

Симплекс-метод

ТЕМА 4

ТЕМА 4. Симплекс-метод (СМ)

4.1 Ідея симплекс – методу

4.2 Перетворена задача

4.3 Спосіб переходу від одного ДБР до іншого

4.4 Умова оптимальності ДБР

4.5 Схема симплекс – методу

4.6 Збіжність симплекс – методу

Основні визначення та теореми ЛП

(з Теми 3)

Теорема про оптимальність вершини багатогранника

Маємо ЗЛП:

$$c^T x \rightarrow \max , \\ x \in X .$$

Теорема. *Нехай допустима множина X задачі ЛП є багатогранником. Тоді ЦФ $c^T x$ досягає свого максимуму у вершині X .*

Якщо функція $c^T x$ набуває максимального значення більш ніж в одній точці, то вона досягає того ж значення в будь-якій точці, що є їх опуклою лінійною комбінацією.

Базисні розв'язки

(Алгебраїчне представлення вершин)

$$a_{*1} \cdot x_1 + a_{*2} \cdot x_2 + \dots + a_{*n} \cdot x_n = b$$

Визначення. *Базисом* \mathcal{B} матриці A називається набір з m лінійно незалежних стовпців $\mathcal{B} = \{a_{*j_1}, a_{*j_2}, \dots, a_{*j_m}\}$.

Визначення. *Базисною матрицею* називається $(m \times m)$ – матриця, складена із стовпців, що входять в базис \mathcal{B} :

$$B = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ a_{*j_1} & a_{*j_2} & \dots & a_{*j_m} \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix}$$

Визначення. *Базисним розв'язком*, відповідним базису \mathcal{B} , називається вектор $x \in R^n$ у якому

– $x_j = 0$ при $a_{*j} \notin \mathcal{B}$

– x_{j_k} є k -й компонент вектора $B^{-1}b$, де $k = 1, \dots, m$.

Процедура знаходження базисних розв'язків (БР)

1) Вибрати множину \mathcal{B} , що складається з m лінійно незалежних стовпців матриці A .

2) Покласти рівними 0 всі компоненти вектора x які відповідні стовпцям, що не входять в \mathcal{B} . Ці змінні називатимемо **небазисними** (їх $n - m$).

3) Розв'язати m отриманих рівнянь для визначення тих компонент вектора x , що залишилися. Вони називатимуться **базисними змінними** (їх m)

Допустимі базисні розв'язки (ДБР)

Визначення. Розв'язок x називається **допустимим базисним розв'язком (ДБР)**, якщо він є базисним і всі його компоненти невід'ємні.

Якщо нульовий вектор є допустимим, то його завжди вважатимемо за базисний.

Теорема (ДБР=вершина)

Теорема. Вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ тоді і тільки тоді є допустимим базисним розв'язком задачі

$$c^T x \rightarrow \max,$$

$$a_{*1} \cdot x_1 + a_{*2} \cdot x_2 + \dots + a_{*n} \cdot x_n = b,$$

$$x \geq 0,$$

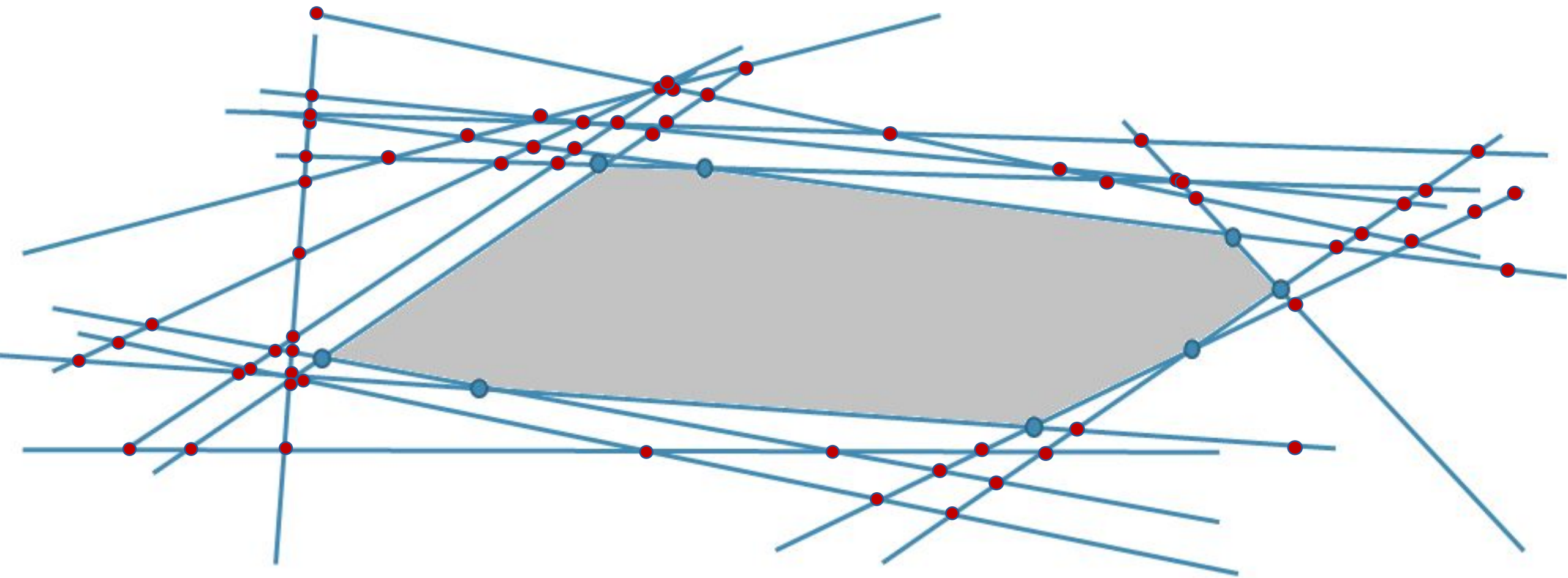
коли точка $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ є вершиною його багатогранної множини X .

4.1 Ідея симплекс-методу (СМ)

Принципова схема розв'язання ЗЛП

1. Знайти всі базисні розв'язки (БР).
2. Виділити серед них ДБР.
3. Обчислити для кожного ДБР відповідне значення ЦФ.
4. Порівняти значення ЦФ і визначити найкращий розв'язок.

Кількість БР $\sim C_n^m$



Ідея СМ

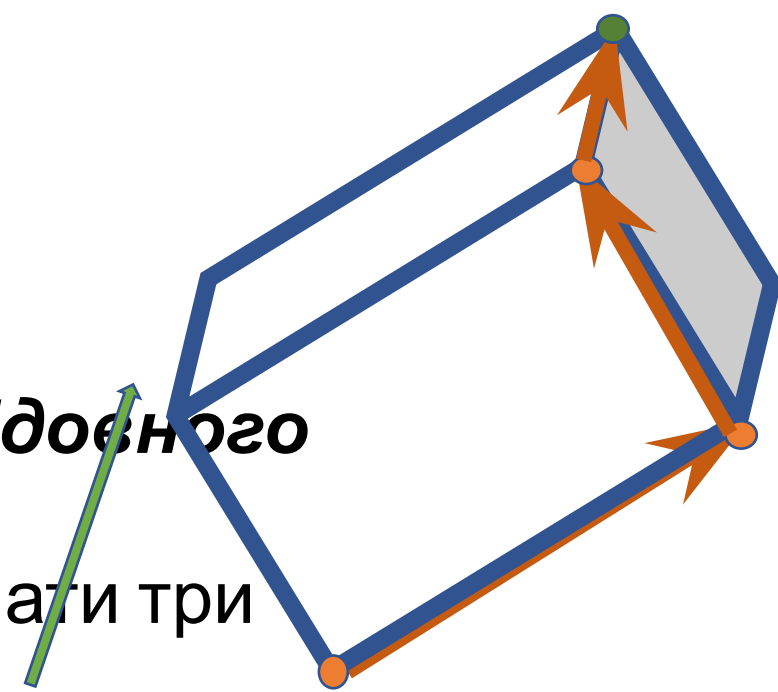


Складові СМ

Симплекс-метод базується на ідеї послідовного покращення розв'язку.

Для реалізації цієї ідеї метод повинен включати три основні складові:

1. Спосіб визначення початкового ДБР.
2. Критерій, по якому можна визначити оптимальність знайденого розв'язку або необхідність його подальшого покращення.
3. Правило переходу до наступного ДБР.



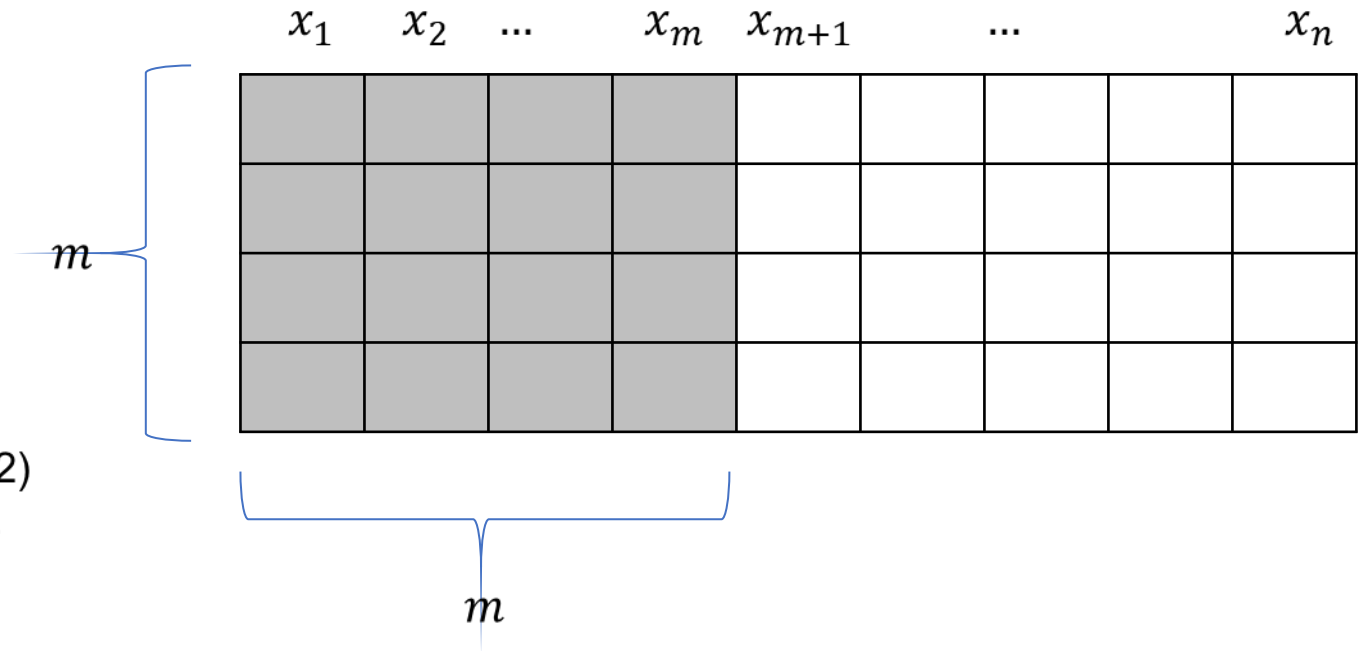
4.2 Перетворена задача

$$c^T x \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$Ax = b, \quad (2)$$

$$x \geq 0. \quad (3)$$

Нехай відомо, що деякий вектор x – ДБР системи (2) базис якого утворюють перші m стовпців матриці A .



