Симплекс-метод

ТЕМА 4

НТУУ КПІ ФІОТ АСОІУ ДО-1 Олена Жданова
2020

ТЕМА 4. Симплекс-метод (СМ)

4.1 Ідея симплекс – методу

4.2 Перетворена задача

4.3 Спосіб переходу від одного ДБР до іншого

4.4 Умова оптимальності ДБР

4.5 Схема симплекс – методу

4.6 Збіжність симплекс – методу

Основні визначення та теореми ЛП

(з Теми 3)

Теорема про оптимальність вершини багатогранника

Маємо ЗЛП:

$$c^T x \to \max\ ,$$
$$x \in X\ .$$

Теорема. *Нехай допустима множина* X *задачі ЛП є багатогранником. Тоді ЦФ* $c^T x$ *досягає свого максимуму у вершині* X .

Якщо функція $c^T x$ *набуває максимального значення більш ніж в одній точці, то вона досягає того ж значення в будь-якій точці, що є їх опуклою лінійною комбінацією.*

Базисні розв'язки
(Алгебраїчне представлення вершин)

$$a_{*1} \cdot x_1 + a_{*2} \cdot x_2 + \dots + a_{*n} \cdot x_n = b$$

Визначення. ***Базисом*** $\mathcal{B}$ матриці А називається набір з m лінійно незалежних стовпців $\mathcal{B} = \left\{ a_{*j_1}, a_{*j_2}, \dots, a_{*j_m} \right\}$.

Визначення. ***Базисною матрицею*** називається $(m \times m)$ – матриця, складена із стовпців, що входять в базис $\mathcal{B}$:

$\mathrm{B} = \left[a_{*j_1} \middle| a_{*j_2} \middle| \dots \middle| a_{*j_m} \right]$.

Визначення. ***Базисним розв'язком***, відповідним базису $\mathcal{B}$, називається вектор $x \in R^n$ у якому

– $x_j = 0$ при $a_{*j} \notin \mathcal{B}$

– x_{j_k} є k-й компонент вектора $\mathrm{B}^{-1} b$, де $k = 1, \dots, m$.

Процедура знаходження базисних розв’язків (БР)

1) Вибрати множину $\mathcal{B}$, що складається з m лінійно незалежних стовпців матриці A.

2) Покласти рівними 0 всі компоненти вектора x які відповідні стовпцям, що не входять в $\mathcal{B}$. Ці змінні називатимемо ***небазисними*** (їх $n-m$).

3) Розв’язати m отриманих рівнянь для визначення тих компонент вектора x, що залишилися. Вони називатимуться ***базисними змінними*** (їх m)

Допустимі базисні розв’язки (ДБР)

Визначення. Розв’язок x називається ***допустимим базисним розв’язком (ДБР),*** якщо він є базисним і всі його компоненти невід’ємні.

Якщо нульовий вектор є допустимим, то його завжди вважатимемо за базисний.

Теорема (ДБР=вершина)

Теорема. *Вектор* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ *тоді і тільки тоді є допустимим базисним розв'язком задачі*

$$c^T x \to \max,$$
$$a_{*1} \cdot x_1 + a_{*2} \cdot x_2 + \ldots + a_{*n} \cdot x_n = b,$$
$$x \geq 0,$$

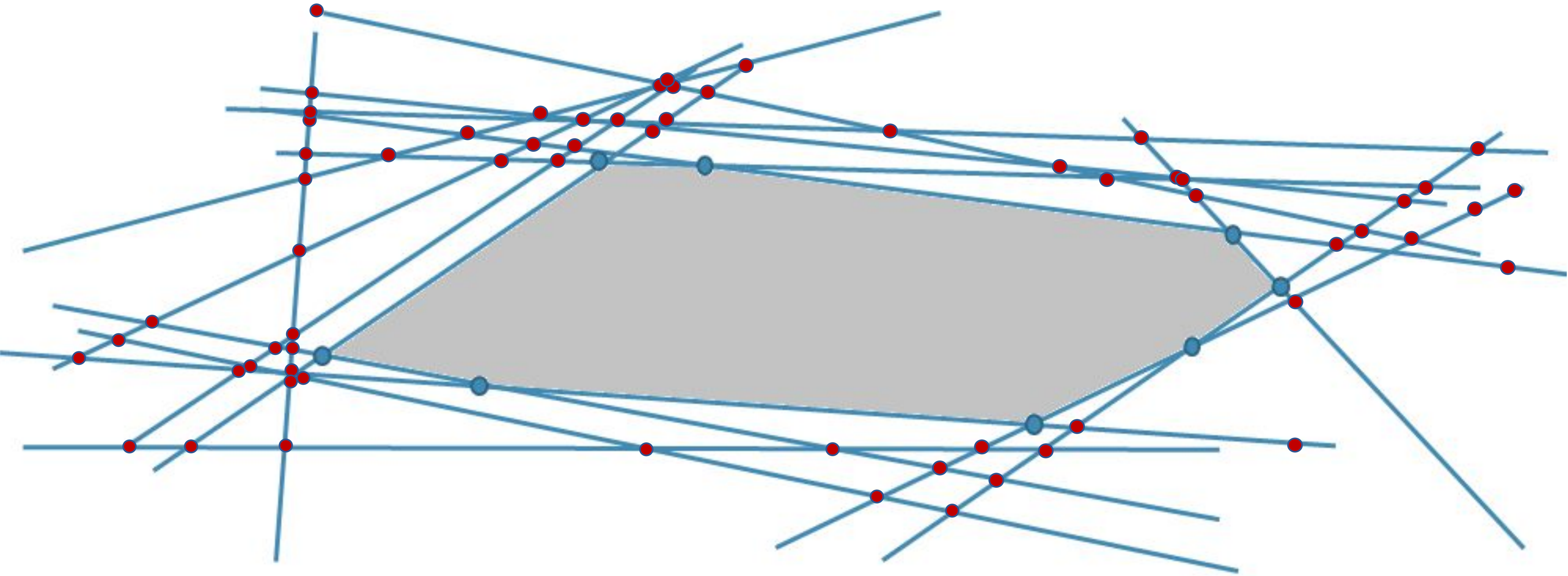
коли точка $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ *є вершиною його багатогранної множини* X.

4.1 Ідея симплекс-методу (СМ)

Принципова схема розв’язання ЗЛП

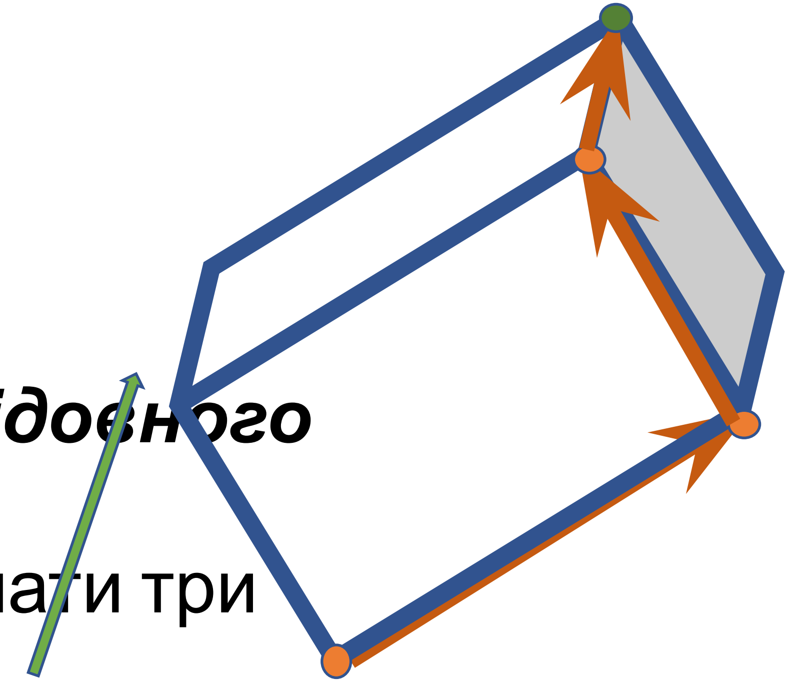
1. Знайти всі базисні розв’язки (БР).
2. Виділити серед них ДБР.
3. Обчислити для кожного ДБР відповідне значення ЦФ.
4. Порівняти значення ЦФ і визначити найкращий розв’язок.

Кількість БР $\sim C_n^m$



Ідея СМ

Складові СМ



Симплекс-метод базується на ідеї послідовного покращення розв'язку.

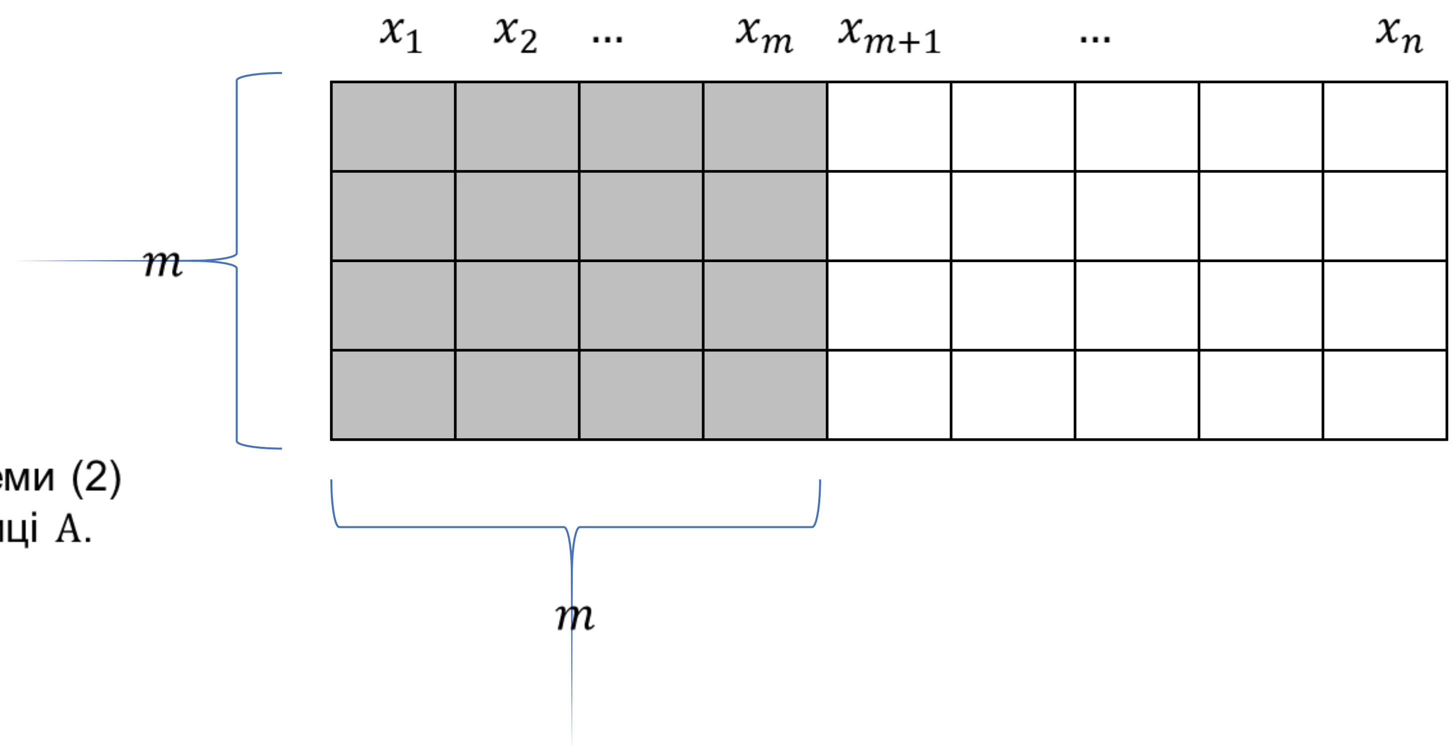
Для реалізації цієї ідеї метод повинен включати три основні складові:

