



# Методы ОПТИМИЗАЦ ИИ

курс  
лекций

---

# **ЗАДАЧА ВЫБОРА ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ**

# 1. Описание задачи

---

Предположим, что инвестиционная фирма может вложить наличный капитал  $K$  в следующем инвестиционном периоде в ценные бумаги  $N$  видов, требуется определить соответствующие доли вложений. Пусть  $x_j, j = \overline{1, N}$ , – величина капитала, вкладываемого в ценные бумаги  $j$ -го вида. Тогда на переменные  $x_j$  накладываются следующие ограничения:

$$\sum_{j=1}^N x_j \leq K,$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, N}.$$

Предположим, что фирма имеет статистические данные о доходности от вложений  $r_j(t), j = \overline{1, N}, t = \overline{1, T}$ , для каждого вида ценных бумаг за  $T$  периодов, начиная с периода  $t_0$ . Доходность  $r_j(t)$  определяется как доход за период  $t$  на одну денежную единицу вложений в ценные бумаги вида  $j$ .

# 1. Описание задачи

---

Величину  $r_j(t)$  можно определить из соотношения

$$r_j(t) = \frac{c_j(t+1) - c_j(t) + d_j(t)}{c_j(t)},$$

где  $c_j(t)$  – цена бумаг  $j$ -го типа на начало периода  $t$ ;

$d_j(t)$  – суммарные дивиденды, полученные за период  $t$ .

Значения  $r_j(t)$  непостоянны и могут сильно колебаться от периода к периоду. Эти значения могут иметь любой знак или быть нулевыми. Для оценки целесообразности вложений в ценные бумаги  $j$ -го вида следует вычислить *среднюю* или *ожидаемую доходность*  $\mu_j$  от ценных бумаг вида  $j$

$$\mu_j = \frac{1}{T} \sum_{t=t_0}^{t_0+T-1} r_j(t).$$



# 1. Описание задачи

---

Средний или ожидаемый доход  $E(x)$  портфеля ценных бумаг определяется следующим образом:

$$E(x) = \sum_{j=1}^N \mu_j x_j.$$

Наряду со средним (ожидаемым) доходом важнейшей характеристикой портфеля ценных бумаг является риск, связанный с инвестициями. В качестве меры *инвестиционного риска* можно рассматривать величину отклонения доходности от ее среднего значения за последние  $T$  периодов. Тогда оценкой инвестиционного риска для бумаг вида  $j$  является *дисперсия*  $\sigma_{jj}^2$ , которая вычисляется по формуле

$$\sigma_{jj}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=t_0}^{t_0+T-1} [r_j(t) - \mu_j]^2.$$

# 1. Описание задачи

---

Кроме того, курсы некоторых ценных бумаг подвержены совместным колебаниям (примерами таких ценных бумаг являются акции нефтяных и автомобильных компаний). Оценкой инвестиционного риска для пары видов ценных бумаг, принадлежащих к взаимосвязанным областям экономики, является *ковариация*  $\sigma_{ij}^2$ , которая вычисляется по формуле

$$\sigma_{ij}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=t_0}^{t_0+T-1} [r_i(t) - \mu_i][r_j(t) - \mu_j].$$

Заметим, что при  $i=j$  эта величина сводится к дисперсии бумаг вида  $j$ .

Таким образом, в качестве меры инвестиционного риска портфеля ценных бумаг может служить величина

$$V(x) = \sum_{j=1}^N \sigma_{jj}^2 x_j^2 + \sum_i \sum_{j \neq i} \sigma_{ij}^2 x_i x_j.$$

Отметим, что слагаемые двойной суммы приведенного выражения определяются лишь для тех пар видов ценных бумаг, которые принадлежат к взаимосвязанным областям экономики.



# 1. Описание задачи

---

На основании описанных характеристик – ожидаемый доход  $E(x)$  и инвестиционный риск  $V(x)$  – предложено несколько моделей, оптимизирующих портфель ценных бумаг. Рассмотрим три из них.

**Модель 1.** Максимизация ожидаемого дохода при ограничении на общий объем инвестиций.

Модель имеет вид

$$\begin{aligned} E(x) &= \sum_{j=1}^N \mu_j x_j \rightarrow \max, \\ \sum_{j=1}^N x_j &\leq K, \\ x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Данная модель является моделью линейного программирования (ЛП). Оптимальное решение  $x^* = \{x_j^*\}$ ,  $j = \overline{1, N}$ ,

$E^* = E(x^*)$  может быть найдено, например, симплекс-методом.