$$c^T x \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$Ax = b, \quad (2)$$

$$x \geq 0. \quad (3)$$

$$\left[B \mid N \right] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b$$

$$Bx_B + Nx_N = b$$

$$B^{-1}Bx_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$$

$$Ix_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

Нехай x – ДБР системи (2).

$$A = \left[B \mid N \right] \quad x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_B \\ c_N \end{bmatrix}$$

$$c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N =$$

$$= c_B^T (B^{-1}b - B^{-1}Nx) + c_N^T x_N =$$

$$= -(c_B^T B^{-1}N - c_N^T)x_N + c_B^T B^{-1}b$$

$$c^T x \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$Ax = b, \quad (2)$$

$$x \geq 0. \quad (3)$$

$$-(c_B^T B^{-1} N - c_N^T) x_N + c_B^T B^{-1} b \rightarrow \max,$$

$$x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N,$$

$$x_B \geq 0,$$

$$x_N \geq 0.$$

$$\beta = B^{-1} b$$

Нехай x – ДБР системи (2).

$$A = [B|N] \quad x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_B \\ c_N \end{bmatrix}$$

$$c_B^T \beta - (c_B^T B^{-1} N - c_N^T) x_N \rightarrow \max, \quad (4)$$

$$x_B = \beta - B^{-1} N x_N, \quad (5)$$

$$x_B, x_N \geq 0. \quad (6)$$

Перетворена задача

$$c_B^T \beta - (c_B^T B^{-1} N - c_N^T) x_N \rightarrow \max, \quad (4)$$

$$x_B = \beta - B^{-1} N x_N, \quad (5)$$

$$x_B, x_N \geq 0. \quad (6)$$

$$\beta = B^{-1} b$$

Система (5) називається *діагональною системою* відносно змінних $(x_B)_i, i = \overline{1, m}$ тому що може бути представлена у вигляді:

¶

$$\begin{array}{cccccc}
 (x_B)_1 & & & & = & \beta_1 \\
 & (x_B)_2 & & & = & \beta_2 - \left[B^{-1} N x_N \right] \\
 & & \dots & & \dots & \\
 & & & (x_B)_m & = & \beta_m
 \end{array}$$

Перетворена задача

$$c_B^T \beta - (c_B^T B^{-1} N - c_N^T) x_N \rightarrow \max, \quad (4)$$

$$x_B = \beta - B^{-1} N x_N, \quad (5)$$

$$x_B, x_N \geq 0. \quad (6)$$

$$\beta = B^{-1} b$$

Оскільки x - ДБР, то у нього $x_N = 0$, значить і x_B приймає числове значення $\beta \geq 0$.

Отже, ДБР $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix}$, а відповідне значення ЦФ становить $c_B^T \beta$.

4.3 Спосіб переходу від одного ДБР до іншого

4.3.1 Спосіб переходу від одного ДБР до іншого на конкретному прикладі

ЗЛП (в СФ):

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 2x_1 + 1x_2 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1, \\ x_2 &\leq 2, \\ 3x_1 + 3x_2 &\leq 12, \\ 2x_1 &\leq 6, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

ЗЛП в КФ:

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 2x_1 + 1x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4 \\ -x_1 + x_2 + s_1 &= 1, \\ x_2 + s_2 &= 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + s_3 &= 12, \\ 2x_1 + s_4 &= 6, \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$\max z = 2x_1 + 1x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

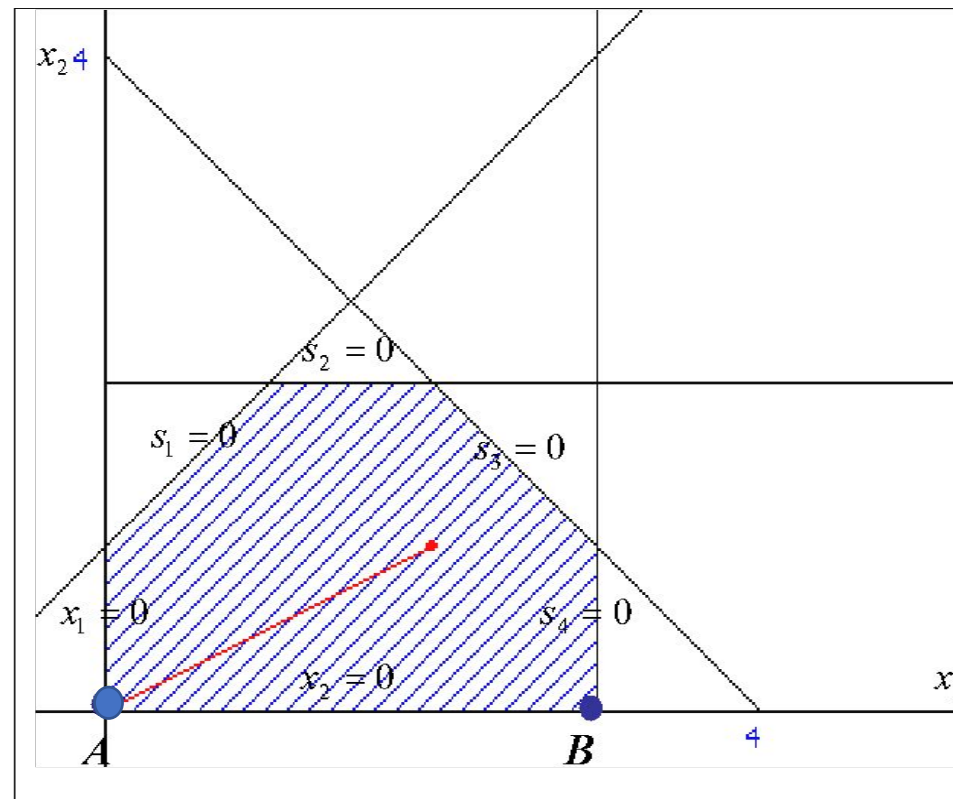
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + s_1 = 1, & (1') \\ x_2 + s_2 = 2, & (2') \\ 3x_1 + 3x_2 + s_3 = 12, & (3') \\ 2x_1 + s_4 = 6, & (4') \end{cases}$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0.$$

Ця система є діагональною відносно змінних

s_1, s_2, s_3, s_4

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Ця перетворена задача відповідає ДБР, у якого базисними є

s_1, s_2, s_3, s_4

$$\max z = 2x_1 + x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

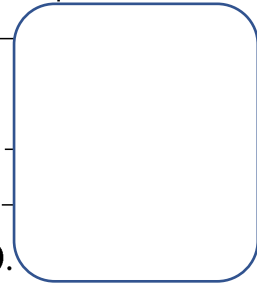
$$s_1 = 1$$

$$s_2 = 2$$

$$s_3 = 12$$

$$s_4 = 6$$

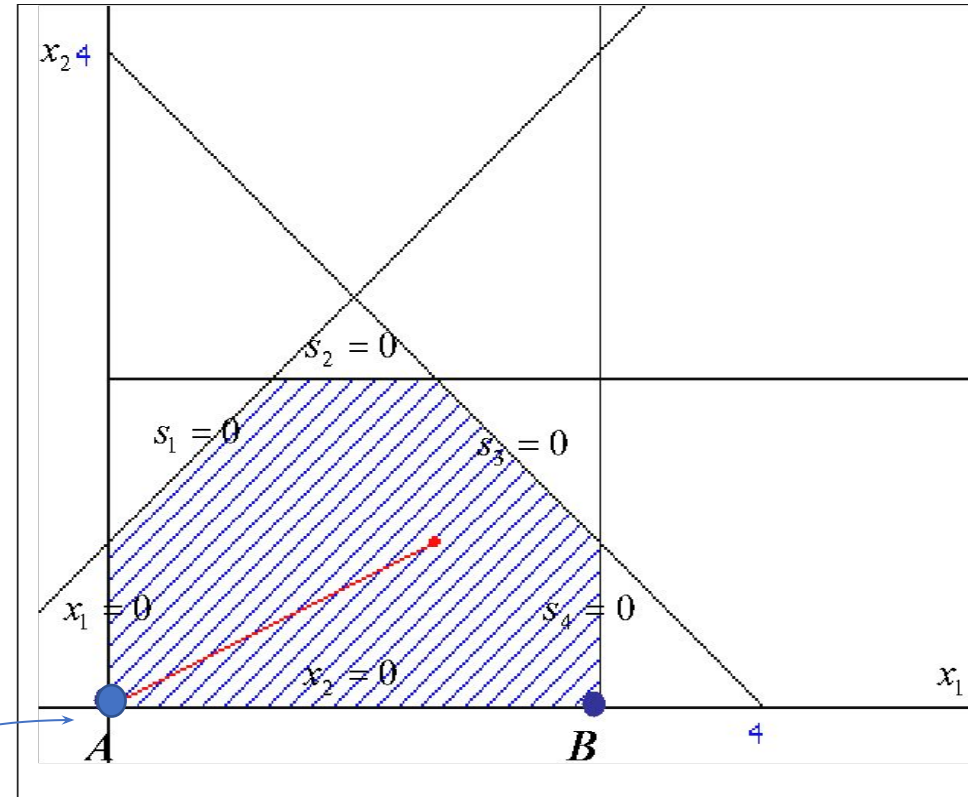
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0.$$



