадцатеричные значения для двоичного кода 0000—1111. Нам проще представить значение в виде одной шестнадцатеричной цифры, чем в виде четырёх двоичных битов.

Если 8 бит (байт) — это общепринятая бинарная группа, двоичный код 00000000—11111111 может быть представлен в шестнадцатеричной системе исчисления в качестве диапазона 00–FF. Чтобы заполнить 8-битное представление, всегда отображаются ведущие нули. Например, двоичное значение 0000 1010 показано в шестнадцатеричной системе как 0A.

Шестнадцатеричное значение обычно представлено в тексте значением, которое располагается после 0x (например, 0x73) или подстрочного индекса 16. В остальных, более редких случаях, за ним может располагаться H (например, 73H). Однако, поскольку подстрочный текст не распознаётся в командной строке или средах программирования, перед техническим представлением шестнадцатеричных значений стоит «0x» (нулевой X). Так, приведённые выше примеры будут отображаться как 0x0A и 0x73 соответственно.

Шестнадцатеричная система счисления используется для представления MAC-адресов Ethernet и IP-адресов версии 6.

ПРАВИЛА ПЕРЕВОДА ИЗ ОДНОЙ СИСТЕМЫ В ДРУГУЮ

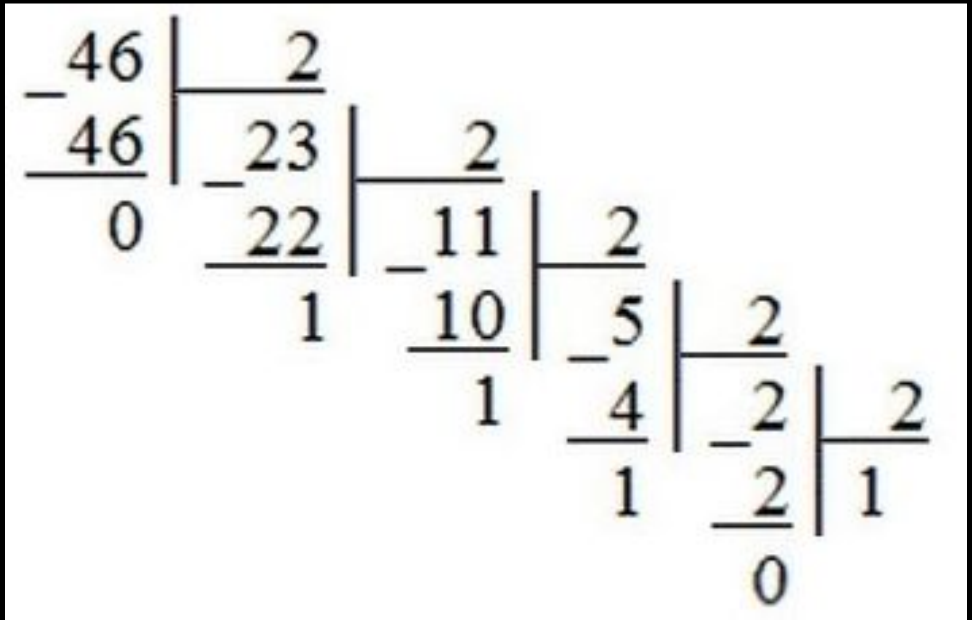
ПРАВИЛА ПЕРЕВОДА ИЗ ДЕСЯТИЧНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ В ДВОИЧНУЮ

ТАБЛИЦА ПЕРЕВОДА ДЕСЯТИЧНЫХ ЧИСЕЛ ОТ 0 ДО 20 В ДВОИЧНУЮ СИСТЕМУ СЧИСЛЕНИЯ.

десятичное число	двоичное число	десятичное число	двоичное число
0	0000	11	1011
1	0001	12	1100
2	0010	13	1101
3	0011	14	1110
4	0100	15	1111
5	0101	16	10000
6	0110	17	10001
7	0111	18	10010
8	1000	19	10011
9	1001	20	10100
10	1010	и т.д.	

МЕТОД ПЕРВЫЙ: СОКРАЩЕННОЕ ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ

Чтобы перевести целое положительное десятичное число в двоичную систему счисления, нужно это число разделить на 2. Полученное частное снова разделить на 2, и дальше до тех пор, пока частное не окажется меньше 2. В результате записать в одну строку последнее частное и все остатки, начиная с последнего.



$46 = 101110_2$

МЕТОД ВТОРОЙ: СРАВНЕНИЕ УМЕНЬШАЮЩИХСЯ СТЕПЕНЕЙ И ВЫЧИТАНИЕ

Допустим, требуется перевести число 637 десятичной системы в двоичную систему. Делается это следующим образом:

1. Отыскивается максимальная степень двойки, чтобы два в этой степени было меньше или равно исходному числу. В нашем случае это 9, т.к. $2^9 = 512$, а $2^{10} = 1024$, что больше нашего начального числа. Таким образом, мы получили число разрядов результата. Оно равно 9+1=10. Значит, результат будет иметь вид 1ххххххххх, где вместо х может стоять 1 или 0.
2. Найдем вторую цифру результата. Возведем двойку в степень 9 и вычтем из исходного числа: $637-2^9=125$. Затем сравниваем с числом $2^8=256$. Так как 125 меньше 256, то девятый разряд будет 0, т.е. результат уже примет вид 10хххххххх.