1. Спосіб визначення початкового ДБР.
2. Критерій, по якому можна визначити оптимальність знайденого розв'язку або необхідність його подальшого покращення.
3. Правило переходу до наступного ДБР.

4.2 Перетворена задача

$$c^T x \to \max , \qquad (1)$$
$$Ax = b , \qquad (2)$$
$$x \geq 0 . \qquad (3)$$

Нехай відомо, що деякий вектор x – ДБР системи (2) базис якого утворюють перші m стовпців матриці A.



$$c^T x \to \max\,, \qquad (1)$$

$$Ax = b\,, \qquad (2)$$

$$\boxed{x \geq 0\,.} \qquad (3)$$

$$\left[B \middle| N \right] \left[\frac{x_B}{x_N} \right] = b$$

$$Bx_B + Nx_N = b$$

$$B^{-1}Bx_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$$

$$Ix_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$$

$$\boxed{x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N}$$

Нехай x – ДБР системи (2).

$$A = \left[B \middle| N \right] \quad x = \left[\frac{x_B}{x_N} \right] \quad c = \left[\frac{c_B}{c_N} \right]$$

$$c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N =$$

$$= c_B^T (B^{-1}b - B^{-1}Nx) + c_N^T x_N =$$

$$= \boxed{-(c_B^T B^{-1}N - c_N^T)x_N + c_B^T B^{-1}b}$$

$$c^T x \to \max, \qquad (1)$$
$$Ax = b, \qquad (2)$$
$$x \ge 0. \qquad (3)$$

Нехай x – ДБР системи (2).

$$A = \left[B \middle| N\right] \quad x = \left[\frac{x_B}{x_N}\right] \quad c = \left[\frac{c_B}{c_N}\right]$$

$$-(c_B^T B^{-1} N - c_N^T) x_N + c_B^T B^{-1} b \to \max,$$
$$x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N,$$
$$x_B \ge 0,$$
$$x_N \ge 0.$$

$$\beta = B^{-1} b$$

$$c_B^T \beta - (c_B^T B^{-1} N - c_N^T) x_N \to \max, \qquad (4)$$
$$x_B = \beta - B^{-1} N x_N, \qquad (5)$$
$$x_B, x_N \ge 0. \qquad (6)$$

Перетворена задача

$$c_B^T\beta - (c_B^T B^{-1} N - c_N^T)x_N \to \max, \qquad (4)$$

$$x_B = \beta - B^{-1} N x_N, \qquad (5)$$

$$x_B, x_N \ge 0. \qquad (6)$$

$$\beta = B^{-1} b$$

Система (5) називається ***діагональною системою*** відносно змінних $(x_B)_i, i = \overline{1,m}$ тому що може бути представлена у вигляді:

$$\begin{array}{lllll}
(x_B)_1 & & & & = \beta_1 \\
 & (x_B)_2 & & & = \beta_2 - \left[B^{-1} N x_N\right] \\
 & & \ldots & & \ldots \\
 & & & (x_B)_m & = \beta_m
\end{array}$$

Перетворена задача

$$c_B^T\beta - (c_B^T B^{-1}N - c_N^T)x_N \to \max, \qquad (4)$$

$$x_B = \beta - B^{-1}Nx_N, \qquad (5)$$

$$x_B, x_N \ge 0. \qquad (6)$$

$$\beta = B^{-1}b$$

Оскільки x - ДБР, то у нього $x_N = 0$, значить і x_B приймає числове значення $\beta \ge 0$.

Отже, ДБР $x = \left[\frac{x_B}{x_N}\right] = \left[\frac{\beta}{0}\right]$, а відповідне значення ЦФ становить $c_B^T\beta$.

4.3 Спосіб переходу від одного ДБР до іншого

4.3.1 Спосіб переходу від одного ДБР до іншого на конкретному прикладі

ЗЛП (в СФ):

$$
\begin{aligned}
\max \quad z &= 2x_1 + 1x_2 \\
-x_1 + x_2 &\le 1, \\
x_2 &\le 2, \\
3x_1 + 3x_2 &\le 12, \\
2x_1 &\le 6, \\
x_1, x_2 &\ge 0.
\end{aligned}
$$

ЗЛП в КФ:

$$
\begin{aligned}
\max \quad z &= 2x_1 + 1x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4 \\
-x_1 + x_2 + s_1 &= 1, \\
x_2 + s_2 &= 2, \\
3x_1 + 3x_2 + s_3 &= 12, \\
2x_1 + s_4 &= 6, \\
x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 &\ge 0.
\end{aligned}
$$

$$\max \quad z = 2x_1 + 1x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

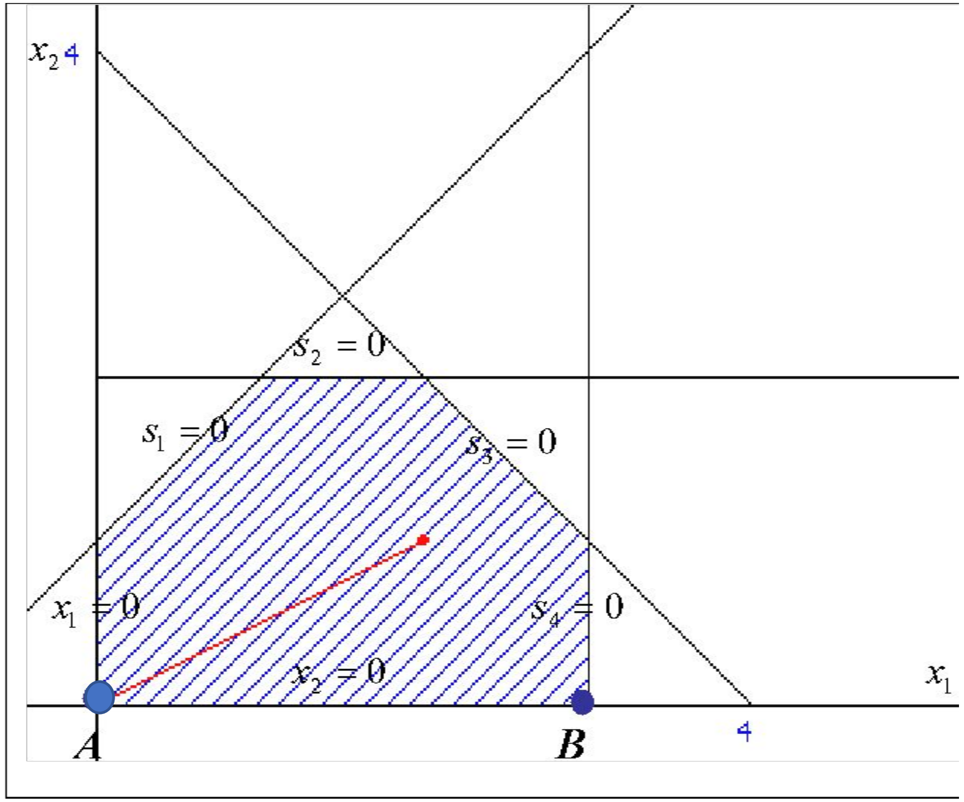
$$\begin{aligned}
-x_1 + x_2 + s_1 \qquad\qquad\qquad &= 1, \quad (1')\\
x_2 \qquad + s_2 \qquad\qquad &= 2, \quad (2')\\
3x_1 + 3x_2 \qquad\qquad + s_3 \qquad &= 12, \quad (3')\\
2x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad + s_4 &= 6, \quad (4')
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0.$$

