

1.Равносильность уравнений и неравенств

Два неравенства

$$f_1(x) > g_1(x) \text{ и } f_2(x) > g_2(x) \quad (1)$$

или два уравнения

$$f_1(x) = g_1(x) \text{ и } f_2(x) = g_2(x) \quad (2)$$

называются равносильными на множестве X , если каждое решение первого неравенства (уравнения), принадлежащее множеству X , является решением второго и, наоборот, каждое решение второго, принадлежащее X , является решением первого, или, если, ни одно из неравенств (уравнений) на X не имеет решений. Т. е. два неравенства (уравнения) равносильны, по определению, если множества решений этих неравенств (уравнений) на X совпадают.

- \Leftrightarrow –обозначение равносильного перехода

$$f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=0 \text{ (или } f(x)>0 \Leftrightarrow g(x)>0 \text{)}.$$

Пример равносильных уравнений

$$\sqrt{x^2 - 4} = 1 - x^2 \Leftrightarrow \sqrt{\sin^2 x - 2} = 0$$

Условия равносильности уравнений

$$\sqrt{f(x)} = a^2 \Leftrightarrow f(x) = a^4. \quad (\text{УР K1})$$

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases} \quad (\text{УР K2})$$

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} f(x) = g(x). \quad (\text{УР K3})$$

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ \left[\begin{array}{l} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{array} \right. \end{cases} \quad (\text{УР K4})$$

Пример 2. При каких значениях параметра a системы

$$\begin{cases} ax + 3y = 6a - 4, \\ x + y = 2a \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x^2 - 2y^4 - 6x + 8 = 0, \\ x^2 + y^2 - (2a + 4)x + 2(a^2 + a + 2) = 0 \end{cases}$$

равносильны?

Равносильные переходы

Пусть функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ определены на X .

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) < g(x) + h(x). \quad (\text{УР 1})$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) = g(x) + h(x). \quad (\text{УР 2})$$

Если $h(x) > 0$ на X , то на X

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x) < g(x)h(x), \quad (\text{УР 3})$$

(умножение неравенства на
ПОЛОЖИТЕЛЬНУЮ функцию приводит к
равносильному неравенству с тем же
знаком)

Если $h(x) < 0$ на X , то на X

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x) > g(x)h(x), \quad (\text{УР 4})$$

(умножение неравенства на
ОТРИЦАТЕЛЬНУЮ функцию приводит к
смене знака неравенства)

Если $h(x) \neq 0$ на X , то на X

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x) = g(x)h(x). \quad (\text{УР 5})$$

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x). \quad (\text{УР } 6)$$

ВАЖНО!

Если обе части неравенства отрицательны, то умножив обе части на (-1) , придём к неравенству противоположного знака, но с положительными частями, и к нему применим (УР 6).

Нельзя возводить ЛЧ и ПЧ неравенства в квадрат, если они имеют разные знаки

-
- Пример

$$-7 < 5$$

НО!

$$(-7)^2 > 5^2$$

Если обе части уравнения *неотрицательны*, то

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x). \quad (\text{УР } 7)$$

Для любых $f(x)$ и $g(x)$ на X и любого натурального n

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f^{2n+1}(x) = g^{2n+1}(x). \quad (\text{УР } 8)$$

Неравенство вида $f(x) \geq 0 (\leq 0)$ называется нестрогим. По определению,

$$f(x) \geq 0 (\leq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ f(x) > 0 (< 0). \end{cases} \quad (\text{УР } 9)$$

2. Иррациональные неравенства

Решите неравенство $\sqrt{x+3} > x+1$.

Неравенства вида $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ и $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g^2(x). \end{cases} \quad (\text{УР K5})$$

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g^2(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \quad (\text{УР K7})$$

Пример

Решите неравенство $3\sqrt{3x^2 - 8x - 3} > 1 - 2x$.

Неравенство вида $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)}$

$$\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \quad \text{(УР К8)}$$

Замечание. Для строгих неравенств в условиях равносильности надо просто заменить значок \geq или \leq на $>$ или $<$ соответственно.

Пример

Решите неравенство $\sqrt{2x+1} \leq \sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 5}$.

Неравенства вида $\frac{\sqrt{f(x)} - g(x)}{h(x)} \geq 0$.

$$\frac{\sqrt{f(x)} - g(x)}{h(x)} \geq 0 (\leq 0) \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} g(x) < 0, \\ h(x) > 0 (< 0), \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} g(x) \geq 0, \\ \frac{f(x) - g^2(x)}{h(x)} \geq 0 (\leq 0). \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (\text{УР К9})$$

**Примеры. Решите
неравенства**

$$\frac{4x + 15 - 4x^2}{\sqrt{4x + 15} + 2x} \geq 0.$$

$$\frac{\sqrt{2-x} + 4x - 3}{x} \geq 2.$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3} - 2(x + 7)}{x^2 - x - 72} \leq 0.$$