3. 2^7=128 > 125, значит и восьмой разряд будет нулём.
4. 2^6=64, то седьмой разряд равен 1.
5. 125-64=61 Таким образом, мы получили четыре старших разряда и число примет вид 10011xxxxx.
6. 2^5=32 и видим, что 32 < 61, значит шестой разряд равен 1 (результат 100111xxxx), остаток 61-32=29.
7. 2^4=16 < 29 - пятый разряд 1 => 1001111xxx. Остаток 29-16=13.
8. 2^3=8 < 13 => 10011111xx. 13-8=5.
9. 2^2=4 < 5 => 10011111xx, остаток 5-4=1.
10. 2^1=2 > 1 => 100111110x, остаток 2-1=1. 20=1 => 1001111101. Это и будет конечный результат.

ПЕРЕВОД ДРОБНОГО ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА В ДВОИЧНОЕ

Перевод дробного числа из десятичной системы счисления в двоичную осуществляется по следующему алгоритму:

1. Вначале переводится целая часть десятичной дроби в двоичную систему счисления;
2. Затем дробная часть десятичной дроби умножается на основание двоичной системы счисления;
3. В полученном произведении выделяется целая часть, которая принимается в качестве значения первого после запятой разряда числа в двоичной системе счисления;
4. Алгоритм завершается, если дробная часть полученного произведения равна нулю или если достигнута требуемая точность вычислений. В противном случае вычисления продолжаются с предыдущего шага.

Пример 1: Перевести число 0.12510 в двоичную систему счисления.

Решение: 0.125·2 = 0.25 (0 - целая часть, которая станет первой цифрой результата),

0.25·2 = 0.5 (0 - вторая цифра результата),

0.5·2 = 1.0 (1 - третья цифра результата, а так как дробная часть равна нулю, то перевод завершён).

Ответ: 0.12510 = 0.0012

Пример 2: Требуется перевести дробное десятичное число 291,725 в дробное двоичное число.

$291 = 100100011_2$; дробную часть умножаем на основание 2, занося целые части произведения в разряды после запятой искомого дробного двоичного числа:

.725 * 2 = 1,45
.45 * 2 = 0,9
.9 *2 = 1,8
.8 * 2 = 1,6
.6 * 2 = 1,2
.2 * 2 = 0,4
.4 * 2 = 0, 8
.8 * 2 = 1,6

и т. д. , до бесконечности в данном случае. Итак, имеем: $291{,}725 = 100100011{,}10111001\ldots_2$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