Ця система є діагональною відносно змінних

$$s_1, s_2, s_3, s_4$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

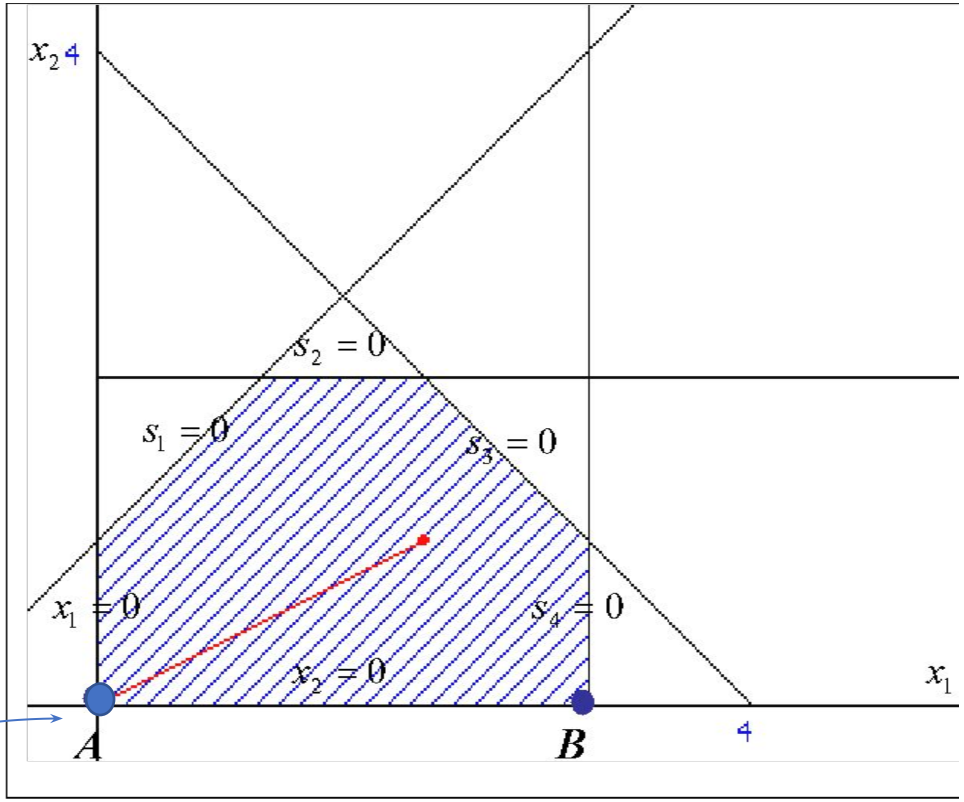


Ця перетворена задача відповідає ДБР, у якого базисними є s_1, s_2, s_3, s_4

$$\max \; z = 2x_1 + 1x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 2 \\ s_3 &= 12 \\ s_4 &= 6 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 &\ge 0. \end{aligned}$$

За визначенням, небазисними є $x_1, x_2 \; (= 0)$



$$x^0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\max \quad z = 2x_1 + 1x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

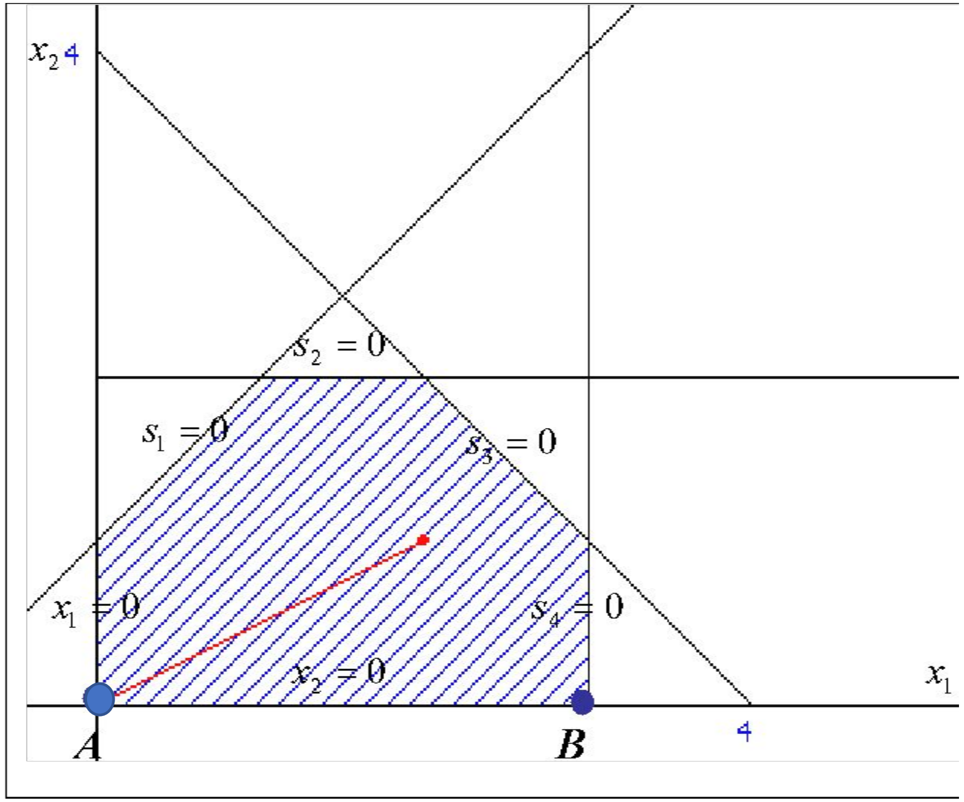
$$\begin{aligned}
s_1 &= 1 - (-1\,x_1) - x_2 \\
s_2 &= 2 - x_2 \\
s_3 &= 12 - 3x_1 - 3x_2 \\
s_4 &= 6 - 2x_1
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0.$$

$$x_B = \beta - B^{-1} N x_N$$

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} x_2$$



$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} x_2$$

Почнемо збільшувати x_1

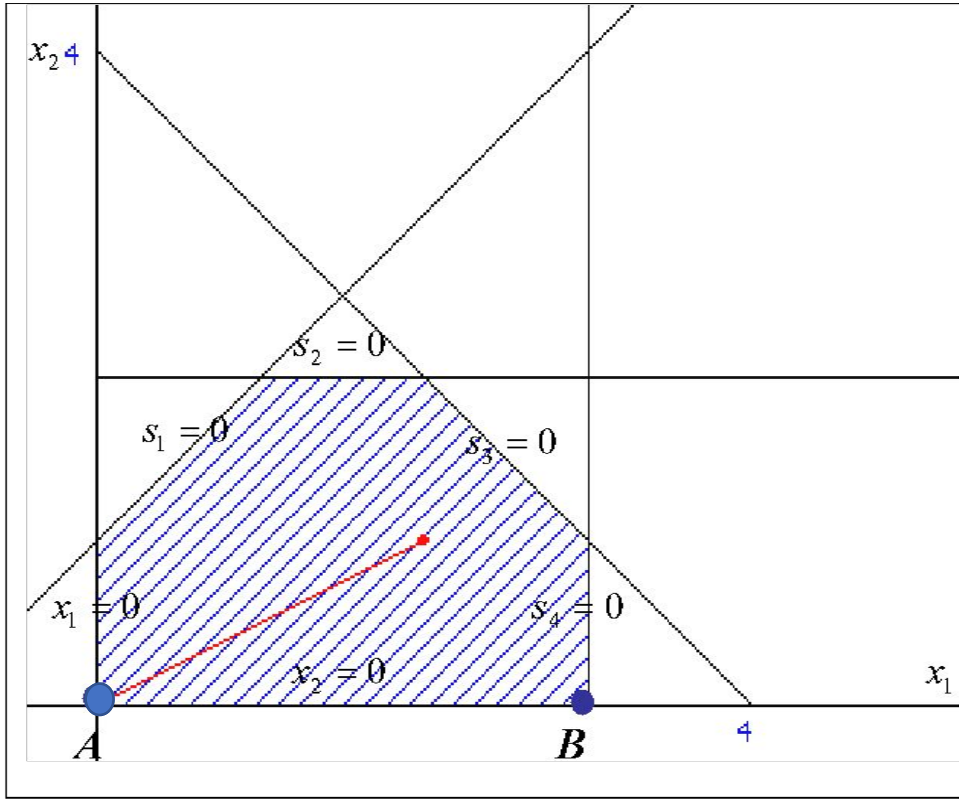
$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} x_1$$

s_1 збільшується

s_2 не змінюється

s_3 зменшується

s_4 зменшується



Максимально допустиме збільшення x_1

$$\theta = \min\left\{\frac{12}{3}, \frac{6}{2}\right\} = 3$$

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} x_1$$

Якщо $x_1 = \theta = 3$ (ця змінна стане базисною), то

$s_4 = 0$ (стане небазисною);

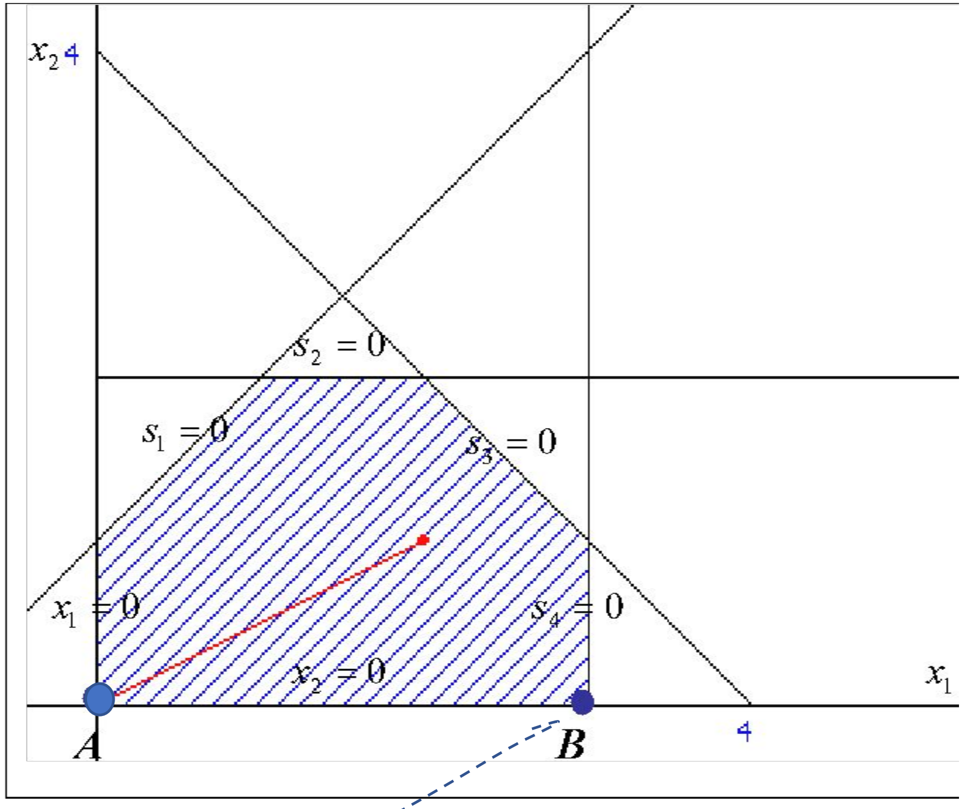
$s_1 = 1 - (-1)\theta = 4$;

$s_2 = 2 - (0)\theta = 2$;

$s_3 = 12 - (3)\theta = 3$.