Портфель ценных бумаг может также формироваться с учетом различных ограничений, связанных с политикой фирмы.

# 1. Описание задачи

---

**Модель 2.** Максимизация ожидаемого дохода при ограничениях, определяемых политикой фирмы.

Различные виды ценных бумаг можно отнести к различным группам инвестиционного риска. Например:

1-я группа – низкий риск;

2-я группа – средний риск;

3-я группа – высокий риск.

К группе 1 могут быть отнесены обычные облигации, текущие банковские счета, банковские депозитные сертификаты и др. Такие «безопасные» с точки зрения риска инвестиции дают, однако, небольшой доход.

К группе 2 могут быть отнесены обычные акции. Доход от таких ценных бумаг выше, но он подвержен значительным колебаниям, что увеличивает риск.

К группе 3 могут быть отнесены различные «спекулятивные акции». Курс таких ценных бумаг имеет тенденцию к сильным колебаниям, что увеличивает риск, но ожидаемый доход от них может быть достаточно высок.



# 1. Описание задачи

---

Политика фирмы состоит в том, что фирма выделяет из общей суммы наличного капитала определенные доли средств на вложения в бумаги различных групп.

Так, правления многих инвестиционных фирм считают необходимым вкладывать определенную часть капитала в бумаги с низким риском. Такое ограничение записывается следующим образом:

$$\sum_{j \in J_1} x_j \geq b_1 K,$$

где  $J_1$  – множество индексов бумаг 1-й группы.

$b_1$  – минимальная доля вложений в бумаги 1-й группы.

С другой стороны, большинство инвестиционных фирм ограничивают размеры вложений в обычные и тем более «спекулятивные» акции, так как доход от них подвержен значительным колебаниям.

# 1. Описание задачи

---

Такие ограничения записываются следующим образом:

$$\sum_{j \in J_2} x_j \leq b_2 K,$$
$$\sum_{j \in J_3} x_j \leq b_3 K,$$

где  $J_2, J_3$  – соответственно множества индексов бумаг 2-й и 3-й групп;

$b_2, b_3$  – соответственно максимальные доли вложений в бумаги 2-й и 3-й групп.

Таким образом, оптимизационная модель имеет вид

$$E(x) = \sum_{j=1}^N \mu_j x_j \rightarrow \max,$$

$$\sum_{j=1}^N x_j \leq K,$$

$$\sum_{j \in J_1} x_j \geq b_1 K,$$

$$\sum_{j \in J_2} x_j \leq b_2 K,$$

$$\sum_{j \in J_3} x_j \leq b_3 K,$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, N}.$$

# 1. Описание задачи

---

Данная модель также является моделью ЛП. Оптимальное решение  $x^* = \{x_j^*\}, j = \overline{1, N}, E^* = E(x^*)$  может быть найдено любым из методов ЛП.

Главный недостаток моделей 1 и 2 состоит в том, что риск, связанный с инвестициями, в них не учитывается. Портфель ценных бумаг, который находится в результате решения соответствующих задач ЛП, может обещать высокий средний доход, но при этом инвестиционный риск также будет велик. Вследствие этого истинный доход может оказаться значительно ниже ожидаемого. Этого недостатка лишена модель 3.



# 1. Описание задачи

---

**Модель 3.** Минимизация инвестиционного риска при заданном среднем доходе.

Владельцы ценных бумаг могут быть заинтересованы в получении заданного ожидаемого дохода  $R$  при минимальном риске. Оптимизационная модель в этом случае имеет вид

$$V(x) = \sum_{j=1}^N \sigma_{jj}^2 x_j^2 + \sum_i \sum_{j \neq i} \sigma_{ij}^2 x_i x_j \rightarrow \min,$$

$$E(x) = \sum_{j=1}^N \mu_j x_j \geq R,$$

$$\sum_{j=1}^N x_j \leq K,$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, N}.$$

Отметим, что в модель могут быть введены дополнительные (подобные рассмотренным выше) ограничения, определяемые политикой фирмы.

Данная модель является моделью квадратичного программирования, так как целевая функция квадратичная, а ограничения линейные. Оптимальное решение  $x^* = \{x_j^*\}, j = \overline{1, N}, V^* = V(x^*)$  может быть найдено методом квадратичного программирования.