$$-\,543 \,\big|\, \underline{\,2\,}$$

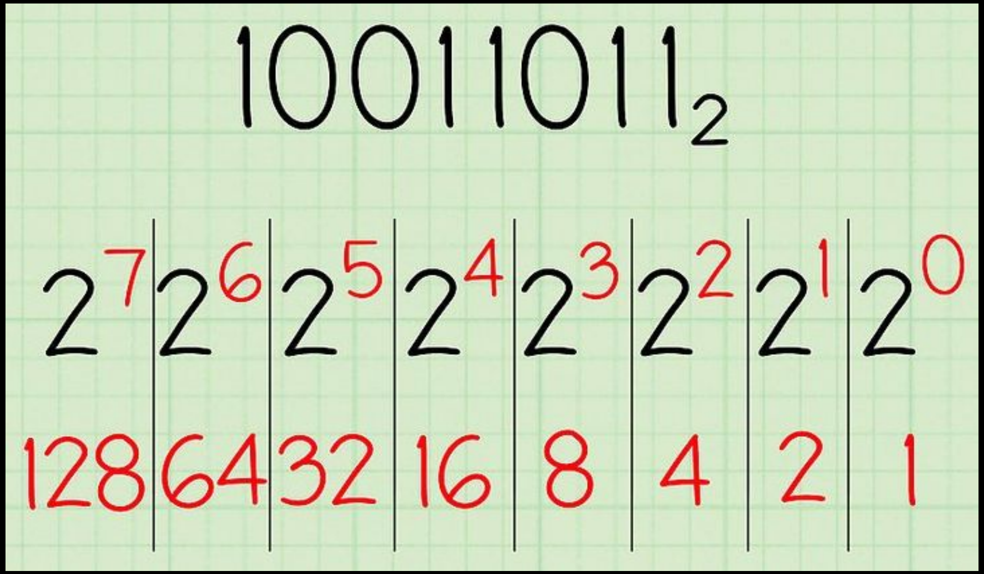
$$-\,874 \,\big|\, \underline{\,2\,}$$

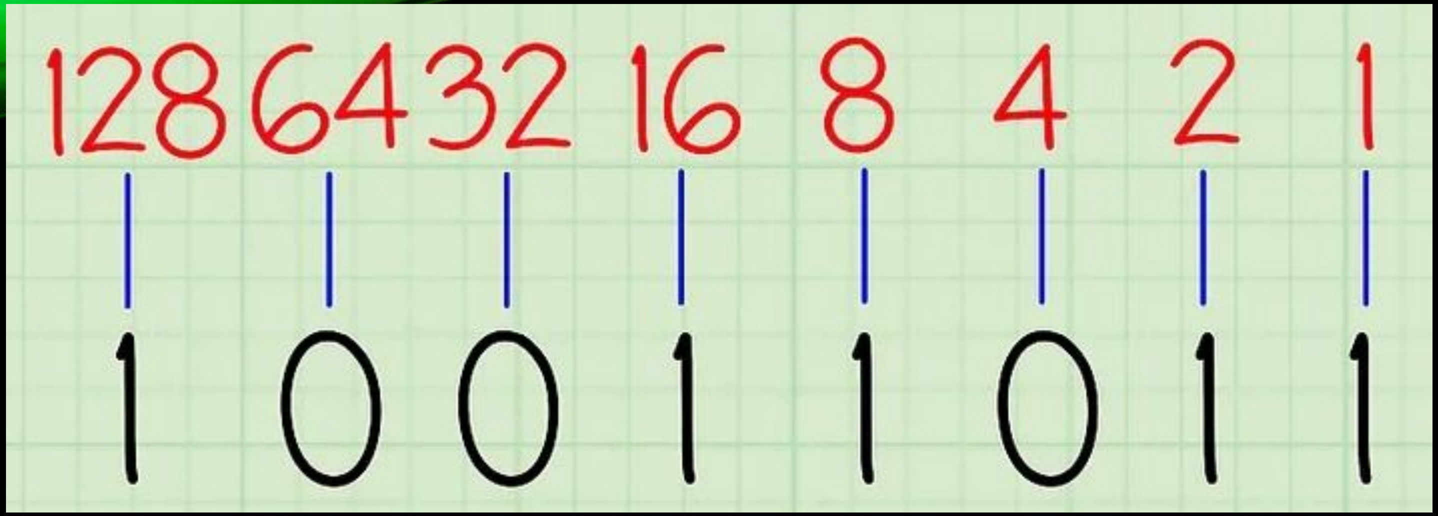
$$-\,4598 \,\big|\, \underline{\,2\,}$$

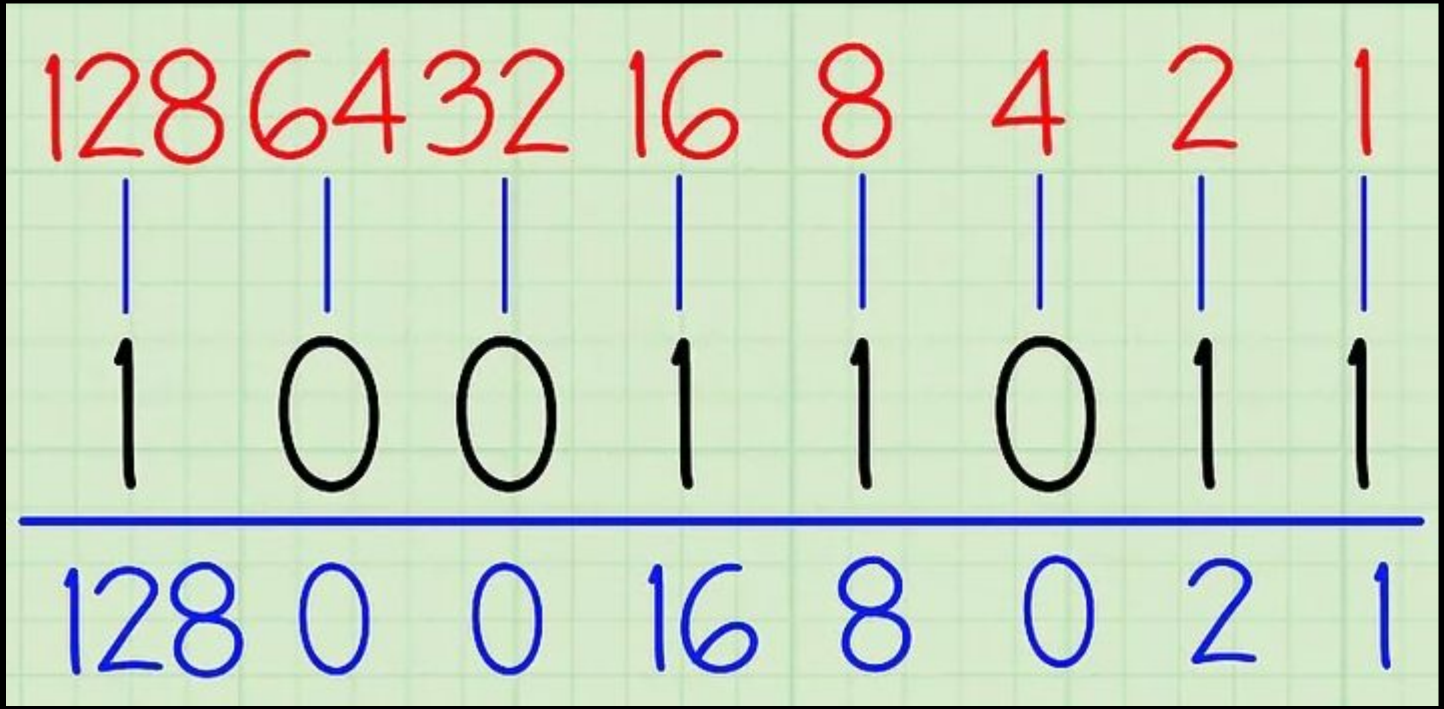
ПРАВИЛА ПЕРЕВОДА ИЗ ДВОИЧНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ В ДЕСЯТИЧНУЮ