Це означає, що перейшли у інший ДБР x^1 (вершину B).

$$x^1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$



4.3.2 Спосіб переходу від одного ДБР до іншого у загальному вигляді

Нехай x^0 - ДБР перетвореної задачі:

$$c_B^T \beta - (c_B^T B^{-1} N - c_N^T) x_N \to \max, \qquad (4)$$

$$x_B = \beta - B^{-1} N x_N, \qquad (5)$$

$$x_B, x_N \geq 0. \qquad (6)$$

Перейдемо від x^0 до іншого ДБР задачі.

При цьому розглянемо можливість того, що **тільки одна небазисна змінна почне зростати**, приймаючи додатні значення, в той час, як **решта небазисних змінних залишиться нульовими**

Нехай x^0 - ДБР перетвореної задачі:

$$c_B^T\beta - (c_B^T B^{-1} N - c_N^T) x_N \to \max, \qquad (4)$$

$$x_B = \beta - B^{-1} N x_N, \qquad (5)$$

$$x_B, x_N \geq 0 \qquad (6)$$

Перейдемо від x^0 до іншого ДБР задачі.

При цьому розглянемо можливість того, що **тільки одна небазисна змінна почне зростати**, приймаючи додатні значення, в той час, як **решта небазисних змінних залишиться нульовими**

Перепишемо систему обмежень (5) перетвореної задачі по стовпцях:

$$x_B = \beta - B^{-1} a_{*m+1} (x_N)_{m+1} - \cdots - B^{-1} a_{*p} (x_N)_p - \cdots - B^{-1} a_{*n} (x_N)_n$$

де $(x_N)_j$ - компонента вектора x_N, що відповідає змінній $m + j$

Позначимо $\alpha_{*j} = B^{-1} a_{*j}, j = \overline{m+1, n}$ і перепишемо систему обмежень:

$$x_B = \beta - \alpha_{*m+1} (x_N)_{m+1} - \cdots - \alpha_{*p} (x_N)_p - \cdots - \alpha_{*n} (x_N)_n .$$

Нехай починаючи з нуля зростає змінна $(x_N)_p$ а решта небазисних змінних залишається нульовими. Значить вектор базисних змінних змінюється згідно рівняння.

$$x_B = \beta - \alpha_{*p} (x_N)_p$$

$$x_B = \beta - \alpha_{*p}(x_N)_p$$

При цьому, залежно від значень компонент вектора α_{*p} можливі 3 наступних випадки:

— якщо i – й компонент вектора α_{*p} рівний нулю ($\alpha_{ip} = 0$), то відповідний до нього елемент $(x_B)_i$ вектору x_B залишиться без змін;

— якщо i – й компонент вектора α_{*p} від'ємний ($\alpha_{ip} < 0$), то відповідний до нього елемент $(x_B)_i$ вектору x_B збільшуватиметься;

— якщо i – й компонент додатній ($\alpha_{ip} > 0$) – відповідний до нього елемент $(x_B)_i$ вектору x_B зменшуватиметься і стане менший нуля, коли величина $(x_N)_p$ стане достатньо великою
цього допустити не можна, оскільки буде порушена допустимість розв'язку x^1.

Звідси отримуємо максимально допустиме збільшення значення $(x_N)_p$

$$\theta = \min_{1 \le i \le m | \alpha_{ip} > 0} \left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{ip}} \right\}$$

$$x_B = \beta - \alpha_{*p}(x_N)_p \qquad\qquad \theta = \min_{1 \le i \le m \mid \boldsymbol{\alpha_{ip} > 0}} \left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{ip}} \right\} \quad (7)$$

Нехай мінімум в рівнянні (7) досягається при $i = q$, тоді

$$(x_N)_p = \theta = \frac{\beta_q}{\alpha_{qp}}$$

і в новому ДБР маємо:

$$(x_B)_q = \beta_q - \alpha_{qp} \cdot \underbrace{\frac{\beta_q}{\alpha_{qp}}}_{\theta} = 0$$

$$(x_B)_i = \beta_i - \alpha_{ip} \cdot \underbrace{\frac{\beta_q}{\alpha_{qp}}}_{\theta} \ge 0, \quad 1 \le i \le m, \quad i \ne q.$$

Якщо в нуль перетворюються одночасно дві або більш базисних змінних (маємо справу з виродженим випадком), вибрати ми повинні тільки одну з них.

x^1

$$(x_N)_p = \theta = \frac{\beta_q}{\alpha_{qp}}$$

$$(x_B)_q = \beta_q - \alpha_{qp} \cdot \underbrace{\frac{\beta_q}{\alpha_{qp}}}_{\theta} = 0$$

$$(x_B)_i = \beta_i - \alpha_{ip} \cdot \underbrace{\frac{\beta_q}{\alpha_{qp}}}_{\theta} \geq 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad i \neq q.$$

Отже, ми прийшли до наступної ситуації:

змінна $(x_N)_p$ стала базисною із значенням $\frac{\beta_p}{\alpha_{qp}}$

змінна $(x_B)_q$ – небазисною (із значенням 0).

Це означає таку перестановку в розбитті матриці A, що стовпець a_{*p} стає на місце q-го стовпця матриці B.

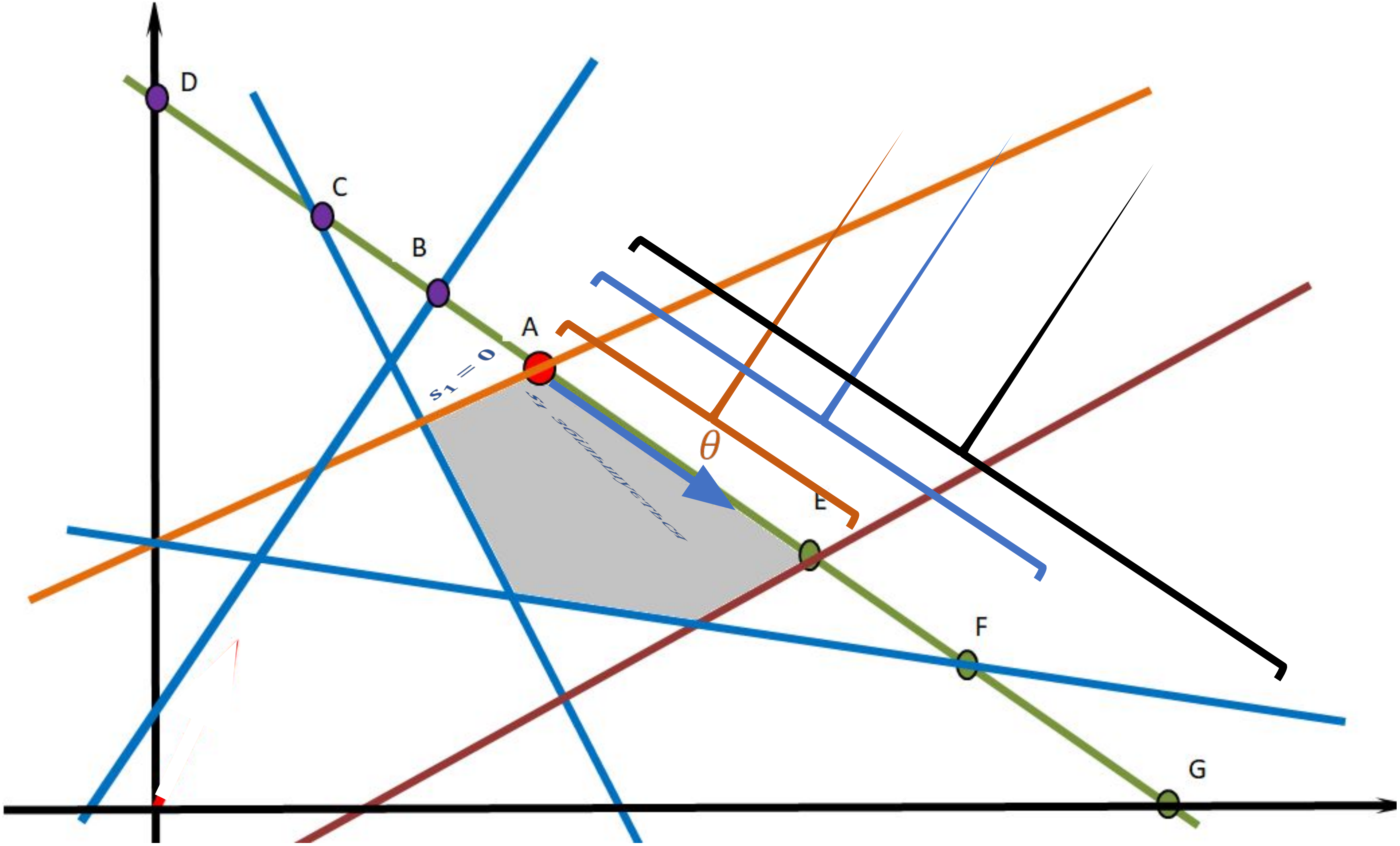
В цьому випадку будемо казати, що:

змінна $(x_N)_p$ «**входить**» в базис,

а змінна $(x_B)_q$ «**виходить**» з базису.

Описаний спосіб переходу від одного ДБР до іншого називається ***операцією заміщення***.

Теорема. *Розв'язок* x^1*, отриманий в результаті операції заміщення, є ДБР.*

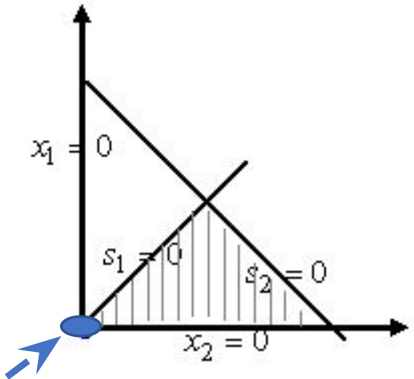

D
C
B
A
$s_1 = 0$
θ
E
F
G

4.3.3 Часткові випадки, які виникають при операції заміщення

$$x_B = \beta - B^{-1} N x_N$$

Випадок 1. Якщо вершина x^0 вироджена (деяке $\beta_i = 0, i = \overline{1,m}$), а відповідне α_{ip} додатне, то $\theta = 0$. В цьому випадку базис змінюється, проте ми не рухаємося в просторі R^n, а залишаємося в тій же вершині.

