

## Занятие 3.

Решение неоднородных систем  
линейных алгебраических уравнений  
методом Гаусса.

Теорема Кронекера-Капелли

$$\underline{691} \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases}$$

$$\hat{A} = \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 13 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \text{Rg} \hat{A} = \text{Rg} A = 2 < n = 4 \Rightarrow \dim S_0 = n - r = 2$$

По теореме Кронекер-Капелли система совместна:  $\delta_{0n} = \delta_{00} + \delta_{2n}$

Решаем однородную систему:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$x_1, x_2$  - свободные неизвестные

1) Положим  $x_1 = 1, x_2 = 0 \Rightarrow$

$$x_4 = 0, x_3 = -3 \Rightarrow \gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) Положим  $x_1 = 0, x_2 = 1 \Rightarrow$

$$x_4 = 0, x_3 = -4 \Rightarrow \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ФСР: } \left\{ \begin{matrix} \gamma^1 \\ \gamma^2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\alpha_{00} = c_1 \gamma^1 + c_2 \gamma^2 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -3c_1 - 4c_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Перейдем к поиску  $\alpha_{\gamma H}$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Положим  $x_1 = 0, x_2 = 0 \Rightarrow$

$$x_4 = 1, x_3 = 1 \Rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma H} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Итак,  $\alpha_{0H} = \alpha_{00} + \alpha_{\gamma H} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -3c_1 - 4c_2 + 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

693)  $\hat{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \\ 0 & -29 & 19 & -39 \\ 0 & -13 & 9 & -17 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 7 & 0 & 14 \\ 0 & 14 & 0 & 28 \end{array} \right) \begin{array}{l} -2\alpha_1 + \alpha_3 \\ -6\alpha_1 + \alpha_2 \\ -9\alpha_1 + \alpha_4 \end{array}$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Rg } \hat{A} = \text{Rg } A = 3 \Rightarrow \dim S_0 = 0$$

система имеет единственное решение:

$$x_2 = 2, x_3 = 1, x_1 = 3 \Rightarrow \alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{698} \quad \hat{A} = \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & -18 & -2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 9 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow Rg \hat{A} = 4, Rg A = 3 \Rightarrow \boxed{\text{система несовместна}}$$

$$\underline{707} \quad \hat{A} = \left( \begin{array}{ccccc|c} 12 & 14 & -15 & 23 & 27 & 5 \\ 16 & 18 & -22 & 29 & 37 & 8 \\ 18 & 20 & -21 & 32 & 41 & 9 \\ 10 & 12 & -16 & 20 & 23 & 4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -30 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -30 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -21 & 5 & 3 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -a_4 \rightarrow a_1 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -30 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & -2 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow Rg \hat{A} = Rg A = 3 < n = 5$$

$\Rightarrow$  система совместна и

$$\dim S_0 = n - r = 2$$

$x_4, x_5$  - свободные неизвестные

I Решаем однородную систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_2 - 30x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 0 \\ 9x_3 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

1) Положим  $x_4 = 2, x_5 = 0$

$$\Rightarrow x_3 = 0, x_2 = -5, x_1 = 2 \Rightarrow \underset{\uparrow}{y}^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) Положим  $x_4=0, x_5=18 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_3=4, x_2=15, x_1=-53 \Rightarrow \gamma^2 = \begin{pmatrix} 53 \\ 15 \\ 4 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix}$$

ФСР:  $\{\gamma^1, \gamma^2\} \Rightarrow \alpha_{00} = c_1 \gamma^1 + c_2 \gamma^2$

II Решаем неоднородную систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 1 \\ 2x_2 - 30x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 0 \\ 9x_3 - 2x_5 = -1 \end{cases}$$

Положим  $x_4=0, x_5=0$

$$\Rightarrow x_3 = -\frac{1}{9}, x_2 = -\frac{5}{3}, x_1 = \frac{20}{9}$$

$$\Rightarrow \alpha_{ZH} = \begin{pmatrix} \frac{20}{9} \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{9} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{OH} = \alpha_{00} + \alpha_{ZH} = \begin{pmatrix} 2c_1 - 53c_2 + 20/9 \\ -5c_1 + 15c_2 - 5/3 \\ 4c_2 - 1/9 \\ 2c_1 \\ 18c_2 \end{pmatrix}$$

712 Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значений параметра  $\lambda$ :

$$\hat{A} = \left( \begin{array}{cccc|c} 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & \lambda \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \\ 0 & 4 & 14 & 38 & \lambda - 14 \end{array} \right) \begin{array}{l} -a_2 \rightarrow a_1 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array} \right)$$

При  $\lambda \neq 0$  система несовместна.

При  $\lambda = 0$  система совместна,  
т.к.  $\text{Rg } \hat{A} = \text{Rg } A = 2 \Rightarrow \dim S_0 = 4 - 2 = 2$

$x_3, x_4$  — свободные неизвестные

I Решаем однородную систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_2 + 7x_3 + 19x_4 = 0 \end{cases}$$

1) Положим  $x_3 = 2, x_4 = 0$

$$\Rightarrow x_2 = 7, x_1 = 5 \Rightarrow \underset{\downarrow}{y'} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2) \text{ Положим } x_3 = 0, x_4 = -2 \Rightarrow$$

$$x_2 = 19, x_1 = 13 \Rightarrow \gamma^2 = \begin{pmatrix} 13 \\ 19 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{ФОР: } \{\gamma^1, \gamma^2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 19 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\alpha_{00} = c_1 \gamma^1 + c_2 \gamma^2$$

II Решаем неоднородную систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 2 \\ 2x_2 + 7x_3 + 19x_4 = -7 \end{cases}$$

$$\text{Положим } x_3 = 0, x_4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = -\frac{7}{2}, x_1 = -\frac{3}{2} \Rightarrow \alpha_{\text{ПН}} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -7/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Итак, при  $\lambda = 0$

$$\alpha_{\text{ОН}} = \alpha_{00} + \alpha_{\text{ПН}} = \begin{pmatrix} 5c_1 + 13c_2 - 3/2 \\ 7c_1 + 19c_2 - 7/2 \\ -2c_1 \\ -2c_2 \end{pmatrix}$$

Дома: П. 692, 694, 700, 704, 708, 713, 717