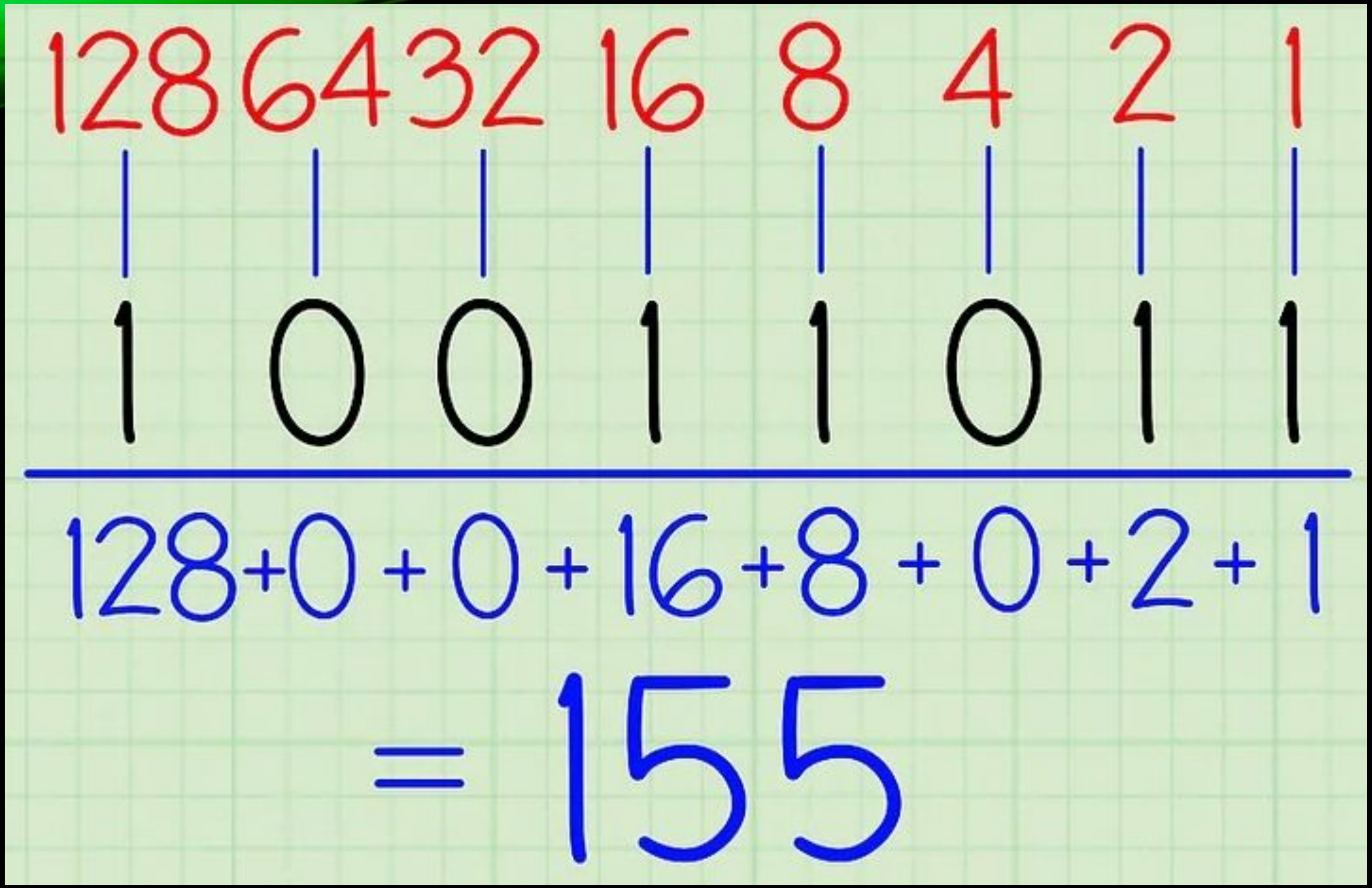
МЕТОД ПЕРВЫЙ: ИСПОЛЬЗУЯ ПОЗИЦИОННУЮ НОТАЦИЮ

Для преобразования числа из двоичной системы в десятичную необходимо пронумеровать разряды двоичного числа справа налево, начиная с 0, после чего сложить степени числа 2, умноженные на значение соответствующего разряда.