За визначенням, небазисними є

$$x_1, x_2 (= 0)$$

$$x^0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

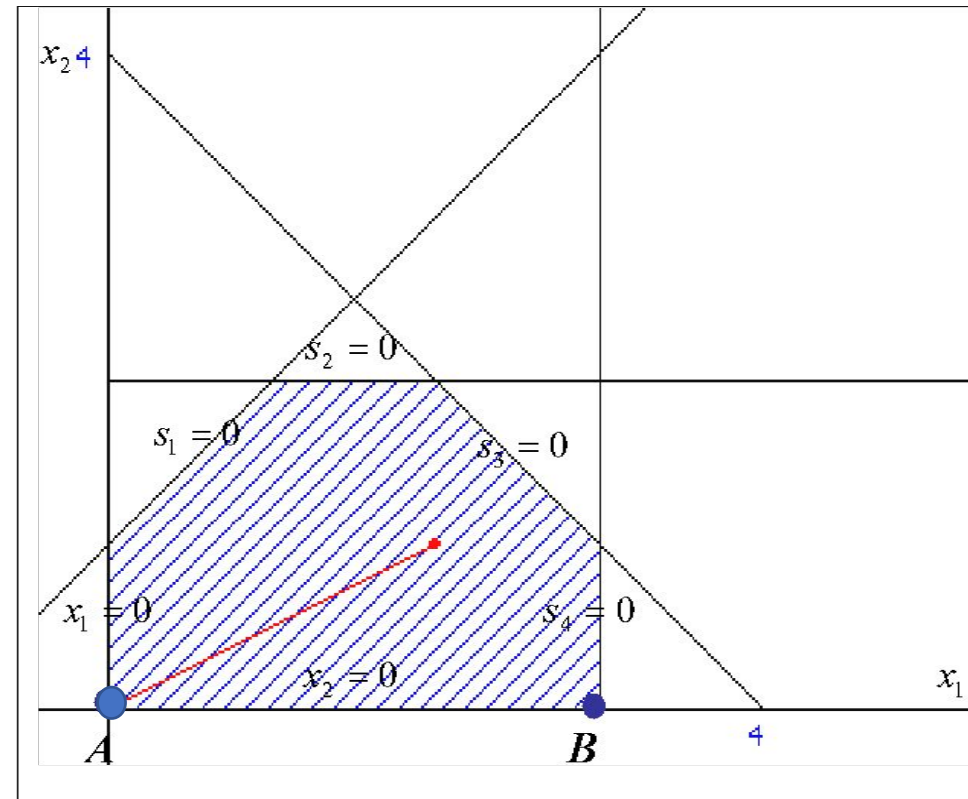


$$\begin{aligned} \max \quad z &= 2x_1 + 1x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4 \\ s_1 &= 1 - (-1x_1) - x_2 \\ s_2 &= 2 - x_2 \\ s_3 &= 12 - 3x_1 - 3x_2 \\ s_4 &= 6 - 2x_1 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$x_B = \beta - B^{-1}Nx_N$$

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} x_2$$



$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} x_2$$

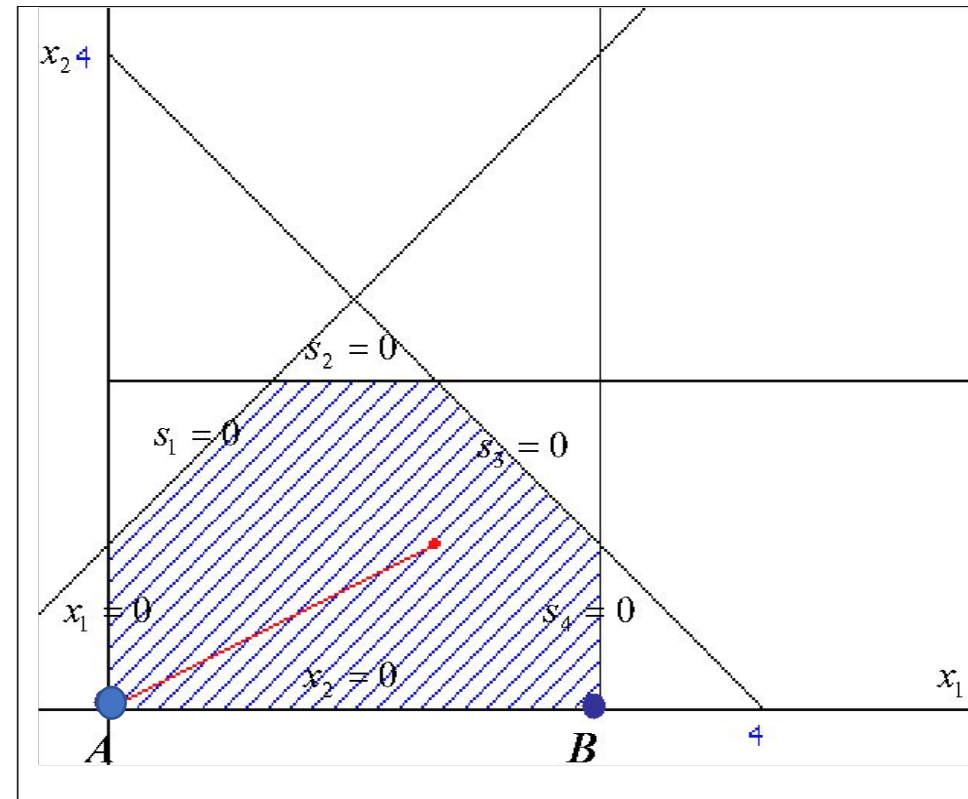
Почнемо збільшувати x_1

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} x_1$$

- s_1 збільшується
- s_2 не змінюється
- s_3 зменшується
- s_4 зменшується

Максимально допустиме збільшення x_1

$$\theta = \min\left\{\frac{12}{3}, \frac{6}{2}\right\} = 3$$



$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} x_1$$

Якщо $x_1 = \theta = 3$ (ця змінна стане базисною), то

$s_4 = 0$ (стане небазисною);

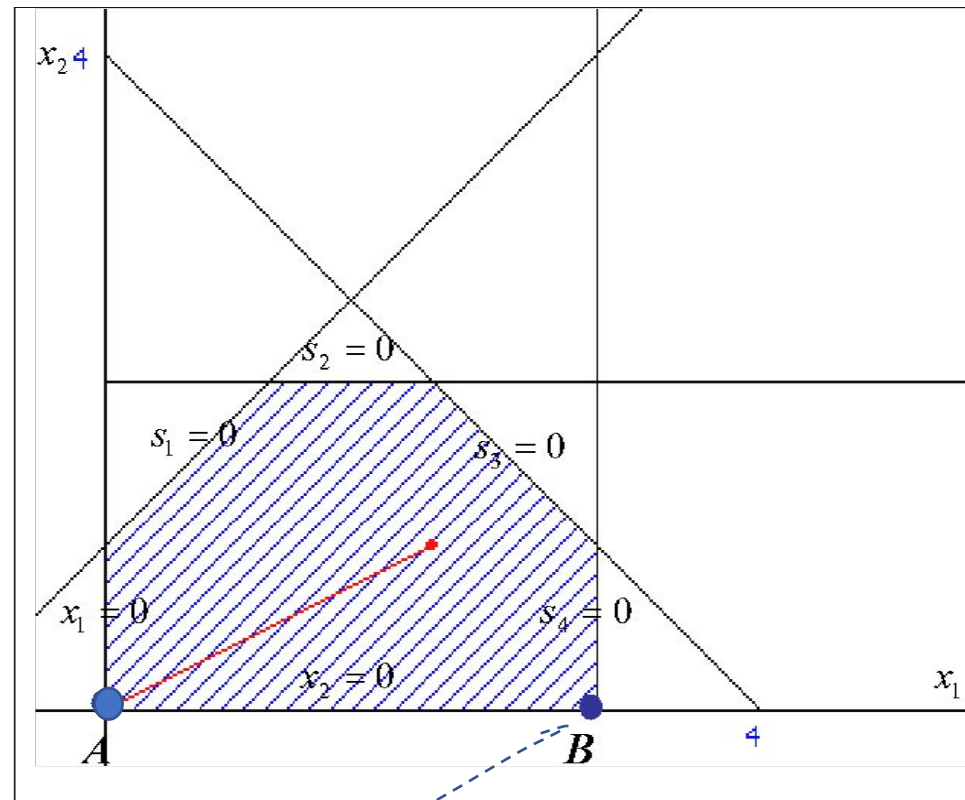
$s_1 = 1 - (-1)\theta = 4$;

$s_2 = 2 - (0)\theta = 2$;

$s_3 = 12 - (3)\theta = 3$.

Це означає, що перейшли у інший ДБР x^1 (вершину B).

$$x^1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$



4.3.2 Спосіб переходу від одного ДБР до іншого у загальному вигляді

Нехай x^0 - ДБР перетвореної задачі:

$$c_B^T \beta - (c_B^T B^{-1} N - c_N^T) x_N \rightarrow \max, \quad (4)$$

$$x_B = \beta - B^{-1} N x_N, \quad (5)$$

$$x_B, x_N \geq 0. \quad (6)$$

Перейдемо від x^0 до іншого ДБР задачі.

При цьому розглянемо можливість того, що **тільки одна небазисна змінна почне зростати**, приймаючи додатні значення, в той час, як **решта небазисних змінних залишиться нульовими**

Нехай x^0 - ДБР перетвореної задачі:

$$c_B^T \beta - (c_B^T B^{-1} N - c_N^T) x_N \rightarrow \max, \quad (4)$$

$$x_B = \beta - B^{-1} N x_N, \quad (5)$$

$$x_B, x_N \geq 0. \quad (6)$$

Перейдемо від x^0 до іншого ДБР задачі.

При цьому розглянемо можливість того, що **тільки одна небазисна змінна почне зростати**, приймаючи додатні значення, в той час, як **решта небазисних змінних залишиться нульовими**

Перепишемо систему обмежень (5) перетвореної задачі по стовпцях:

$$x_B = \beta - B^{-1} a_{*m+1} (x_N)_{m+1} - \dots - B^{-1} a_{*p} (x_N)_p - \dots - B^{-1} a_{*n} (x_N)_n$$

де $(x_N)_j$ - компонента вектора x_N , що відповідає змінній $m + j$

Позначимо $\alpha_{*j} = B^{-1} a_{*j}$, $j = \overline{m+1, n}$ і перепишемо систему обмежень:

$$x_B = \beta - \alpha_{*m+1} (x_N)_{m+1} - \dots - \alpha_{*p} (x_N)_p - \dots - \alpha_{*n} (x_N)_n.$$

Нехай починаючи з нуля зростає змінна $(x_N)_p$ а решта небазисних змінних залишається нульовими. Значить вектор базисних змінних змінюється згідно рівняння.

$$x_B = \beta - \alpha_{*p} (x_N)_p$$



$$x_B = \beta - \alpha_{*p} (x_N)_p$$

При цьому, залежно від значень компонент вектора α_{*p} можливі 3 наступних випадки:

— якщо i -й компонент вектора α_{*p} рівний нулю ($\alpha_{ip} = 0$), то відповідний до нього елемент $(x_B)_i$ вектору x_B залишиться без змін;

— якщо i -й компонент вектора α_{*p} від'ємний ($\alpha_{ip} < 0$), то відповідний до нього елемент $(x_B)_i$ вектору x_B збільшуватиметься;

— якщо i -й компонент додатній ($\alpha_{ip} > 0$) – відповідний до нього елемент $(x_B)_i$ вектору x_B зменшуватиметься і стане менший нуля, коли величина $(x_N)_p$ стане достатньо великою.

