Занятие 3.

Решение неоднородных систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

Теорема Кронекера-Капелли

691

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3 \\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7 \\ 9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13 \end{cases}$$

$$\hat{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 3&4&1&2&3 \\ 6&8&2&5&7 \\ 9&12&3&10&13 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 3&4&1&2&3 \\ 0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&4&4 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 3&4&1&2&3 \\ 0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad Rg\hat{A}=RgA=2<n=4 \Rightarrow \dim S_0=n-r=2$$

По теореме Кронекер-Капелли система совместна: $\alpha_{он}=\alpha_{оо}+\alpha_{чн}$

Решаем однородную систему:

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=0 \\ x_4=0 \end{cases}$$

x_1, x_2 – свободные неизвестные

1) Положим $x_1=1,\ x_2=0 \Rightarrow$

$x_4=0,\ x_3=-3 \Rightarrow \gamma^1=\begin{pmatrix}1\\0\\-3\\0\end{pmatrix}$

2) Положим $x_1=0,\ x_2=1 \Rightarrow$

$x_4=0,\ x_3=-4 \Rightarrow \gamma^2=\begin{pmatrix}0\\1\\-4\\0\end{pmatrix}$

ФСР: $\{\gamma^1,\gamma^2\}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-4\\0\end{pmatrix}\right\}$

$$\underset{\downarrow}{\alpha}_{oo} = c_1 \underset{\downarrow}{\gamma}^1 + c_2 \underset{\downarrow}{\gamma}^2 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -3c_1 - 4c_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Перейдем к поиску $\underset{\downarrow}{\alpha}_{чн}$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Положим $x_1 = 0$, $x_2 = 0 \Rightarrow$

$x_4 = 1$, $x_3 = 1 \Rightarrow \underset{\downarrow}{\alpha}_{чн} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Итак, $\boxed{\underset{\downarrow}{\alpha}_{он} = \underset{\downarrow}{\alpha}_{oo} + \underset{\downarrow}{\alpha}_{чн} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -3c_1 - 4c_2 + 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

693

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \\ 0 & -29 & 19 & -39 \\ 0 & -13 & 9 & -17 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 7 & 0 & 14 \\ 0 & 14 & 0 & 28 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ -2a_4 \to a_3 \\ -6a_2 \to a_2 \\ -9a_2 \to a_4 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow Rg\hat{A} = Rg A = 3 \Rightarrow \dim S_0 = 0$$

система имеет единственное решение:

$x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_1 = 3 \Rightarrow \boxed{\underset{\downarrow}{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$

698

$$\hat{A}=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & -18 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 9 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow Rg\,\hat{A}=4,\ Rg\,A=3 \Rightarrow$ $\boxed{\text{система несовместна}}$

707

$$\hat{A}=\left(\begin{array}{ccccc|c} 12 & 14 & -15 & 23 & 27 & 5 \\ 16 & 18 & -22 & 29 & 37 & 8 \\ 18 & 20 & -21 & 32 & 41 & 9 \\ 10 & 12 & -16 & 20 & 23 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -30 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -30 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -21 & 5 & 3 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} -a_4+\to a_1 \\ \sim \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -30 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow Rg\,\hat{A}=Rg\,A=3<n=5$$

$\Rightarrow$ система совместна и

$\dim S_0 = n-r=2$

$x_4,\ x_5$ – свободные неизвестные

I Решаем однородную систему:

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3+3x_4+4x_5=0 \\ 2x_2-30x_3+5x_4+5x_5=0 \\ 9x_3-2x_5=0 \end{cases}$$

1) Положим $x_4=2,\ x_5=0$

$\Rightarrow x_3=0,\ x_2=-5,\ x_1=2 \Rightarrow \gamma^1=\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) Положим $x_4 = 0,\ x_5 = 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_3 = 4,\ x_2 = 15,\ x_1 = -53 \Rightarrow \gamma^2 = \begin{pmatrix} -53 \\ 15 \\ 4 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix}$

ФСР: $\{\gamma^1, \gamma^2\} \Rightarrow \alpha_{oo} = C_1\gamma^1 + C_2\gamma^2$

II Решаем неоднородную систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 1 \\ 2x_2 - 30x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 0 \\ 9x_3 - 2x_5 = -1 \end{cases}$$

Положим $x_4 = 0,\ x_5 = 0$

$\Rightarrow x_3 = -\frac{1}{9},\ x_2 = -\frac{5}{3},\ x_1 = \frac{20}{9}$

$\Rightarrow \alpha_{чн} = \begin{pmatrix} \frac{20}{9} \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{9} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\alpha_{он} = \alpha_{oo} + \alpha_{чн} = \begin{pmatrix} 2C_1 - 53C_2 + 20/9 \\ -5C_1 + 15C_2 - 5/3 \\ 4C_2 - 1/9 \\ 2C_1 \\ 18C_2 \end{pmatrix}}$$

712 Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значений параметра λ:

$$\hat{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}5&-3&2&4&3\\4&-2&3&7&1\\8&-6&-1&-5&9\\7&-3&7&17&\lambda\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&-1&-3&2\\0&2&7&19&-7\\0&2&7&19&-7\\0&4&14&38&\lambda-14\end{array}\right)-a_2\to a_1\ \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&-1&-3&2\\0&2&7&19&-7\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\lambda\end{array}\right)$$

При $\lambda\neq 0$ система несовместна.

При $\lambda=0$ система совместна, т.к. $Rg\,\hat{A}=Rg\,A=2 \Rightarrow \dim S_0=4-2=2$

x_3, x_4 – свободные неизвестные

I Решаем однородную систему

$$\begin{cases}x_1-x_2-x_3-3x_4=0\\ 2x_2+7x_3+19x_4=0\end{cases}$$

1) Положим $x_3=-2$, $x_4=0$

$\Rightarrow x_2=7,\ x_1=5 \Rightarrow \vec{\gamma}^{\,1}=\begin{pmatrix}5\\7\\-2\\0\end{pmatrix}$

2) Положим $x_3=0$, $x_4=-2$ $\Rightarrow$
$x_2=19$, $x_1=13$ $\Rightarrow$ $\vec{\gamma}^{\,2}=\begin{pmatrix}13\\19\\0\\-2\end{pmatrix}$

ФСР: $\{\vec{\gamma}^{\,1},\vec{\gamma}^{\,2}\}=\left\{\begin{pmatrix}5\\7\\-2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}13\\19\\0\\-2\end{pmatrix}\right\}$

$\vec{\alpha}_{оо}=c_1\vec{\gamma}^{\,1}+c_2\vec{\gamma}^{\,2}$

$\underline{II}$ Решаем неоднородную систему:

$$\begin{cases}x_1-x_2-x_3-3x_4=2\\ \quad 2x_2+7x_3+19x_4=-7\end{cases}$$

Положим $x_3=0$, $x_4=0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $x_2=-\frac{7}{2}$, $x_1=-\frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ $\vec{\alpha}_{чн}=\begin{pmatrix}-3/2\\-7/2\\0\\0\end{pmatrix}$

Итак, при $\lambda=0$

$$\boxed{\vec{\alpha}_{он}=\vec{\alpha}_{оо}+\vec{\alpha}_{чн}=\begin{pmatrix}5c_1+13c_2-3/2\\7c_1+19c_2-7/2\\-2c_1\\-2c_2\end{pmatrix}}$$

<u>Дома</u>: П.692, 694, 700, 704, 708, 713, 717