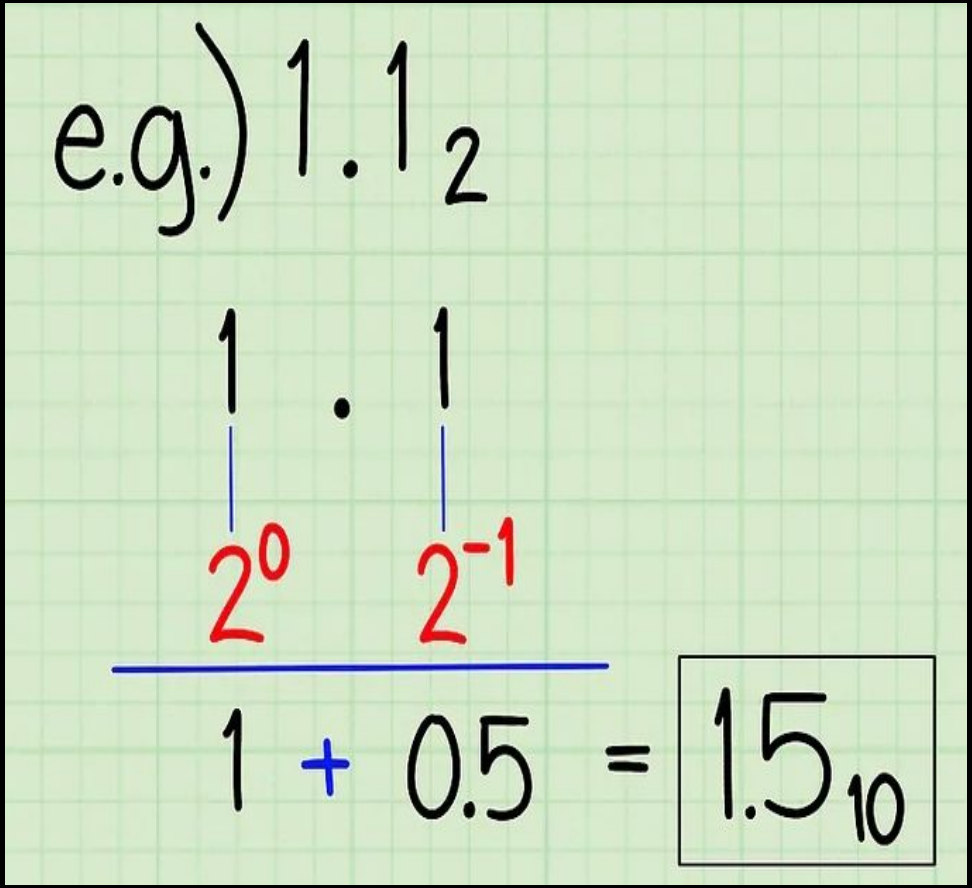

128 64 32 16 8 4 2 1
1 0 0 1 1 0 1 1


128 64 32 16 8 4 2 1
1 0 0 1 1 0 1 1
128 0 0 16 8 0 2 1



$10011011_2 = 155$

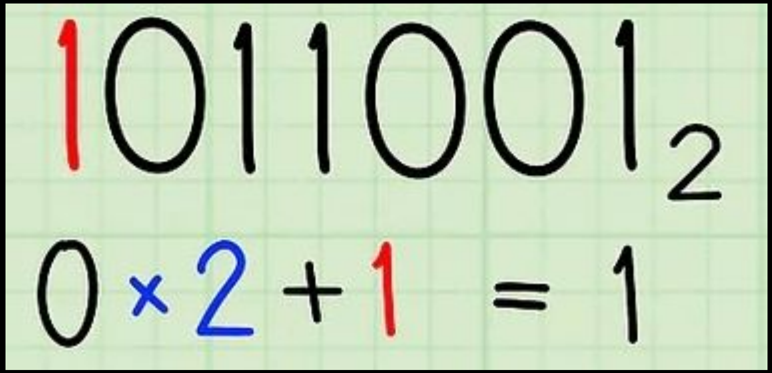
Используйте данный метод, чтобы преобразовать двоичное число с десятичной точкой в десятичную форму. Вы можете использовать данный метод даже если вы хотите преобразовать двоичное число, такое как 1.1_2 в десятичное. Все, что вам необходимо знать – это то, что число в левой части десятичного числа – это обычное число, а число в правой части десятичного числа – это число "делений надвое", или 1 x (1/2). "1" слева от десятичного числа соответствует 2^0, или 1. 1 справа от десятичного числа соответствует 2^{-1}, или 0.5. Сложите 1 и 0.5 и вы получите 1.5, которое является эквивалентом 1.1_2 в десятичном виде.



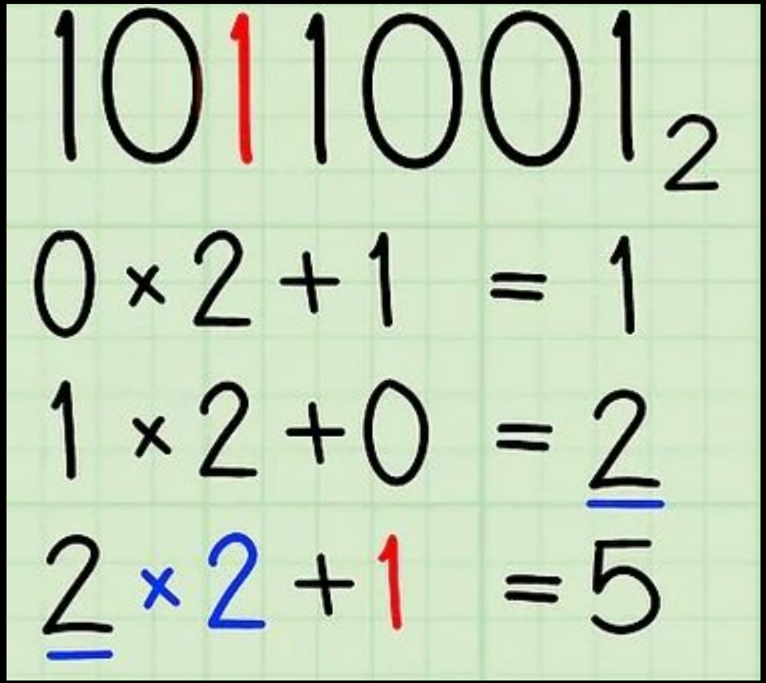
МЕТОД ВТОРОЙ: ИСПОЛЬЗУЯ УДВОЕНИЕ

Данный метод не использует степени. Поэтому он проще для преобразования больших чисел в голове – вам нужно только все время помнить итог. Предположим, вы работаете с числом 1011001_2.

1. **Начиная слева, удвойте ваш предыдущий итог и добавьте текущую цифру.** Так как вы работаете с двоичным числом 1011001_2, ваша первая цифра слева равна 1. Ваш предыдущий итог равен 0, так как вы еще не начали. Вам необходимо удвоить предыдущий итог, 0, и добавить 1, текущую цифру. 0 x 2 + 1 = 1, так что ваш новый итог равен 1.



2. **Удвойте ваш текущий итог и добавьте следующую цифру слева.** Ваш текущий итог равен 1, а ваша новая цифра 0. Так что удвойте 1 и добавьте 0. 1 x 2 + 0 = 2. Ваш новый итог равен 2.