цього допустити не можна, оскільки буде порушена допустимість розв'язку x^1 .

Звідси отримуємо максимально допустиме збільшення значення $(x_N)_p$

$$\theta = \min_{1 \leq i \leq m | \alpha_{ip} > 0} \left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{ip}} \right\}$$

$$x_B = \beta - \alpha_{*p} (x_N)_p \quad \theta = \min_{1 \leq i \leq m | \alpha_{ip} > 0} \left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{ip}} \right\} \quad (7)$$

Нехай мінімум в рівнянні (7) досягається при $i = q$, тоді

$$(x_N)_p = \theta = \frac{\beta_q}{\alpha_{qp}}$$

і в новому ДБР маємо:

$$(x_B)_q = \beta_q - \alpha_{qp} \cdot \frac{\beta_q}{\alpha_{qp}} = 0$$

$$(x_B)_i = \beta_i - \alpha_{ip} \cdot \frac{\beta_q}{\alpha_{qp}} \geq 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad i \neq q.$$

Якщо в нуль перетворюються одночасно дві або більш базисних змінних (маємо справу з виродженим випадком), вибрати ми повинні тільки одну з них.

$$(x_N)_p = \theta = \frac{\beta_q}{\alpha_{qp}}$$

 x^1

$$(x_B)_q = \beta_q - \alpha_{qp} \cdot \frac{\beta_q}{\alpha_{qp}} = 0$$

$$(x_B)_i = \beta_i - \alpha_{ip} \cdot \frac{\beta_q}{\alpha_{qp}} \geq 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad i \neq q.$$

Отже, ми прийшли до наступної ситуації:

змінна $(x_N)_p$ стала базисною із значенням $\frac{\beta_p}{\alpha_{qp}}$

змінна $(x_B)_q$ – небазисною (із значенням 0).

Це означає таку перестановку в розбитті матриці A , що стовпець a_{*p} стає на місце q -го стовпця матриці B .

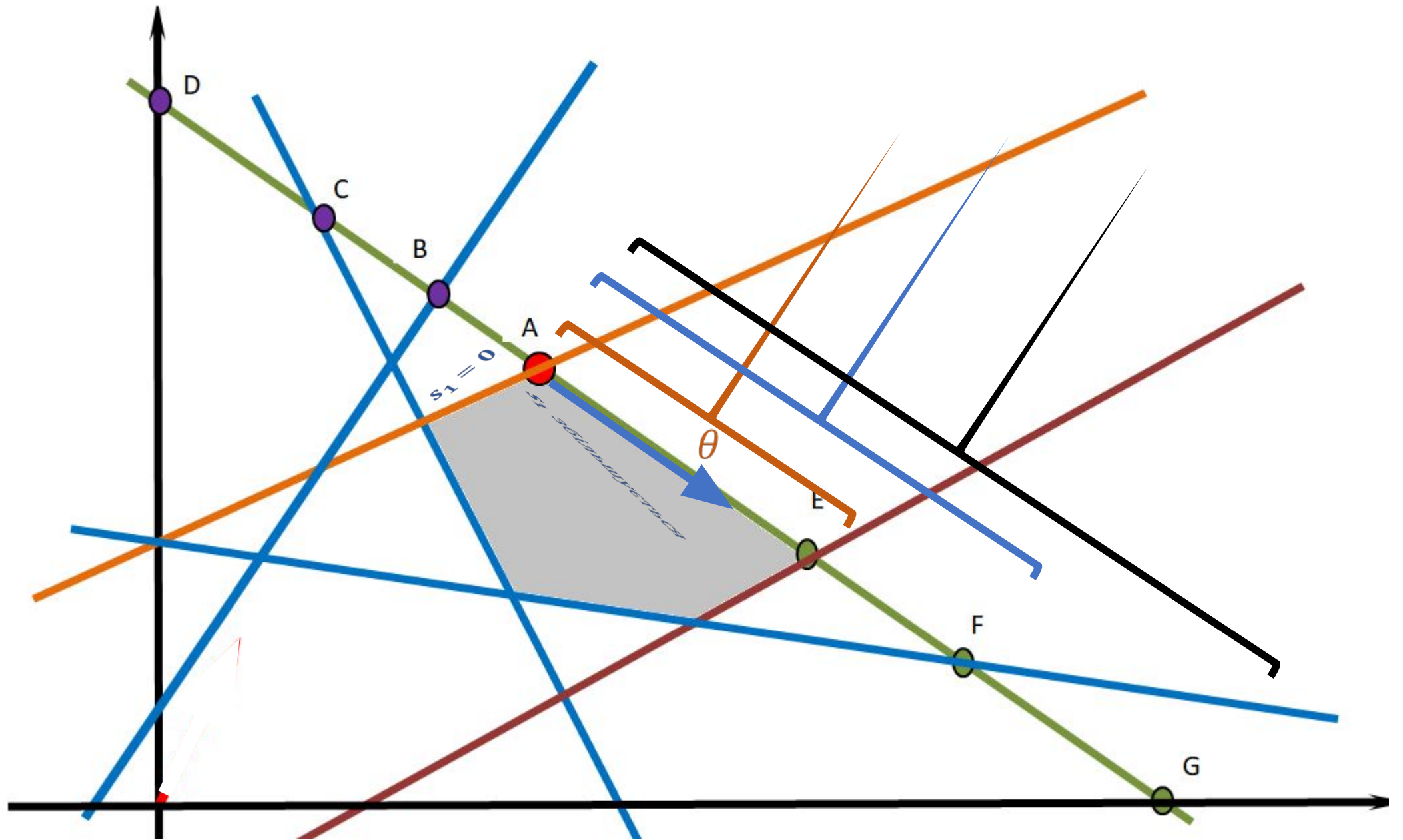
В цьому випадку будемо казати, що:

змінна $(x_N)_p$ «**ВХОДИТЬ**» в базис,

а змінна $(x_B)_q$ «**ВИХОДИТЬ**» з базису.

Описаний спосіб переходу від одного ДБР до іншого називається **операцією заміщення**.

Теорема. Розв'язок x^1 , отриманий в результаті операції заміщення, є ДБР.



4.3.3 Часткові випадки, які виникають при операції заміщення

$$x_B = \beta - B^{-1}Nx_N$$

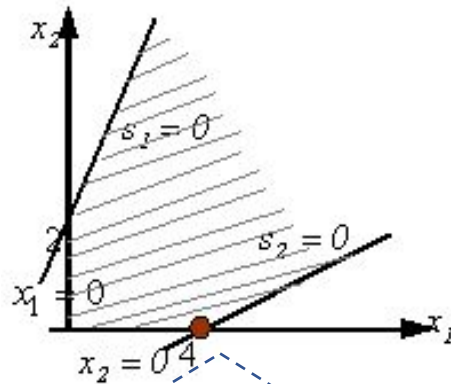
Випадок 1. Якщо вершина x^0 вироджена (деяке $\beta_i = 0, i = \overline{1, m}$), а відповідне α_{ip} додатне, то $\theta = 0$. В цьому випадку базис змінюється, проте ми не рухаємося в просторі R^n , а залишаємося в тій же вершині.



$$x_B = \beta - B^{-1}Nx_N$$

Випадок 2. Якщо все α_{ip} недодатні, то збільшуючи $(x_N)_p$ ми можемо рухатися скільки завгодно далеко, залишаючись при цьому в допустимій множині

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - 2x_2 \leq 4, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + s_1 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + s_2 = 4, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

$$\begin{cases} -3x_2 + s_1 + 2s_2 = 10, \\ x_1 - 2x_2 + s_2 = 4, \end{cases}$$

$x_2 \nearrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} s_1 = 10 - (-3)x_2 \\ x_1 = 4 - (-2)x_2 \end{cases}$$

Базисні змінні
приймають значення:

4.4 Умова оптимальності ДБР

Перетворена задача

$$\begin{aligned} c_B^T \beta - (c_B^T B^{-1} N - c_N^T) x_N &\rightarrow \max, \\ x_B &= \beta - B^{-1} N x_N, \\ x_B, x_N &\geq 0. \end{aligned}$$

Визначення

Вектор, на який помножується зліва x_N у рівнянні ЦФ перетвореної задачі, називається **вектором відносних оцінок** небазисних змінних. Він вказує, в яку сторону і наскільки зміниться ЦФ при зміні компонент x_N .

$$d_N^T = c_B^T B^{-1} N - c_N^T$$

Його j -й елемент визначається так:

$$(d_N)_j = (c_B^T B^{-1} N)_j - (c_N)_j$$

Перетворена задача

$$\begin{aligned} c_B^T \beta - \overbrace{(c_B^T B^{-1} N - c_N^T)} x_N &\rightarrow \max, \\ x_B &= \beta - B^{-1} N x_N, \\ x_B, x_N &\geq 0. \end{aligned}$$

Теорема «Умова оптимальності»

Для ДБР x^0 операція заміщення, при якій змінна $(x_N)_p$ вводиться в базис, змінює значення ЦФ на величину

$$\theta \cdot (d_N)_p = \theta \cdot (c_B^T B^{-1} a_{*p} - (c_N)_p),$$

$$\text{де } \theta = \min_{1 \leq i \leq m, \alpha_{ip} > 0} \left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{ip}} \right\}.$$

Якщо $d_N \geq 0$, то x^0 оптимальний розв'язок.

Доведення

Припустимо, що змінні перенумеровані таким чином, що перші m стовпців матриці A складають базис x^0 .

Позначимо значення ЦФ в $x^0 = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix}$ через z^0 :

$$z^0 = c^T x^0 = \begin{bmatrix} c_B^T & | & c_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix} = c_B^T \beta.$$

Теорема «Умова оптимальності».