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + {} &\le 0, \\ x_1 + x_2 &\le 10, \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + s_1 \quad &= 0, \\ x_1 + x_2 + \quad s_2 &= 10, \end{aligned}$$

небазисн. *базисні*

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0$$

x_2 $\Rightarrow$

Базисні змінні приймають значення:

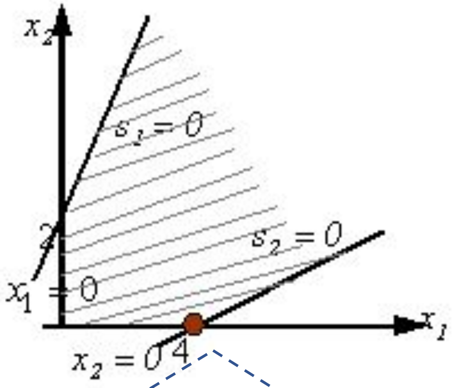
$$\begin{aligned} s_1 &= 0 - 1x_2, \\ s_2 &= 10 - 1x_2, \end{aligned}$$

$$\theta = \min\left\{\frac{0}{1}, \frac{10}{1}\right\} = 0$$

$$x_B = \beta - B^{-1}Nx_N$$

Випадок 2. Якщо все α_{ip} недодатні, то збільшуючи $(x_N)_p$ ми можемо рухатися скільки завгодно далеко, залишаючись при цьому в допустимій множині

$$\begin{cases} -2x_1 + \ x_2 \le 2, \\ \ \ x_1 - 2x_2 \ \le 4, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



$$\begin{cases} -2x_1 + \ x_2 + s_1 \qquad = 2, \\ \ \ x_1 - 2x_2 \qquad + s_2 = 4, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0$$

$$\begin{cases} \qquad -3x_2 + s_1 + 2s_2 = 10, \\ x_1 - 2x_2 \qquad + s_2 = 4, \end{cases}$$

Базисні змінні приймають значення:

$$x_2 \nearrow \quad \Rightarrow \begin{cases} s_1 \ = 10 - (-3)x_2 \\ \ x_1 = 4 \ - (-2)x_2 \end{cases}$$

4.4 Умова оптимальності ДБР

Перетворена задача

$$c_B^T\beta + \boxed{(c_B^T B^{-1}N - c_N^T)} x_N \to \max,$$
$$x_B = \beta - B^{-1}Nx_N,$$
$$x_B, x_N \geq 0.$$

Визначення

Вектор, на який помножується зліва x_N у рівнянні ЦФ перетвореної задачі, називається ***вектором відносних оцінок*** небазисних змінних. Він вказує, в яку сторону і наскільки зміниться ЦФ при зміні компонент x_N.

$$d_N^T = c_B^T B^{-1}N - c_N^T$$

Його j-й елемент визначається так:

$$(d_N)_j = \left(c_B^T B^{-1}N\right)_j - (c_N)_j$$

Перетворена задача

$$c_B^T\beta + \boxed{(c_B^T B^{-1} N - c_N^T)} x_N \to \max,$$
$$x_B = \beta - B^{-1} N x_N,$$
$$x_B, x_N \ge 0.$$

Теорема «Умова оптимальності»

Для ДБР x^0 *операція заміщення, при якій змінна* $(x_N)_p$ *вводиться в базис, змінює значення ЦФ на величину*

$$\theta \cdot (d_N)_p = \theta \cdot (c_B^T B^{-1} a_{*p} - (c_N)_p),$$

де $\theta = \min\limits_{1 \le i \le m, \alpha_{ip} > 0} \left\{ \dfrac{\beta_i}{\alpha_{ip}} \right\}.$

Якщо $d_N \ge 0$, *то* x^0 *оптимальний розв'язок.*

Доведення

Припускатимемо, що змінні перенумеровані таким чином, що перші m стовпців матриці A складають базис x^0.

Позначимо значення ЦФ в $x^0 = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \hline 0 \end{bmatrix}$ через z^0:

$$z^0 = c^T x^0 = \left[c_B^T \mid c_N^T \right] \begin{bmatrix} \beta \\ \hline 0 \end{bmatrix} = c_B^T \beta .$$

Теорема «Умова оптимальності». Частина 2

«Якщо $d_N \geq 0$, *то* x^0 *- оптимальний розв'язок»*

Доведення.

Нехай для ДБР x^0 маємо: $d_N \geq 0$.

По аналогії з вектором $d_N^T = c_B^T B^{-1} N - c_N^T$ сформуємо вектор

$$d_B^T = c_B^T B^{-1} B - c_B^T \text{ (=}\mathbf{0\text{-вектор}}\text{)}$$

Тоді вектор відносних оцінок усіх змінних

$$d^T = \left[\, d_B^T | d_N^T \right] = \left[c_B^T B^{-1} B - \ c_B^T \,| c_B^T B^{-1} N - \ c_N^T \right] =$$

$$= \left[c_B^T B^{-1} B \,| c_B^T B^{-1} N \,\right] - \left[c_B^T \,| c_N^T \right] = \ c_B^T \, B^{-1} [B \ \mid N] = c_B^T \, B^{-1} A$$

Оскільки $d_N \geq 0$ та $d_B = 0$ то $d^T = c_B^T \, B^{-1} A \geq 0$.

$$d^T = c_B^T B^{-1} A \geq 0$$

- Нехай $\bar{x}$ - довільний допустимий розв’язок початкової ЗЛП (не обов'язково базисний), тобто $A\bar{x} = b, \bar{x} \geq 0$

Очевидно, що $d^T \overline{x} \geq 0 \qquad \forall \overline{x} \in X$

$$(c_B^T B^{-1} A - c^T)\overline{x} \geq 0 \qquad \forall \overline{x} \in X$$

$$c_B^T B^{-1} A\overline{x} - c^T \overline{x} \geq 0 \qquad \forall \overline{x} \in X$$

$$c_B^T B^{-1} b - c^T \overline{x} \geq 0 \qquad \forall \overline{x} \in X$$

$$c_B^T \beta - c^T \overline{x} \geq 0 \qquad \forall \overline{x} \in X$$

$$c_B^T \beta \geq c^T \overline{x} \qquad \forall \overline{x} \in X$$

$$c^T x^0 \geq c^T \overline{x} \qquad \forall \overline{x} \in X$$

Отже, x^0 оптимальний розв’язок. ■

Визначення.

ЗЛП називається ***не виродженою***, якщо всі її ДБР не вироджені.

Теореми, що стосуються умов оптимальності (задача на максимум)

$$c_B^T\beta-(c_B^T B^{-1}N-c_N^T)x_N \to \max,$$
$$x_B=\beta-B^{-1}Nx_N,$$
$$x_B, x_N \ge 0.$$

Вектор відносних оцінок небазисних змінних:

$$d_N^T=c_B^T B^{-1}N-c_N^T.$$

Теорема (умова оптимальності)

Якщо $d_N \ge 0$, *то* x^0 *- оптимальний розв'язок ЗЛП.*

Теорема

Нехай ЗЛП є не виродженою, а x^0 *– оптимальний ДБР. Тоді* $d_N \ge 0$.

Теорема

Для того, щоб ДБР x^0 *був опт. розв'язком ЗЛП, необхідно і достатньо існування такого базису для* x^0, *для якого* $d_N \ge 0$.

Теореми, що стосуються умов оптимальності (задача на **мінімум**)

$$c_B^T\beta - (c_B^T B^{-1}N - c_N^T)x_N \to \max,$$
$$x_B = \beta - B^{-1}Nx_N,$$
$$x_B, x_N \geq 0.$$

Вектор відносних оцінок небазисних змінних:

$$d_N^T = c_B^T B^{-1}N - c_N^T.$$

Теорема (умова оптимальності)

Якщо $d_N \leq 0$, *то* x^0 *- оптимальний розв'язок ЗЛП.*

Теорема

Нехай ЗЛП є не виродженою, а x^0 *– оптимальний ДБР. Тоді* $d_N \leq 0$.

Теорема

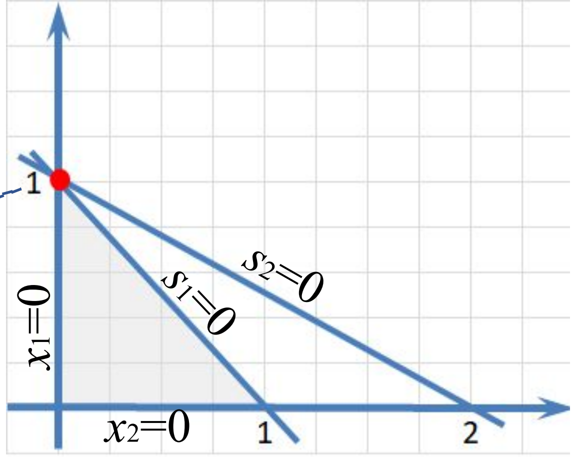
Для того, щоб ДБР x^0 *був опт. розв'язком ЗЛП, необхідно і достатньо існування такого базису для* x^0, *для якого* $d_N \leq 0$.

Розглянемо приклад до теореми (екз.):

Теорема

Для того, щоб ДБР x^0 *був опт. розв'язком ЗЛП, необхідно і достатньо існування такого базису для* x^0, *для якого* $d_N \geq 0$.