3. **Выполняя каждый раз одно и тоже действие, у вас должно получиться следующее:**

$$1011001_2$$

$$0\times2+1=1$$
$$1\times2+0=2$$
$$2\times2+1=5$$
$$5\times2+1=11$$
$$11\times2+0=22$$

$$1011001_2$$

$$0\times2+1=1$$
$$1\times2+0=2$$
$$2\times2+1=5$$
$$5\times2+1=11$$
$$11\times2+0=22$$
$$22\times2+0=44$$

$$1011001_2$$

$$0\times2+1=1$$
$$1\times2+0=2$$
$$2\times2+1=5$$
$$5\times2+1=11$$
$$11\times2+0=22$$
$$22\times2+0=44$$
$$44\times2+1=\boxed{89}$$

$1011001_2 = 89$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

$1100100_2=?$

$1011001_2=?$

$101011_2=?$

ПРАВИЛА ПЕРЕВОДА ИЗ ДЕСЯТИЧНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ В ШЕСТНАДЦАТЕРИЧНУЮ

ПЕРЕВОД ИЗ ДЕСЯТИЧНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ В ШЕСТНАДЦАТЕРИЧНУЮ

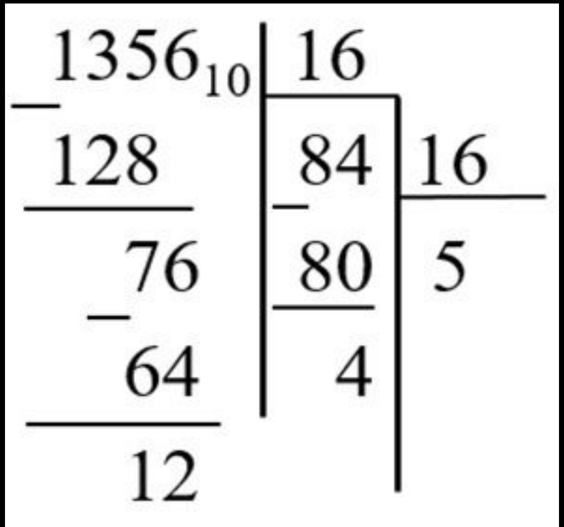
В шестнадцатеричной системе счисления существует таблица соответствия десятичных и шестнадцатеричных чисел, которая используется при переводе из одной системы в другую:

Десятичная система счисления	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Шестнадцатеричная система счисления	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F

ПЕРЕВОД ИЗ ДЕСЯТИЧНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ В ШЕСТНАДЦАТЕРИЧНУЮ

В свое же время для перевода из десятичной системы счисления, число нужно делить на 16 до тех пор пока оно не сможет разделиться. Из остатков при делении составляется число в шестнадцатеричной системе счисления справа налево.

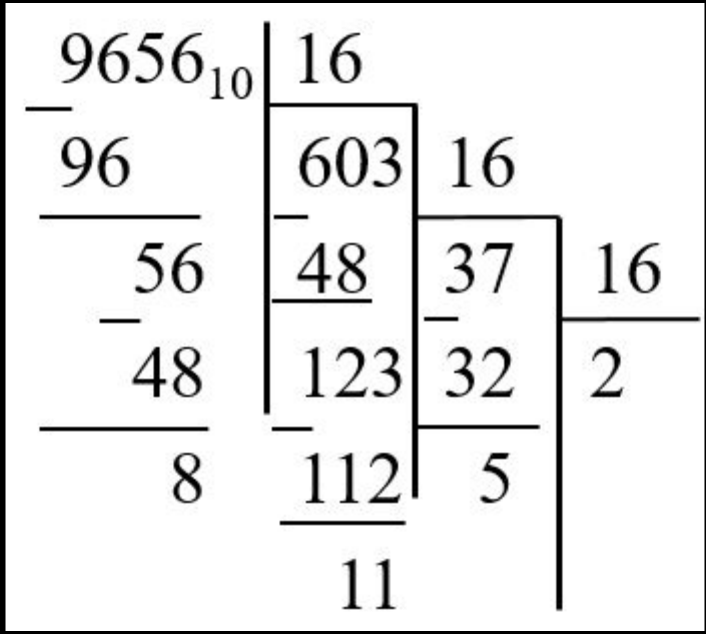
Например переведем число 1356 из десятичной системы счисления в шестнадцатеричную:



Ответ: $1356_{10} = 54C_{16}$

ПЕРЕВОД ИЗ ДЕСЯТИЧНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ В ШЕСТНАДЦАТЕРИЧНУЮ

Также для примера возьмем число побольше, например 9656, и переведем его шестнадцатеричную систему счисления:



Можно заметить, что в остатке у нас есть число 11, которое по правилам таблицы соответствия десятичных и шестнадцатеричных чисел, заменяется на символ «B» при переводе числа.

Ответ: $9656_{10} = 25B8_{16}$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

$$-\,999 \;\big|\; \underline{16}$$

$$-\,2567 \;\big|\; \underline{16}$$

$$-\,139 \;\big|\; \underline{16}$$

ПРАВИЛА ПЕРЕВОДА ИЗ ШЕСТНАДЦАТЕРИЧНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ В ДЕСЯТИЧНУЮ

ПЕРЕВОД ИЗ ШЕСТНАДЦАТЕРИЧНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ В ДЕСЯТИЧНУЮ

Для перевода числа из любой системы счисления в десятичную существует общая формула:

$$A_n = a_{n-1} \cdot q^{n-1} + a_{n-2} \cdot q^{n-2} + \cdots + a_0 \cdot q^0$$

Для перевода из шестнадцатеричной системы счисления в десятичную преобразуем формулу:

$$A_{16} = a_{n-1} \cdot 16^{n-1} + a_{n-2} \cdot 16^{n-2} + \cdots + a_0 \cdot 16^0$$

Возьмем для примера:

$$A2F_{16} = A \cdot 16^2 + 2 \cdot 16^1 + F \cdot 16^0 = 10 \cdot 256 + 2 \cdot 16 + 15 \cdot 1 = 2560 + 32 + 15 = 2607_{10}$$

Ответ: $A2F_{16} = 2607_{10}$

ПЕРЕВОД ИЗ ДЕСЯТИЧНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ В ШЕСТНАДЦАТЕРИЧНУЮ

Также можно переводить дробные числа из шестнадцатеричной системы счисления в десятичную.