Частина 2

«Якщо $d_N \geq 0$, то x^0 - оптимальний розв'язок»

Доведення.

Нехай для ДБР x^0 маємо: $d_N \geq 0$.

По аналогії з вектором $d_N^T = c_B^T B^{-1} N - c_N^T$ сформуємо вектор

$$d_B^T = c_B^T B^{-1} B - c_B^T \text{ (=0-вектор)}$$

Тоді вектор відносних оцінок усіх змінних

$$\begin{aligned} d^T &= [d_B^T | d_N^T] = [c_B^T B^{-1} B - c_B^T | c_B^T B^{-1} N - c_N^T] = \\ &= [c_B^T B^{-1} B | c_B^T B^{-1} N] - [c_B^T | c_N^T] = c_B^T B^{-1} [B | N] = c_B^T B^{-1} A \end{aligned}$$

Оскільки $d_N \geq 0$ та $d_B = 0$ то $d^T = c_B^T B^{-1} A \geq 0$.

$$d^T = c_B^T B^{-1} A \geq 0$$

Нехай \bar{x} - довільний допустимий розв'язок початкової ЗЛП (не обов'язково базисний), тобто $A\bar{x} = b, \bar{x} \geq 0$

Очевидно, що $d^T \bar{x} \geq 0 \quad \forall \bar{x} \in X$

$$(c_B^T B^{-1} A - c^T) \bar{x} \geq 0 \quad \forall \bar{x} \in X$$

$$c_B^T B^{-1} A \bar{x} - c^T \bar{x} \geq 0 \quad \forall \bar{x} \in X$$

$$c_B^T B^{-1} b - c^T \bar{x} \geq 0 \quad \forall \bar{x} \in X$$

$$c_B^T \beta - c^T \bar{x} \geq 0 \quad \forall \bar{x} \in X$$

$$c_B^T \beta \geq c^T \bar{x} \quad \forall \bar{x} \in X$$

$$c^T x^0 \geq c^T \bar{x} \quad \forall \bar{x} \in X$$

Отже, x^0 оптимальний розв'язок. ■

Визначення.

ЗЛП називається *не виродженою*, якщо всі її ДБР не вироджені.

Теорема, що стосується умов оптимальності (задача на максимум)

$$\begin{aligned} c_B^T \beta - (c_B^T B^{-1} N - c_N^T) x_N &\rightarrow \max, \\ x_B = \beta - B^{-1} N x_N, \\ x_B, x_N &\geq 0. \end{aligned}$$

Вектор відносних оцінок небазисних змінних:

$$d_N^T = c_B^T B^{-1} N - c_N^T.$$

Теорема (умова оптимальності)

Якщо $d_N \geq 0$, то x^0 - оптимальний розв'язок ЗЛП.

Теорема

Нехай ЗЛП є не виродженою, а x^0 - оптимальний ДБР. Тоді $d_N \geq 0$.

Теорема

Для того, щоб ДБР x^0 був опт. розв'язком ЗЛП, необхідно і достатньо існування такого базису для x^0 , для якого $d_N \geq 0$.

Теорема, що стосується умов оптимальності (задача на **мінімум**)

$$\begin{aligned} c_B^T \beta - (c_B^T B^{-1} N - c_N^T) x_N &\rightarrow \max, \\ x_B = \beta - B^{-1} N x_N, \\ x_B, x_N &\geq 0. \end{aligned}$$

Вектор відносних оцінок небазисних змінних:

$$d_N^T = c_B^T B^{-1} N - c_N^T.$$

Теорема (умова оптимальності)

Якщо $d_N \leq 0$, то x^0 - оптимальний розв'язок ЗЛП.

Теорема

Нехай ЗЛП є не виродженою, а x^0 - оптимальний ДБР. Тоді $d_N \leq 0$.

Теорема

Для того, щоб ДБР x^0 був опт. розв'язком ЗЛП, необхідно і достатньо існування такого базису для x^0 , для якого $d_N \leq 0$.

Розглянемо приклад до теореми (екз.):

Теорема

Для того, щоб ДБР x^0 був опт. розв'язком ЗЛП, необхідно і достатньо існування такого базису для x^0 , для якого $d_N \geq 0$.

$$1x_1 + 3x_2 \rightarrow \max,$$

$$1x_1 + 1x_2 \leq 1,$$

$$1x_1 + 2x_2 \leq 2,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

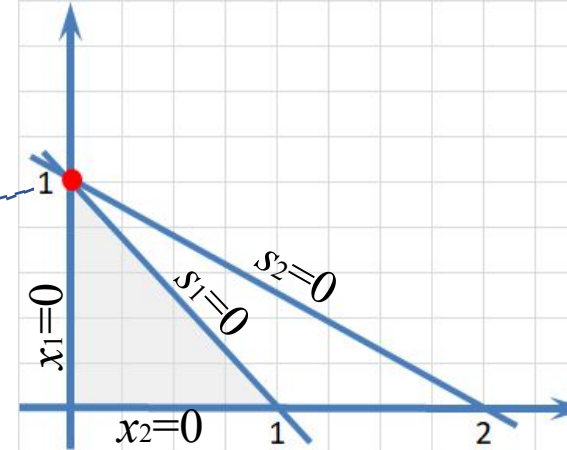
$$1x_1 + 3x_2 + 0s_1 + 0s_2 \rightarrow \max,$$

$$1x_1 + 1x_2 + 1s_1 = 1,$$

$$1x_1 + 2x_2 + 1s_2 = 2,$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0.$$

Оптимальна (вироджена) вершина,
їй відповідає ТРИ вироджених
ДБР:

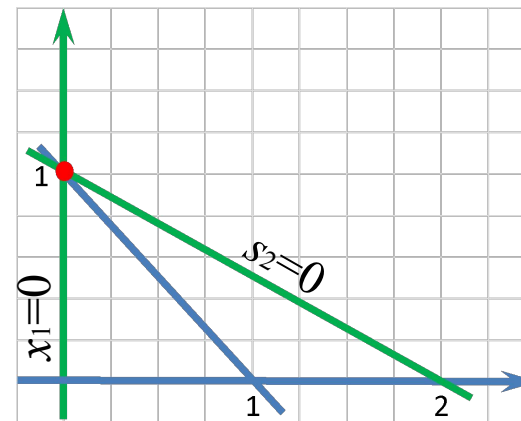
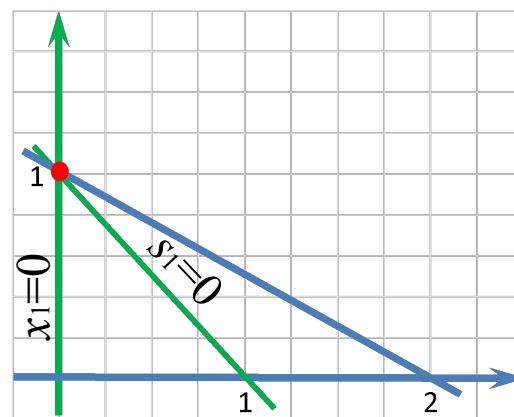
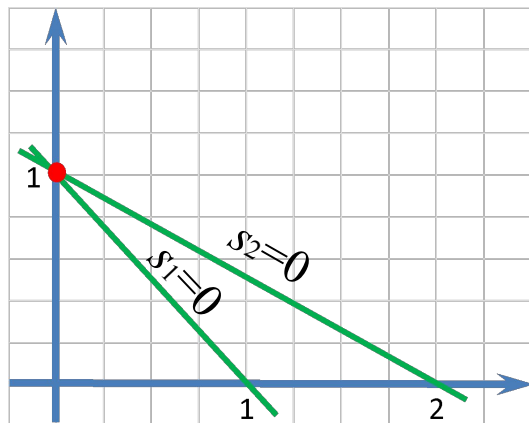


Небазисні змінні = це ті змінні, які відповідають
прямим, перетином яких є аналізована точка

$$x^1 \quad B = \{a_{*x_1}, a_{*x_2}\}$$

$$x^2 \quad B = \{a_{*x_2}, a_{*s_2}\}$$

$$x^3 \quad B = \{a_{*x_2}, a_{*s_1}\}$$



$$1x_1 + 3x_2 + 0s_1 + 0s_2 \rightarrow \max,$$

$$1x_1 + 1x_2 + 1s_1 = 1,$$

$$1x_1 + 2x_2 + 1s_2 = 2,$$

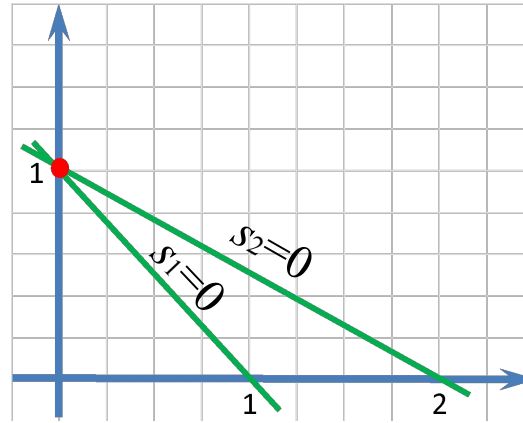
$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0.$$

$$x_B^0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad c_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_B^0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \beta = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$d_N^T = c_B^T B^{-1} N - c_N^T$$

$$x^1 \quad B = \{a_{*x_1}, a_{*x_2}\}$$



$$x_N^0 = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \quad c_N = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$z^0 = c_B^T \cdot \beta = [1 \ 3] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3$$

$$d_N^T = [d_{s_1} \ d_{s_2}] = [1 \ 3] \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - [0 \ 0] = [-1 \ 2]$$