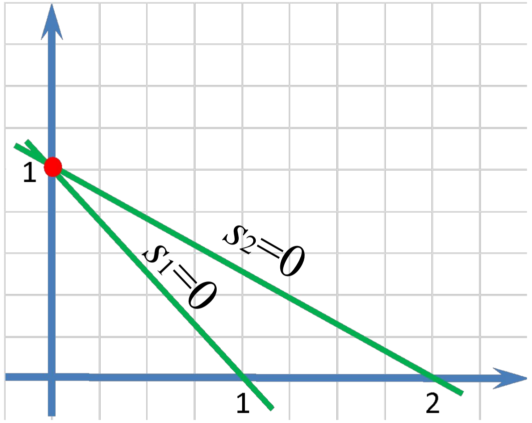
$$
\begin{aligned}
&1x_1 + 3x_2 \to \max,\\
&1x_1 + 1x_2 \le 1,\\
&1x_1 + 2x_2 \le 2,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&1x_1 + 3x_2 + 0s_1 + 0s_2 \to \max,\\
&1x_1 + 1x_2 + 1s_1 = 1,\\
&1x_1 + 2x_2 + 1s_2 = 2,\\
&x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$



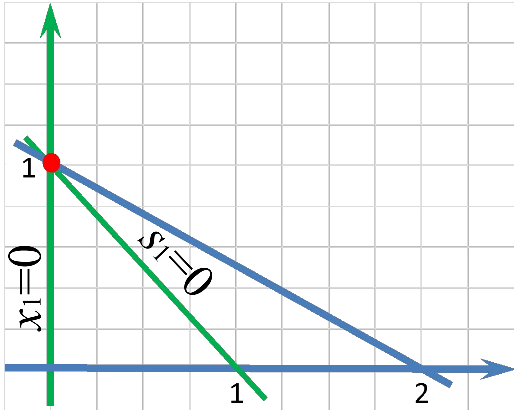
Оптимальна (вироджена) вершина, їй відповідає ТРИ вироджених ДБР:

Небазисні змінні = це ті змінні, які відповідають прямим, перетином яких є аналізована точка

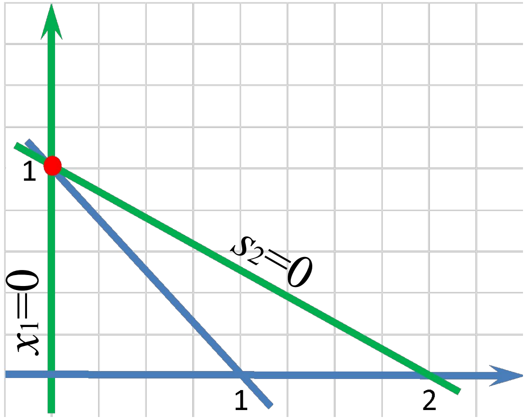
x^1 $\quad \text{В} = \{a_{*x_1}, a_{*x_2}\}$



x^2 $\quad \text{В} = \{a_{*x_2}, a_{*s_2}\}$

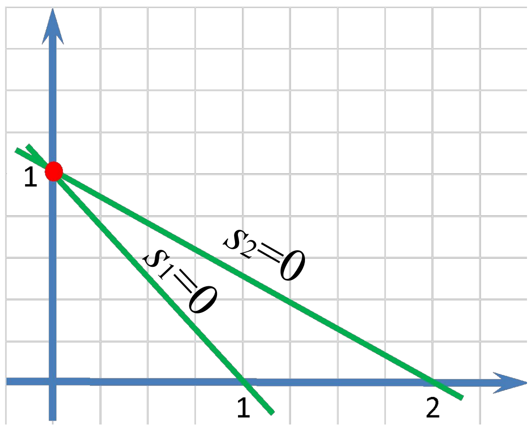


x^3 $\quad \text{В} = \{a_{*x_2}, a_{*s_1}\}$



$$1x_1+3x_2+0s_1+0s_2 \to \max,$$
$$1x_1+1x_2 \quad +1s_1 \quad =1,$$
$$1x_1+2x_2 \qquad +1s_2=2,$$
$$x_1,x_2,s_1,s_2 \ge 0.$$

x^1 $\quad$ B $= \left\{a_{*x_1}, a_{*x_2}\right\}$



$$x_B^0=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \quad c_B=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix} \quad B^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}$$

$$x_N^0=\begin{bmatrix}s_1\\s_2\end{bmatrix} \quad c_N=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad N=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$x_B^0=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\beta=B^{-1}b=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$z^0=c_B^T\cdot\beta=\begin{bmatrix}1&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=3$$

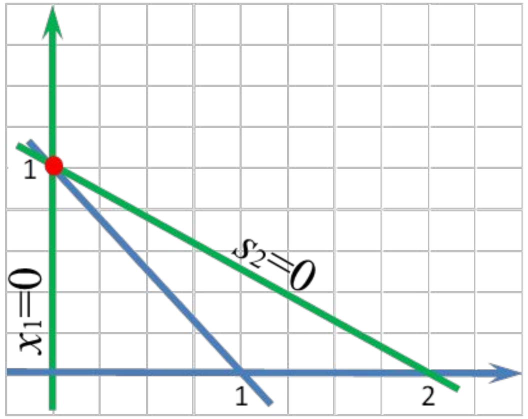
$$d_N^T=c_B^TB^{-1}N-c_N^T$$

$$d_N^T=\begin{bmatrix}d_{s_1}&d_{s_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&2\end{bmatrix}$$

Умова оптимальності НЕ виконується

$$
\begin{aligned}
&1x_1 + 3x_2 + 0s_1 + 0s_2 \to \max,\\
&1x_1 + 1x_2 \quad + 1s_1 \quad = 1,\\
&1x_1 + 2x_2 \qquad + 1s_2 = 2,\\
&x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

x^3 B $= \left\{ a_{*x_2}, a_{*s_1} \right\}$



$x_B^0 = \begin{bmatrix} x_2 \\ s_1 \end{bmatrix}$ $c_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$x_N^0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \end{bmatrix}$ $c_N = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$x_B^0 = \begin{bmatrix} x_2 \\ s_1 \end{bmatrix} = \beta = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z^0 = c_B^T \cdot \beta = \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3$$

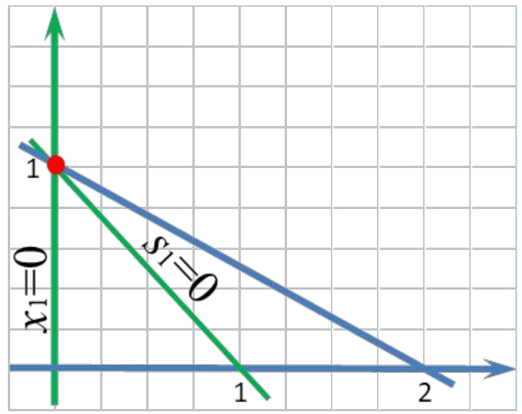
$$d_N^T = c_B^T B^{-1} N - c_N^T$$

$$d_N^T = \begin{bmatrix} d_{x_1} & d_{s_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Умова оптимальності НЕ виконується

$$
\begin{aligned}
&1x_1 + 3x_2 + 0s_1 + 0s_2 \to \max,\\
&1x_1 + 1x_2 \quad + 1s_1 \quad = 1,\\
&1x_1 + 2x_2 \qquad + 1s_2 = 2,\\
&x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

x^2 $\quad \mathrm{B} = \left\{ a_{*x_2}, a_{*s_2} \right\}$



$$x_B^0 = \begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \end{bmatrix} \quad c_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_N^0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \end{bmatrix} \quad c_N = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_B^0 = \begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \end{bmatrix} = \beta = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z^0 = c_B^T \cdot \beta = \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3$$

$$d_N^T = c_B^T B^{-1} N - c_N^T$$

$$d_N^T = \begin{bmatrix} d_{x_2} & d_{s_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Умова оптимальності виконується

Теорема

Для того, щоб ДБР x^0 *був опт. розв'язком ЗЛП, необхідно і достатньо існування такого базису для* x^0*, для якого* $d_N \ge 0$.

Теорема. *Якщо в деякому ДБР ЗЛП існує небазисна змінна* $(x_N)_p$ *така, що* $(d_N)_p < 0$ *і* $\alpha_{*p} \le 0$*, то цільова функція задачі не обмежена на множині допустимих розв'язків*

4.5 Схема симплекс-методу

$$c_B^T\beta - (c_B^T B^{-1}N - c_N^T)x_N \to \max,$$
$$x_B = \beta - B^{-1}Nx_N,$$
$$x_B, x_N \ge 0.$$

Схема симплекс – методу

Крок 0. *Побудова початкового ДБР*

Знайти деякий ДБР x^0 ЗЛП $B,\ B,\ N,\ \beta = B^{-1}b,\ x_B = \beta,\ x_N,\ z^0 = c_B^T\beta$

Крок 1. *Перевірка виконання умови оптимальності*

2.1 Обчислити вектор відносних оцінок небазисних змінних $d_N^T = c_B^T B^{-1}N - c_N^T$.

2.2 Якщо

(*задача на максимум*)	(*задача на мінімум*)
$(d_N)_p \ge 0$	$(d_N)_p \le 0$

то припинити обчислення – поточний ДБР є опт. розв'язком задачі.

Крок 2. *Вибір небазисної змінної* $(x_N)_p$, *що вводиться в множину базисних змінних*

Вибрати p, для якого

(*задача на максимум*)	(*задача на мінімум*)
$(d_N)_p < 0$	$(d_N)_p > 0$

$$(d_N)_p = \max_{j \mid (d_N)_j < 0} \{ \left|(d_N)_j\right| \} \qquad (d_N)_p = \max_{j \mid (d_N)_j > 0} \{(d_N)_j\}$$

Зазвичай в спрощених програмних продуктах

Схема симплекс – методу

$$c_B^T\beta - (c_B^T B^{-1} N - c_N^T) x_N \to \max,$$
$$x_B = \beta - B^{-1} N x_N,$$
$$x_B, x_N \geq 0.$$

Крок 3. *Вибір базисної змінної, що виводиться з множини базисних змінних.*

3.1 Обрахувати **ведучий стовпець**: $\alpha_{*p} = B^{-1} a_{*p}$.

3.2 Умова допустимості

ЯКЩО $\alpha_{*p} \leq 0$, то припинити обчислення – задача не має розв'язку, ЦФ не обмежена зверху (знизу).

ІНАКШЕ вибрати q, для якого виконується $\dfrac{\beta_q}{\alpha_{qp}} = \min\limits_{i \mid \alpha_{ip} > 0} \dfrac{\beta_i}{\alpha_{ip}}$,

(змінна $(x_B)_q$ буде виключена з множини базисних змінних).

Крок 4. *Операція заміщення*

Побудувати базис нового ДБР

(замінивши вектор a_{*q} поточного базису B на вектор a_{*p})

B, N, $\beta = B^{-1} b$, $x_B = \beta$, x_N, $z^0 = c_B^T \beta$ Перейти на крок 1.