Например:

$$0.2A9_{16}=0\cdot 16^{0}+2\cdot 16^{-1}+A\cdot 16^{-2}+9\cdot 16^{-3}=0\cdot 1+2\cdot 0.0625+10\cdot 0.00390625+9\cdot 0.000244140625$$
$$=0+0.125+0.0390625+0.002197265625=0.166259765625_{10}$$

Ответ: $0{,}2A9_{16} = 0{,}166259765625_{10}$

$$104.F2_{16}=1\cdot 16^{2}+0\cdot 16^{1}+4\cdot 16^{0}+F\cdot 16^{-1}+2\cdot 16^{-2}=1\cdot 256+0\cdot 16+4\cdot 1+15\cdot 0.0625+2\cdot$$
$$0.00390625=256+0+4+0.9375+0.0078125=260.9453125_{10}$$

Ответ: $104{,}F2_{16} = 260{,}9453125_{10}$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

$413_{16}=?$

$2A4_{16}=?$

$17C_{16}=?$

ДВОИЧНАЯ АРИФМЕТИКА

ДВОИЧНАЯ АРИФМЕТИКА

Выполнение арифметических действий в любых позиционных системах счисления производится по тем же правилам, которые используются в десятичной системе счисления.

Так же, как и в десятичной системе счисления, для выполнения арифметических действий необходимо знать таблицы сложения (вычитания) и умножения.

Сложение	Вычитание	Умножение
0 + 0 = 0	0 — 0 = 0	0 · 0 = 0
0 + 1 = 1	1 — 0 = 1	0 · 1 = 0
0 + 1 = 1	1 — 1 = 0	1 · 0 = 0
1 + 1 = 10	10 — 1 = 0	1 · 1 = 1

СЛОЖЕНИЕ ДВОИЧНЫХ ЧИСЕЛ

Сложение в двоичной системе счисления выполняется по тем же правилам, что и в десятичной. Два числа записываются в столбик с выравниванием по разделителю целой и дробной части и при необходимости дополняются справа незначащими нулями. Сложение начинается с крайнего правого разряда. Две единицы младшего разряда объединяются в единицу старшего.

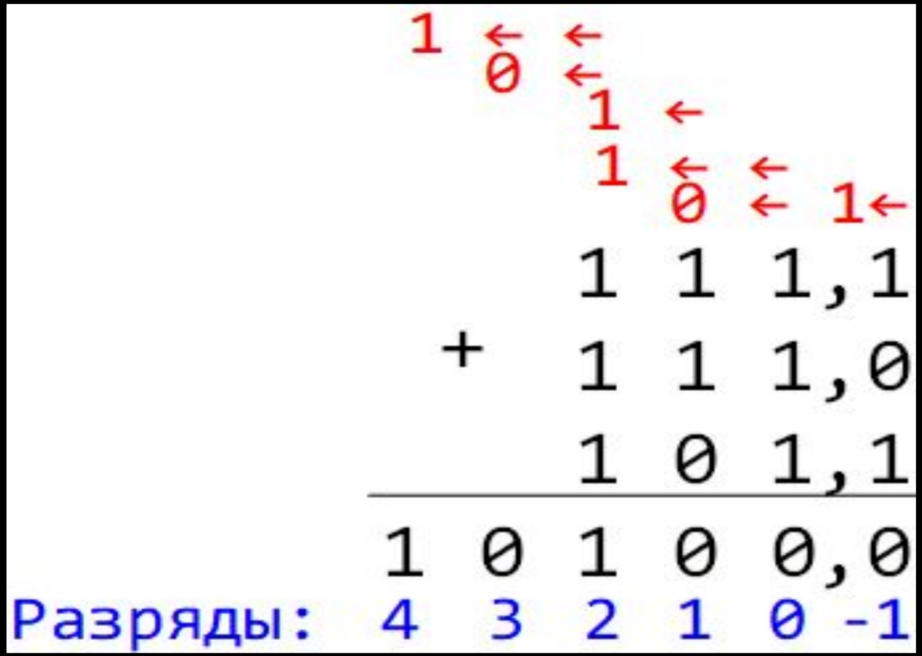
Пример: $1011{,}10_2 + 1010{,}11_2$

$$\begin{array}{r}
1\leftarrow\quad 1\leftarrow 1\leftarrow 1\leftarrow\quad \\
+\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1{,}1\ 0 \\ 1\ 0\ 1\ 0{,}1\ 1 \end{array} \\
\hline
1\ 0\ 1\ 1\ 0{,}0\ 1
\end{array}$$

СЛОЖЕНИЕ ДВОИЧНЫХ ЧИСЕЛ

- Интересна также ситуация, когда складываются больше двух чисел. В этом случае возможен перенос через несколько разрядов.

Пример: $111{,}1_2 + 111{,}0_2 + 101{,}1_2$



ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

$$\begin{array}{r} 100110 \\ +\;\;11100 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100011 \\ +\;1010100 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 110101 \\ +\;101011 \\ \hline \end{array}$$

СЛОЖЕНИЕ ДВОИЧНЫХ ЧИСЕЛ

- При сложении в разряде единиц (разряд 0) оказывается 4 единицы, которые, объединившись, дают 100_2 . Поэтому из нулевого разряда в первый разряд переносится 0, а во второй — 1.

Аналогичная ситуация возникает во втором разряде, где с учетом двух перенесенных единиц получается число $5 = 101_2$. 1 остается во втором разряде, 0 переносится в третий и 1 переносится в четвёртый.

ВЫЧИТАНИЕ ДВОИЧНЫХ ЧИСЕЛ

В случаях, когда занимается единица старшего разряда, она дает две единицы младшего разряда. Если занимается единица через несколько разрядов, то она дает по одной единице во всех промежуточных нулевых разрядах и две единицы в том разряде, для которого занималась.