## 2. Варианты заданий

Гр. 2172121

Гр. 2182221

№ вар.	ФИО	№ вар.	ФИО
1	Галиакберов Рустам Ильдарович (в акад. отпуске)	1	Братанова Ангелина Юрьевна
2	Каримов Ильдар Халилович	2	Варин Камиль Ранисович
3	Лотфуллина Гузель Мунзиловна	3	Вафин Рамат Джавдатович
4	Мотов Антон Олегович	4	Душкин Антон Эдуардович
5	Сагидуллин Булат Рустемович (в акад. отпуске)	5	Карпов Даниил Васильевич
6	Салахов Руслан Расимович (в акад. отпуске)	6	Назмиев Ленар Рашитович
7	Снетков Степан Александрович	7	Новокшенов Руслан Вячеславович
8	Юшутин Дмитрий Игоревич	8	Падьярова Екатерина Юрьевна
		9	Попков Кирилл Александрович
		10	Порада Даниил Сергеевич
		11	Сайфуллин Руслан Константинович
		12	Сафарова Арина Иркин Кизи
		13	Соколов Максим Владимирович
		14	Спиридонов Михаил Олегович (в акад. отпуске)
		15	Танаева Ольга Вячеславовна
		16	Тимиров Илья Алексеевич
		17	Тюленев Даниил Юрьевич
		18	Фаттахов Расул Тагирович
		19	Хусаинов Артур Айратович
		20	Шушков Данила Андреевич

## 2. Варианты заданий

---

Исходные данные для составления моделей и расчетов помещены в табл. 1 и 2. Всего рассматривается 6 видов ценных бумаг, т.е.  $N=6$ . Предполагается, что к 1-й группе инвестиционного риска относятся бумаги 1-го и 2-го видов, т.е.  $J_1 = \{1,2\}$ , ко 2-й группе – бумаги 3-го и 4-го видов, т.е.  $J_2 = \{3,4\}$ , к 3-й группе – бумаги 5-го и 6-го видов, т.е.  $J_3 = \{5,6\}$ . Также предполагается, что бумаги 2-й группы инвестиционного риска (3-го и 4-го видов) принадлежат к взаимосвязанным областям экономики.

Следует иметь в виду, что данные о доходности ценных бумаг, приведенные в табл. 2, – гипотетические, т.е. не соответствуют реальным ценным бумагам, хотя и отражают характер «поведения бумаг» соответствующего типа.

Величины  $b_i, i = \overline{1,3}$ , указаны в процентах от наличного капитала  $K$ .



## 2. Варианты заданий

---

Номер вариан- та	Периоды времени $t$	Капитал $K$ (тыс. ед.)	Коэффициент (% от $K$ )		
			$b_1$	$b_2$	$b_3$
1	1,2,3,4,5	100	20	45	35
2	2,3,4,5,6	200	30	40	30
3	3,4,5,6,7	300	40	35	25
4	4,5,6,7,8	400	50	30	20
5	5,6,7,8,9	500	25	60	15
6	6,7,8,9,10	600	35	30	35
7	7,8,9,10,11	700	45	25	30
8	8,9,10,11,12	800	20	55	25
9	9,10,11,12,13	120	30	50	20
10	10,11,12,13,14	220	40	45	15

## 2. Варианты заданий

---

Номер вариан- та	Периоды времени $t$	Капитал $K$ (тыс. ед.)	Коэффициент (% от $K$ )		
			$b_1$	$b_2$	$b_3$
11	11,12,13,14,15	320	50	15	35
12	12,13,14,15,16	420	25	45	30
13	13,14,15,16,17	520	35	40	25
14	14,15,16,17,18	620	45	35	20
15	15,16,17,18,19	720	20	65	15
16	16,17,18,19,20	820	30	35	35
17	17,18,19,20,21	140	40	30	30
18	18,19,20,21,22	240	50	25	25
19	19,20,21,22,23	340	25	55	20
20	20,21,22,23,24	440	35	50	15

## 2. Варианты заданий

---

Период време- ни $t$	Доходность					
	$r_1(t)$	$r_2(t)$	$r_3(t)$	$r_4(t)$	$r_5(t)$	$r_6(t)$
1	0,05	0,13	0,1	0,4	1,0	0,5
2	0,08	0,09	-0,2	0,8	-2,0	2,5
3	0,07	0,15	0,0	-0,1	0,0	-1,5
4	0,14	0,11	0,9	0,3	3,0	1,5
5	0,10	0,10	0,3	0,9	-1,0	2,5
6	0,09	0,14	-0,1	0,5	1,5	1,0
7	0,07	0,05	0,7	0,1	2,5	2,0
8	0,12	0,12	0,4	0,6	-1,5	-2,0
9	0,06	0,07	0,2	0,2	3,5	0,5
10	0,11	0,13	0,5	0,4	-0,5	3,5
11	0,07	0,08	0,6	0,0	2,0	-1,0
12	0,05	0,11	-0,2	0,8	0,5	1,5