Умова оптимальності НЕ виконується

$$1x_1 + 3x_2 + 0s_1 + 0s_2 \rightarrow \max,$$

$$1x_1 + 1x_2 + 1s_1 = 1,$$

$$1x_1 + 2x_2 + 1s_2 = 2,$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0.$$

$$x_B^0 = \begin{bmatrix} x_2 \\ s_1 \end{bmatrix}$$

$$c_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

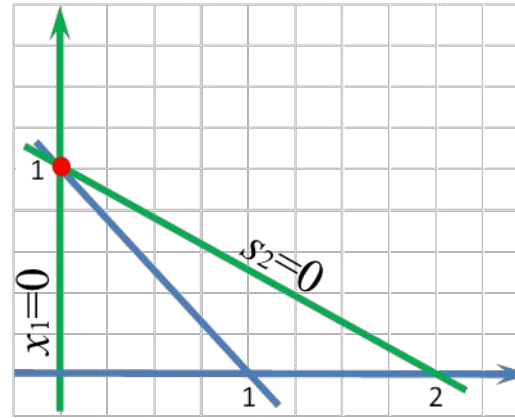
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$x_B^0 = \begin{bmatrix} x_2 \\ s_1 \end{bmatrix} = \beta = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$d_N^T = c_B^T B^{-1} N - c_N^T$$

$$x^3 \quad B = \{a_{*x_2}, a_{*s_1}\}$$



$$x_N^0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$$

$$c_N = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$z^0 = c_B^T \cdot \beta = [3 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3$$

$$d_N^T = [d_{x_1} \ d_{s_2}] = [3 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - [1 \ 0] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Умова оптимальності НЕ виконується

$$1x_1 + 3x_2 + 0s_1 + 0s_2 \rightarrow \max,$$

$$1x_1 + 1x_2 + 1s_1 = 1,$$

$$1x_1 + 2x_2 + 1s_2 = 2,$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0.$$

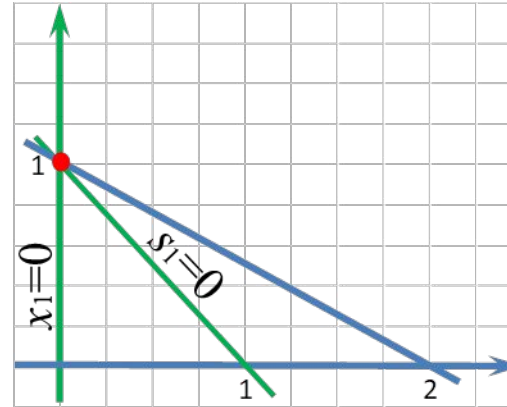
$$x_B^0 = \begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \end{bmatrix}$$

$$c_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x^2 \quad B = \{a_{*x_2}, a_{*s_2}\}$$



$$x_N^0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \end{bmatrix}$$

$$c_N = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_B^0 = \begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \end{bmatrix} = \beta = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z^0 = c_B^T \cdot \beta = [3 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3$$

$$d_N^T = c_B^T B^{-1} N - c_N^T$$

$$d_N^T = [d_{x_2} \ d_{s_2}] = [3 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - [1 \ 0] = [2 \ 3]$$

Умова оптимальності виконується

Теорема

Для того, щоб ДБР x^0 був опт. розв'язком ЗЛП, необхідно і достатньо існування такого базису для x^0 , для якого $d_N \geq 0$.

Теорема. *Якщо в деякому ДБР ЗЛП існує небазисна змінна $(x_N)_p$ така, що $(d_N)_p < 0$ і $\alpha_{*p} \leq 0$, то цільова функція задачі не обмежена на множині допустимих розв'язків*

4.5 Схема симплекс-методу

Схема симплекс – методу

$$c_B^T \beta - (c_B^T B^{-1} N - c_N^T) x_N \rightarrow \max,$$
$$x_B = \beta - B^{-1} N x_N,$$
$$x_B, x_N \geq 0.$$

Крок 0. Побудова початкового ДБР

Знайти деякий ДБР x^0 ЗЛП

$$B, B, N, \beta = B^{-1}b, x_B = \beta, x_N, z^0 = c_B^T \beta$$

Крок 1. Перевірка виконання умови оптимальності

2.1 Обчислити вектор відносних оцінок небазисних змінних $d_N^T = c_B^T B^{-1} N - c_N^T$.

2.2 Якщо

(задача на максимум) $(d_N)_p \geq 0$	(задача на мінімум) $(d_N)_p \leq 0$
--	---

то припинити обчислення – поточний ДБР є опт. розв'язком задачі.

Крок 2. Вибір небазисної змінної $(x_N)_p$, що вводиться в множину базисних змінних

Вибрати p , для якого

(задача на максимум) $(d_N)_p < 0$	(задача на мінімум) $(d_N)_p > 0$
---------------------------------------	--------------------------------------

$$(d_N)_p = \max_{j|(d_N)_j < 0} \{ |(d_N)_j | \}$$

$$(d_N)_p = \max_{j|(d_N)_j > 0} \{ (d_N)_j \}$$

Зазвичай в спрощених програмних
продуктах

Схема симплекс – методу

$$c_B^T \beta - (c_B^T B^{-1} N - c_N^T) x_N \rightarrow \max ,$$
$$x_B = \beta - B^{-1} N x_N ,$$
$$x_B, x_N \geq 0 .$$

Крок 3. Вибір базисної змінної, що виводиться з множини базисних змінних.

3.1 Обрахувати **ведучий стовпець**: $\alpha_{*p} = B^{-1} a_{*p}$.

3.2 Умова допустимості

ЯКЩО $\alpha_{*p} \leq 0$, то припинити обчислення – задача не має розв’язку, ЦФ не обмежена зверху (знизу).

ІНАКШЕ вибрати q , для якого виконується $\frac{\beta_q}{\alpha_{qp}} = \min_{i|\alpha_{ip}>0} \frac{\beta_i}{\alpha_{ip}}$,

(змінна $(x_B)_q$ буде виключена з множини базисних змінних).

Крок 4. Операція заміщення

Побудувати базис нового ДБР

(замінивши вектор a_{*q} поточного базису B на вектор a_{*p})

$$B, N, \beta = B^{-1} b, x_B = \beta, x_N, z^0 = c_B^T \beta$$

Перейти на крок 1.

Теорема «Умова оптимальності»

Для ДБР x^0 операція заміщення, при якій змінна $(x_N)_p$ вводиться в базис, змінює значення ЦФ на величину

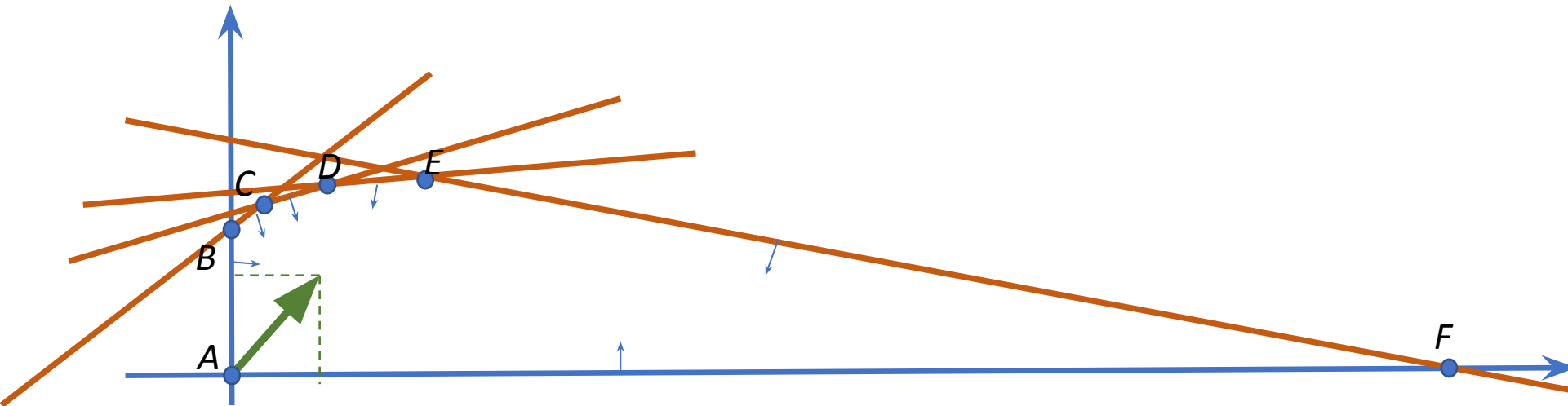
$$\theta \cdot (d_N)_p = \theta \cdot (c_B^T B^{-1} a_{*p} - (c_N)_p),$$

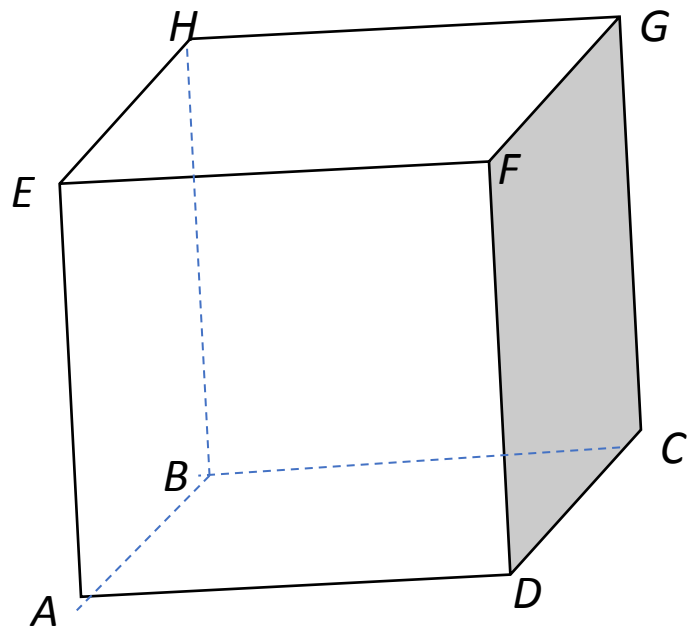
$$\text{де } \theta = \min_{1 \leq i \leq m, \alpha_{ip} > 0} \left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{ip}} \right\}.$$

Самостійно №

Довести, що з того, що ми обираємо $(d_N)_p = \max_{j|(d_N)_j < 0} \{|(d_N)_j|\}$, не впливає, що отримаємо максимальний приріст ЦФ.