Пример: $10110{,}01_2 - 1001{,}10_2$

$$\begin{array}{r} \scriptstyle \to 10 \qquad\qquad \to 1\ \to 10 \\ 10110{,}01 \\ -\ 1001{,}10 \\ \hline 1100{,}11 \end{array}$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

$$\begin{array}{r} \_\,10111001 \\ 01101110 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \_\,1000000001 \\ 10010110 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \_\,100001101 \\ 100000110 \\ \hline \end{array}$$

УМНОЖЕНИЕ ДВОИЧНЫХ ЧИСЕЛ

Выполняя умножение многозначных чисел в различных позиционных системах счисления, можно использовать обычный алгоритм перемножения чисел в столбик, но при этом результаты перемножения и сложения однозначных чисел необходимо заимствовать из соответствующих рассматриваемой системе таблиц умножения и сложения. Ввиду чрезвычайной простоты таблицы умножения в двоичной системе, умножение сводится лишь к сдвигам множимого и сложениям.

УМНОЖЕНИЕ ДВОИЧНЫХ ЧИСЕЛ

- Пример: $1101111_2 * 101101_2$

```
      x 1101111
         101101
        -------
        1101111
      1101111
     1101111
   1101111
-------------
1001110000011
```

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

$$\begin{array}{r} 1001100 \\ * \quad 101111 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1011 \\ * \quad 110101 \\ \hline \end{array}$$

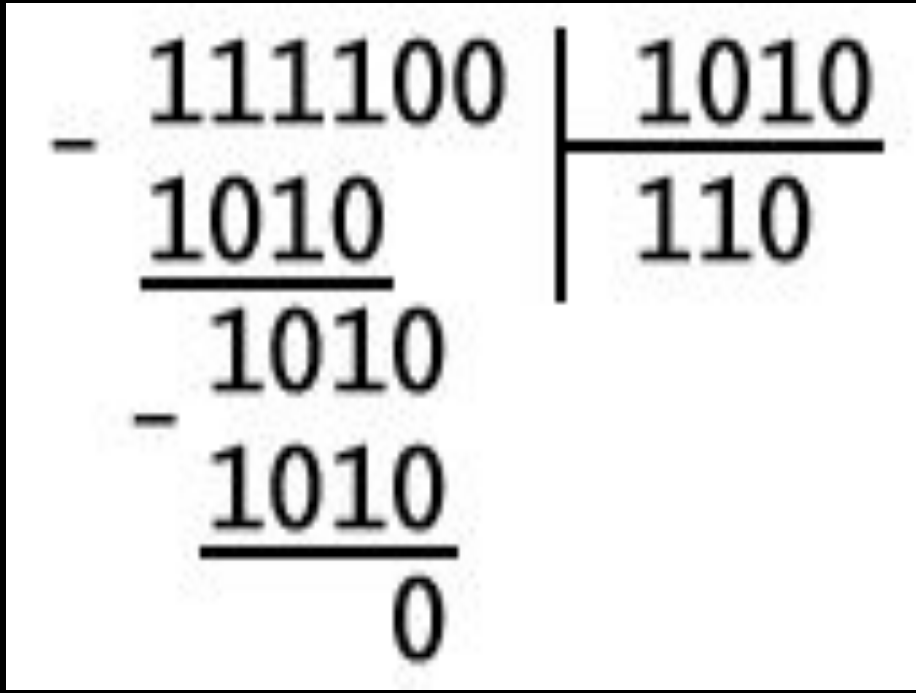
$$\begin{array}{r} 1000011 \\ * \quad 1010011 \\ \hline \end{array}$$

ДЕЛЕНИЕ ДВОИЧНЫХ ЧИСЕЛ

Деление в любой позиционной системе счисления производится по тем же правилам, как и деление углом в десятичной системе. В двоичной системе деление выполняется особенно просто, ведь очередная цифра частного может быть только нулем или единицей.

ДЕЛЕНИЕ ДВОИЧНЫХ ЧИСЕЛ

- Пример: $111100_2/1010_2$



ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

$$\begin{array}{r|l} -1111101101000 & 1111 \\ \hline & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -1101110101000 & 1100 \\ \hline & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -10100001010010 & 1101 \\ \hline & \end{array}$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Система счисления и её функции
2. Правила двоичного вычитания
3. Отличия позиционной и непозиционной системы счисления
4. Правила двоичного сложения
5. Основание системы счисления – это …?
6. Область применения восьмеричной системы счисления
7. Правила двоичного деления
8. История десятичной системы счисления
9. Правила двоичного умножения
10. Область применения шестнадцатеричной системы счисления

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Выполнить перевод в десятичную систему счисления: 1100101_{2}, 123_{16}, $34A_{16}$
2. К функциям систем счисления не относится:
   a) даёт каждому числу уникальное представление (или, по крайней мере, стандартное представление);
   b) отражает алгебраическую и арифметическую структуру чисел;
   c) служит средством организации экономической жизни;
   d) даёт представления множества чисел;
3. Выполнить перевод в двоичную систему счисления: $23B_{16}$, 481_{10}, 344_{10}
4. MAC-адреса используют … систему счисления.
5. Какая система широко используется в программировании и компьютерной документации?
   a) Шестнадцатеричная;
   b) Двоичная;
   c) Троичная;
   d) Непозиционная;
6. К позиционным системам счисления относят:
   a) Европейская;
   b) Египетская;
   c) Восьмеричную;
   d) Шестнадцатеричную;
7. Выполнить перевод в шестнадцатеричную систему счисления: 555_{10}, 101011_{2}, 1234_{10}