Теорема «Умова оптимальності»

Для ДБР x^0 *операція заміщення, при якій змінна* $(x_N)_p$ *вводиться в базис, змінює значення ЦФ на величину*

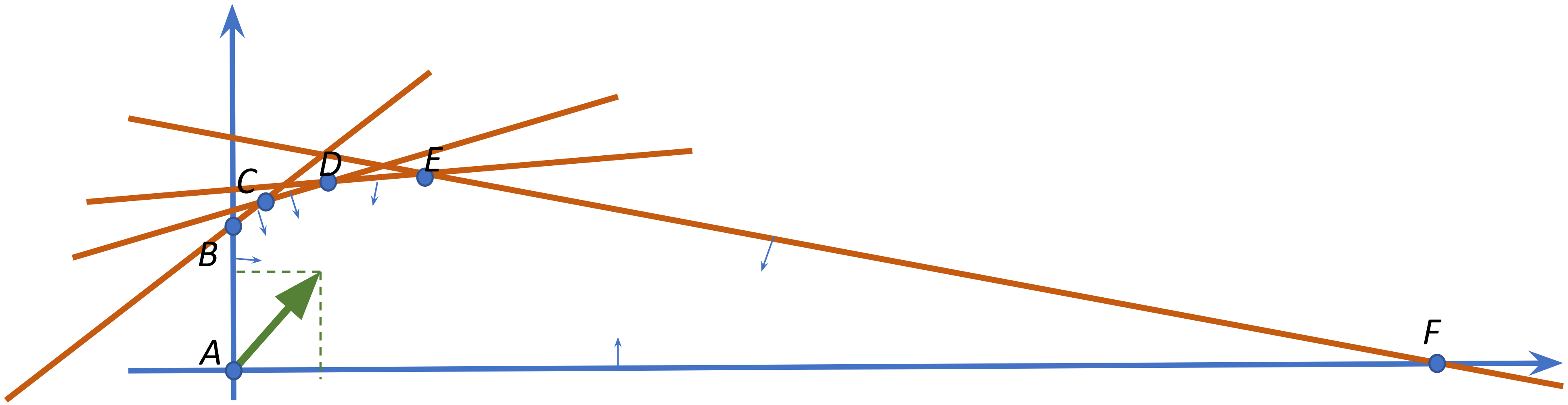
$$\boxed{\theta \cdot (d_N)_p = \theta \cdot (c_B^T B^{-1} a_{*p} - (c_N)_p),}$$

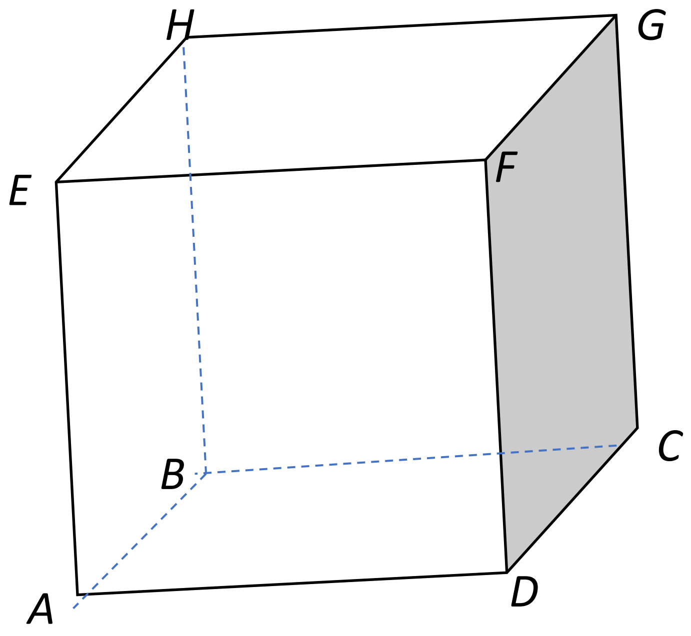
де $\theta = \min\limits_{1 \le i \le m, \alpha_{ip} > 0} \left\{ \dfrac{\beta_i}{\alpha_{ip}} \right\}.$

Самостійно №

Довести, що з того, що ми обираємо $(d_N)_p = \max\limits_{j|(d_N)_j<0} \{|(d_N)_j|\}$, не випливає, що отримаємо максимальний приріст ЦФ.

(+ підібрати числовий приклад, коли буде навпаки)





ABHG

ABHGF

ABHF

BCDFH

BHE

-

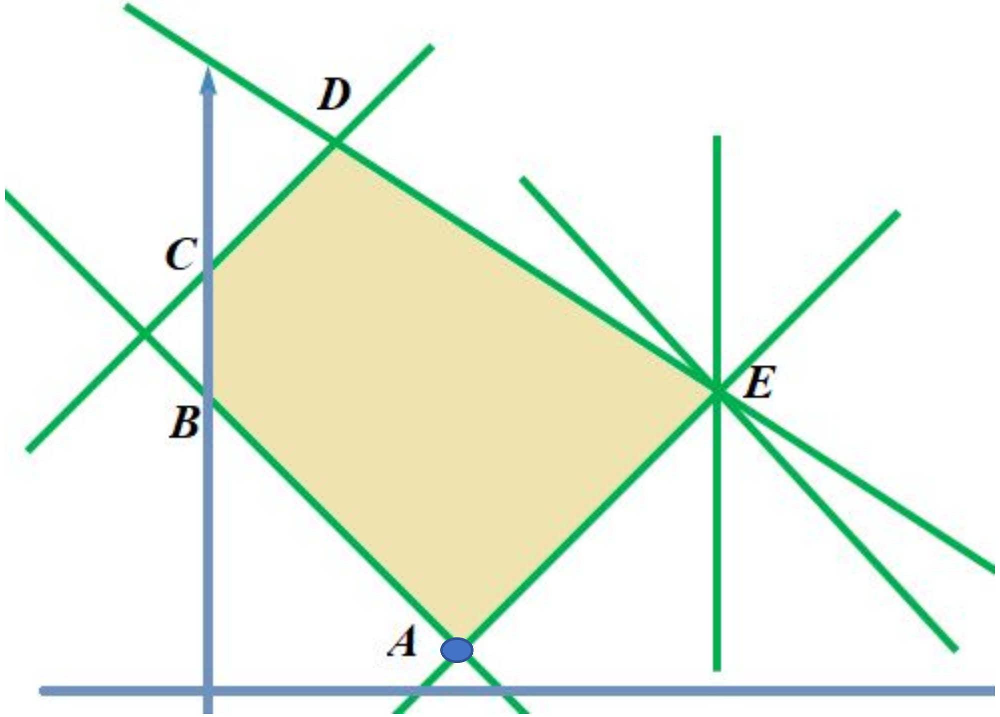
Максимально та мінімально можлива кількість аналізованих ДБР (екз+тести)

max
min

max
min

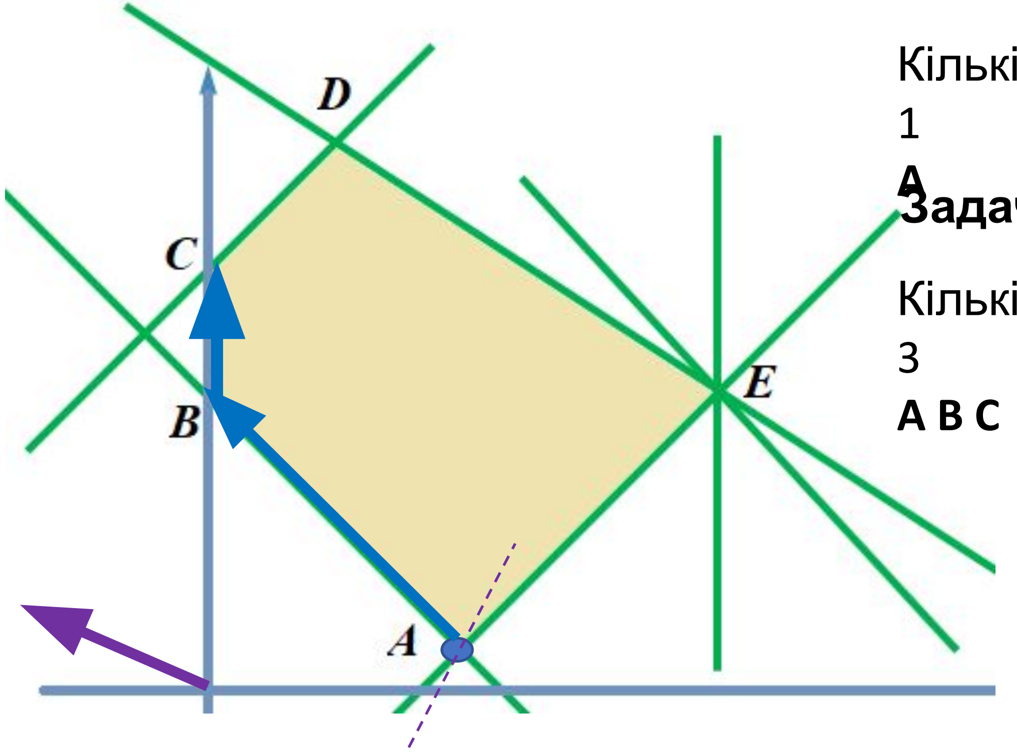
нормал
ь

Напрямок оптиміза ції



Максимально та мінімально можлива кількість аналізованих ДБР (екз.!)

max
min



Задача на min

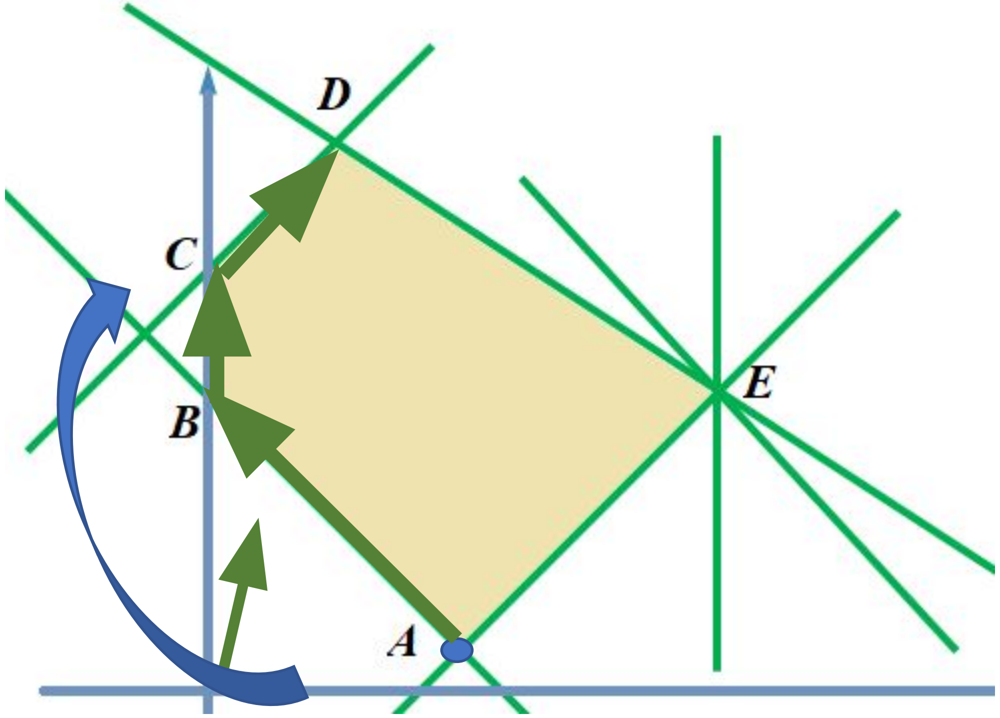
Кількість аналізованих ДБР: 1
A

Задача на max

Кількість аналізованих ДБР: 3
A B C

Максимально та мінімально можлива кількість аналізованих ДБР (екз.!)