(+ підібрати числовий приклад, коли буде навпаки)





ABHG

ABHGF

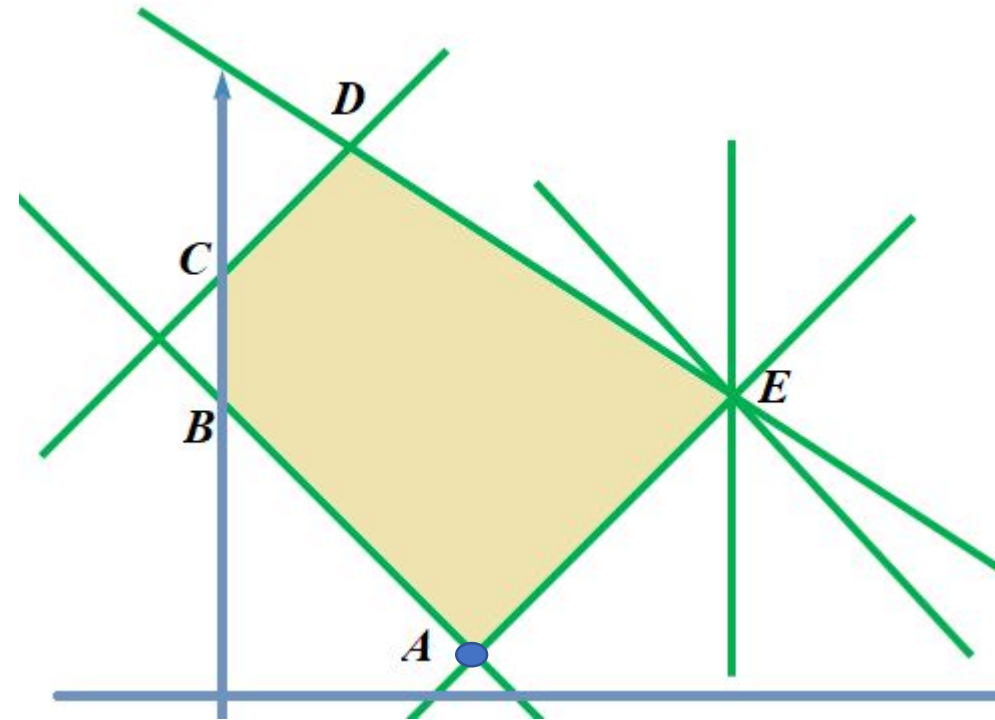
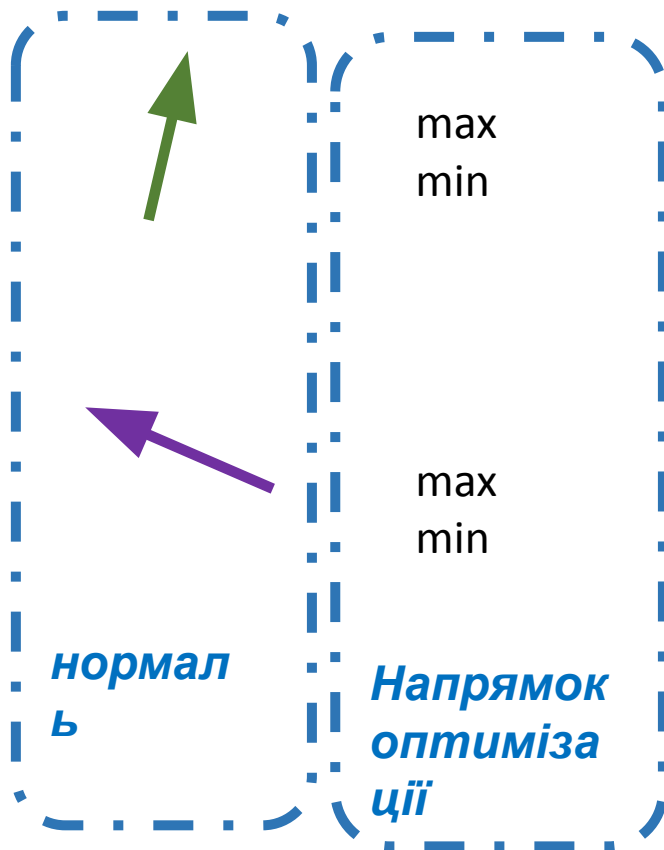
ABHF

BCDFH

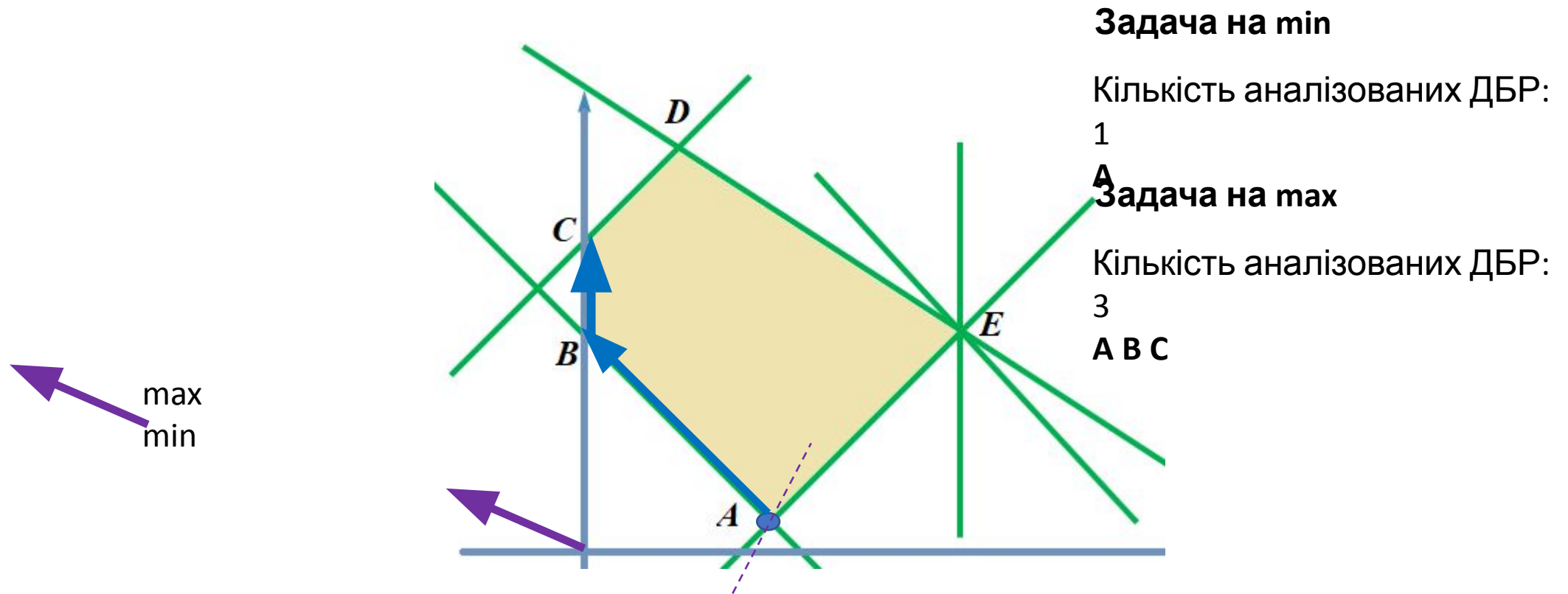
BHE



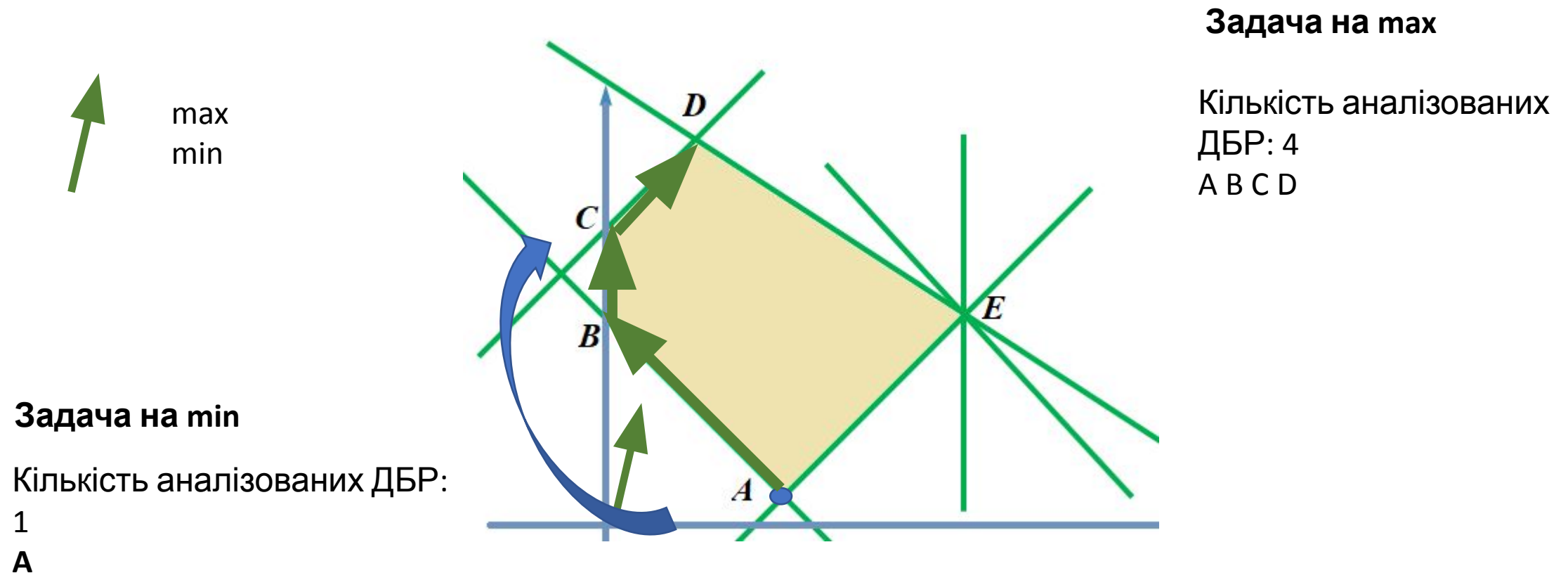
Максимально та мінімально можлива кількість аналізованих ДБР (екз+тести)



Максимально та мінімально можлива кількість аналізованих ДБР (екз.!)