## 2. Варианты заданий

---

Период време- ни $t$	Доходность					
	$r_1(t)$	$r_2(t)$	$r_3(t)$	$r_4(t)$	$r_5(t)$	$r_6(t)$
12	0,05	0,11	-0,2	0,8	0,5	1,5
13	0,12	0,07	0,8	-0,2	1,0	0,0
14	0,10	0,15	-0,1	0,5	2,5	3,0
15	0,13	0,12	1,0	0,0	-2,0	-0,5
16	0,06	0,10	0,1	0,7	3,0	1,5
17	0,15	0,09	0,7	0,3	1,0	-1,5
18	0,09	0,13	0,0	-0,1	-1,5	3,5
19	0,11	0,06	0,2	0,6	2,0	1,0
20	0,14	0,11	0,6	0,1	-0,5	1,5
21	0,05	0,08	0,9	0,5	3,5	-0,5
22	0,15	0,14	-0,1	1,0	0,0	3,0
23	0,08	0,07	0,8	-0,2	1,5	0,0
24	0,11	0,15	0,3	0,4	-1,0	2,0

## 2. Варианты заданий

Вариант	Модель 3
1	Квадратичное программирование
2	Метод Ньютона
3	Метод аппроксимирующего программирования
4	Метод штрафных функций
5	Квадратичное программирование
6	Метод Ньютона
7	Метод аппроксимирующего программирования
8	Метод штрафных функций
9	Метод аппроксимирующего программирования
10	Метод штрафных функций
11	Метод Ньютона
12	Квадратичное программирование
13	Метод аппроксимирующего программирования
14	Метод Ньютона
15	Метод аппроксимирующего программирования
16	Метод штрафных функций
17	Квадратичное программирование
18	Метод аппроксимирующего программирования
19	Метод штрафных функций
20	Метод Ньютона

### 3. Задание

---

1. Согласно заданному преподавателем варианту определить по табл. 1 величину наличного капитала  $K$ , значения коэффициентов  $b_i, i = \overline{1,3}$ , анализируемые периоды времени  $t$ . Для заданных периодов времени  $t$  из табл. 2 выбрать данные о доходности ценных бумаг  $r_j(t), j = \overline{1,6}$ .

2. Составить задачу оптимизации в соответствии с моделью 1 и найти оптимальное решение  $x^*, E^* = E(x^*)$ .

3. Составить задачу оптимизации в соответствии с моделью 2 и найти оптимальное решение  $x^*, E^* = E(x^*)$ .

4. Составить задачу оптимизации в соответствии с моделью 3. Задаться средним ожидаемым доходом  $R$  и найти оптимальное решение  $x^*, V^* = V(x^*)$ .



### 3. Задание

---

5. Записать полученные результаты в сводную таблицу следующего вида.

Тип модели	$x_1^*$	$x_2^*$	$\cdot \cdot \cdot$	$x_6^*$	$E(x^*)$	$V(x^*)$
1						
2						
3						

Сравнить полученные решения по величине ожидаемого дохода и величине инвестиционного риска.

6. Сделать выводы по результатам всех расчетов, сформулировать рекомендации по формированию оптимального портфеля ценных бумаг.

## 4. Требования к оформлению пояснительной записки

Пояснительная записка может быть представлена в тетради или на листах формата А4. Оформление должно удовлетворять требованиям ГОСТа.

Содержание пояснительной записки:

1. Задание (данные, соответствующие конкретному варианту).
2. Краткое описание задачи «портфель ценных бумаг».
3. Модели задачи оптимизации и используемые методы решения.
4. Расчетная часть.
5. Заключение (что сделано в работе; выводы, обосновывающие решение об инвестициях; рекомендации по формированию оптимального портфеля ценных бумаг).

## 4. Требования к оформлению пояснительной записки

---

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ  
НАБЕРЕЖНОЧЕЛНИНСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)  
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО АВТОНОМНОГО  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Сервис транспортных систем»

Контрольная работа

По дисциплине «Методы оптимизации»

На тему:

«Задача выбора портфеля ценных бумаг»

Выполнил студент группы XXXXXXXX

Иванов И.И.

Проверил к.т.н., доцент

Маврин В.Г.

Набережные Челны

2020