max
min



Задача на max

Кількість аналізованих ДБР: 4
A B C D

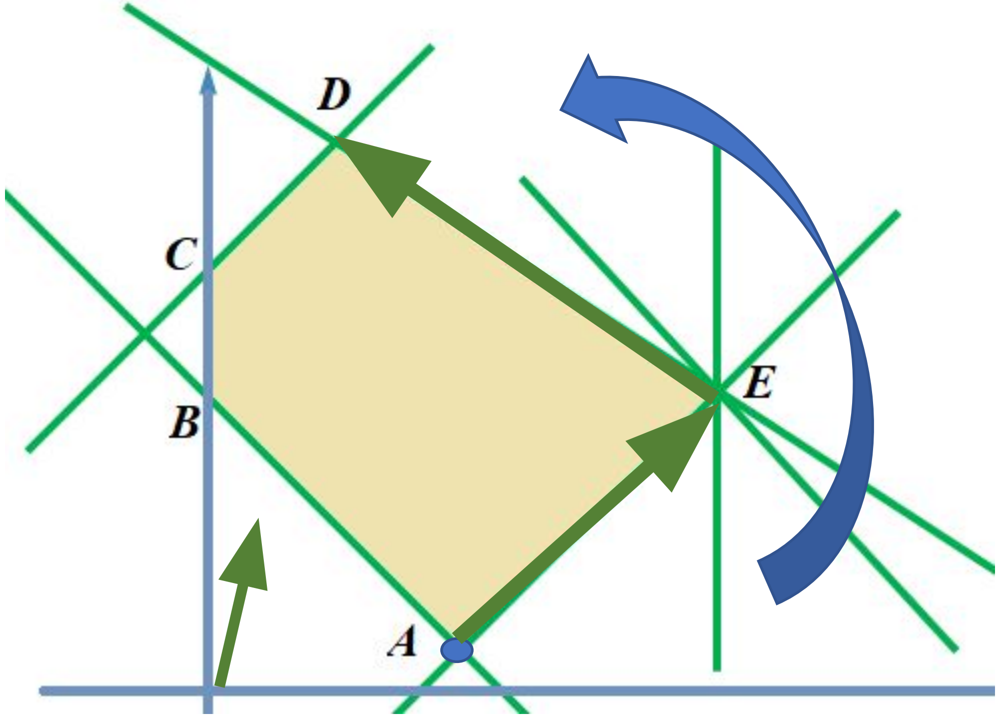
Задача на min

Кількість аналізованих ДБР: 1
A

Коректно: Яка максимальна можлива кількість аналізованих ДБР (за умови відсутності зациклення)

Максимально та мінімально можлива кількість аналізованих ДБР (екз.!)

max
min



Задача на max

Вершині E відповідає
$C_4^2 = 6$ ДБР

Min кількість: 3
A E_j D

Max кількість: 8
A E_1 E_2 E_3 E_4 E_5 E_6 D

Коректно: Яка максимальна можлива кількість аналізованих ДБР за умови відсутності зациклення

4.6 Збіжність симплекс – методу

4.6 Збіжність симплекс – методу

Якщо після кожної ітерації значення ЦФ покащується

симплекс-методом перебираються різні вершини

Зациклення

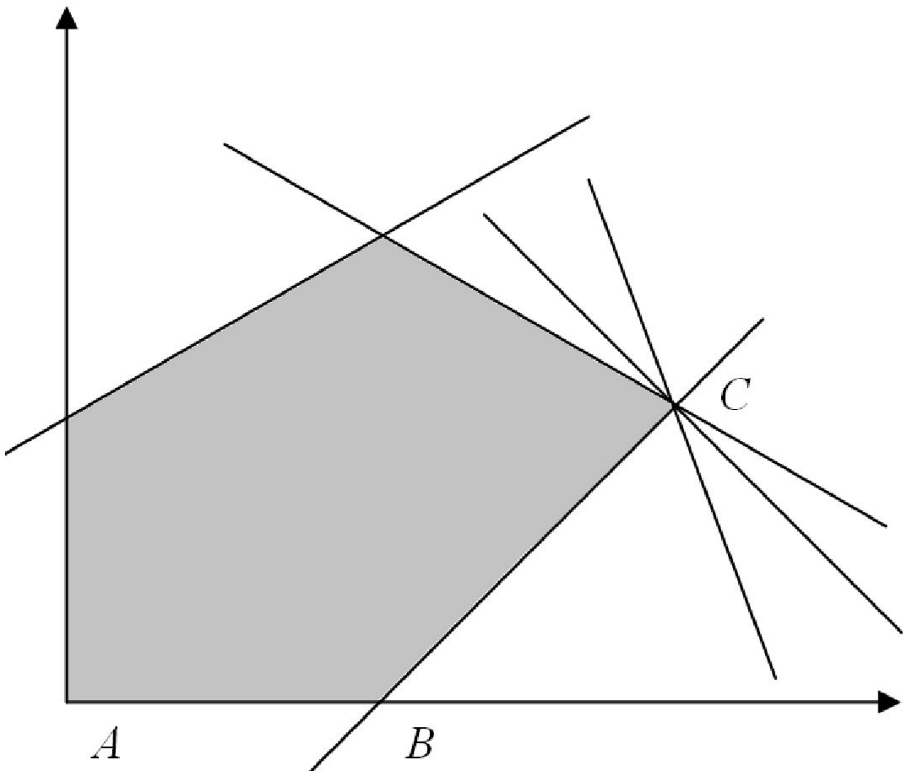
Якщо ж після деякої ітерації значення ЦФ не покращується ()

в процесі перебору вершин деякі вершини можуть повторюватися

і

Причини зациклення

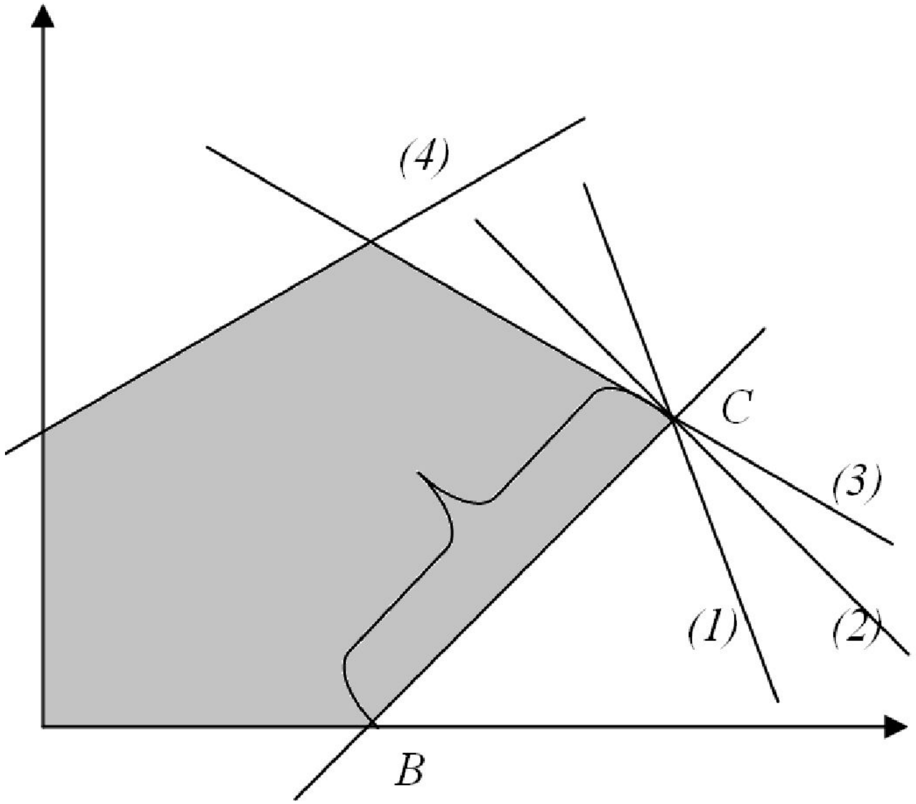
- З *геометричної* точки зору зациклення пояснюється виродженістю поточного розв'язку
- З *практичної* точки зору виродженість пояснюється наявністю надлишкових обмежень
- З *обчислювальної* точки зору, причина зациклення – це не єдиний вибір змінної, що виводиться



Відстань від т. В до прямих (1), (2), (3) одна і та ж

$$\theta = \min\left\{\frac{\beta_1}{\alpha_{1p}};\frac{\beta_2}{\alpha_{2p}};\frac{\beta_3}{\alpha_{3p}};\frac{\beta_4}{\alpha_{4p}}\right\},$$

$$\frac{\beta_1}{\alpha_{1p}} = \frac{\beta_2}{\alpha_{2p}} = \frac{\beta_3}{\alpha_{3p}} = \theta \quad (\min).$$



Три відношення приймають мінімальне значення, але виводимо з базису тільки одну змінну, дві інші, залишаючись базисними, приймають у новому ДБР нульове значення.
На наступній ітерації дві базисні змінні будуть НУЛЬОВИМИ.
І не виключено, що θ буде $= 0$.

Теорема Бленда (правило усунення зациклення)

Якщо змінна, що вводиться в базис, визначається так:

$$p = \min\left\{ j \in I_N \,/\, d_j < 0 \right\},$$

а змінна, що виводиться з базису так:

$$q = \min\left\{ i \in I_B \,/\, \alpha_{ip} > 0, \frac{\beta_i}{\alpha_{ip}} = \theta \right\},$$

де $\theta = \min\limits_{i/\alpha_{ip}>0} \left\{ \dfrac{\beta_i}{\alpha_{ip}} \right\}$, *то зациклення симплекс-метода неможливо.*