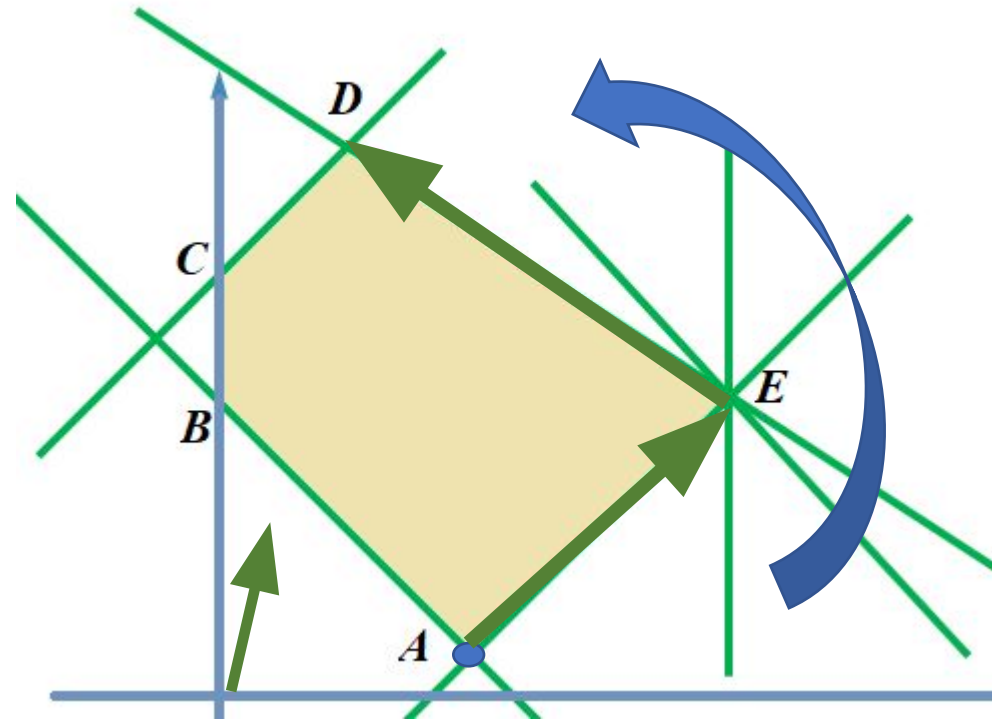
Максимально та мінімально можлива кількість аналізованих ДБР (екз.!)



Коректно: Яка максимальна можлива кількість аналізованих ДБР (за умови відсутності зациклення)

Максимально та мінімально можлива кількість аналізованих ДБР (екз.!)

↑
max
min



Задача на max

Вершині E відповідає
 $C_4^2 = 6$ ДБР

Min кількість: 3
A E_j D


Max кількість: 8
A E₁ E₂ E₃ E₄ E₅ E₆ D

Коректно: Яка максимальна можлива кількість аналізованих ДБР за умови відсутності зациклення

4.6 Збіжність симплекс – методу

4.6 Збіжність симплекс – методу

Якщо після
кожної
ітерації
значення ЦФ
покащується



```
graph LR; A[Якщо після кожної ітерації значення ЦФ показується] --> B[симплекс-методом перебираються різні вершини]; B --> C[ ]
```

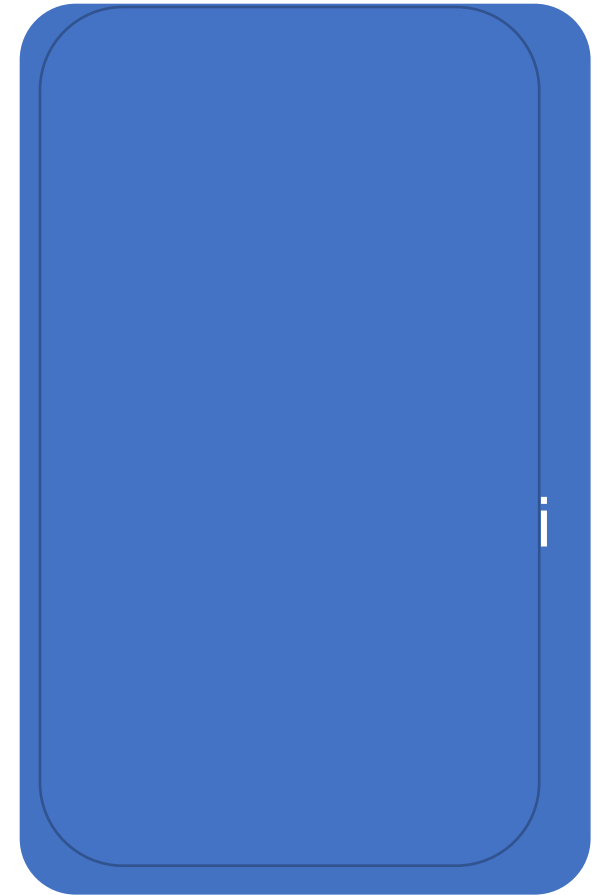
симплекс-
методом
перебираються
різні вершини

Зациклення

Якщо ж після
деякої ітерації
значення ЦФ
не
покращується
()

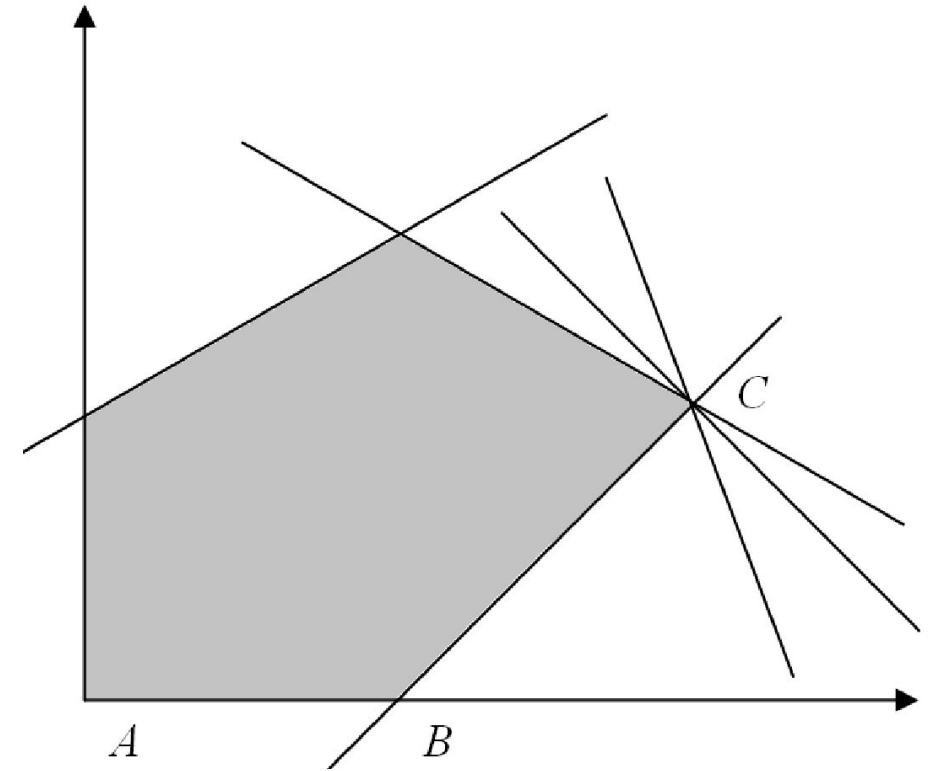


в процесі
перебору
вершин деякі
вершини
можуть
повторюватис
я



Причини зациклення

- ❑ З *геометричної* точки зору зациклення пояснюється виродженістю поточного розв'язку
- ❑ З *практичної* точки зору виродженість пояснюється наявністю надлишкових обмежень
- ❑ З *обчислювальної* точки зору, причина зациклення – це не єдиний вибір змінної, що виводиться



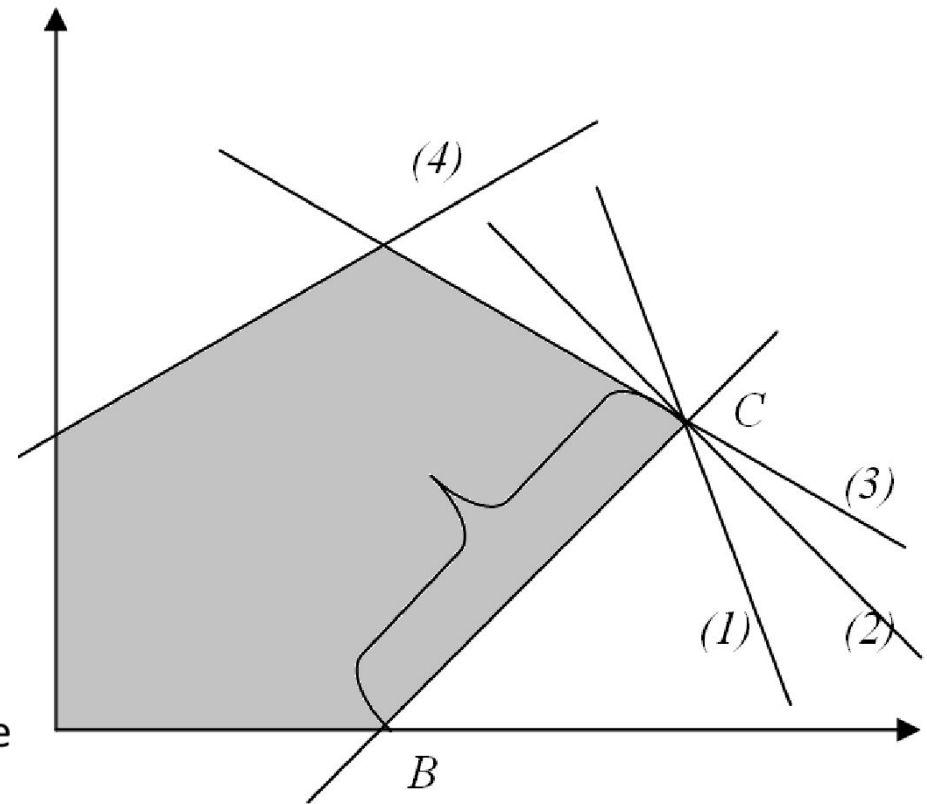
Відстань від т. В до прямих (1), (2), (3) одна і та ж

$$\theta = \min \left\{ \frac{\beta_1}{\alpha_{1p}}; \frac{\beta_2}{\alpha_{2p}}; \frac{\beta_3}{\alpha_{3p}}; \frac{\beta_4}{\alpha_{4p}} \right\},$$

$$\frac{\beta_1}{\alpha_{1p}} = \frac{\beta_2}{\alpha_{2p}} = \frac{\beta_3}{\alpha_{3p}} = \theta \quad (\text{min}).$$

Три відношення приймають мінімальне значення, але виводимо з базису тільки одну змінну, дві інші, залишаючись базисними, приймають у новому ДБР нульове значення.

На наступній ітерації дві базисні змінні будуть НУЛЬОВИМИ. І не виключено, що θ буде $= 0$.



Теорема Бленда (правило усунення зациклення)

Якщо змінна, що вводитьься в базис, визначається так:

$$p = \min \{j \in I_N / d_j < 0\},$$

а змінна, що виводиться з базису так:

$$q = \min \left\{ i \in I_B / \alpha_{ip} > 0, \frac{\beta_i}{\alpha_{ip}} = \theta \right\},$$

де $\theta = \min_{i / \alpha_{ip} > 0} \left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{ip}} \right\}$, то зациклення симплекс-метода неможливо.