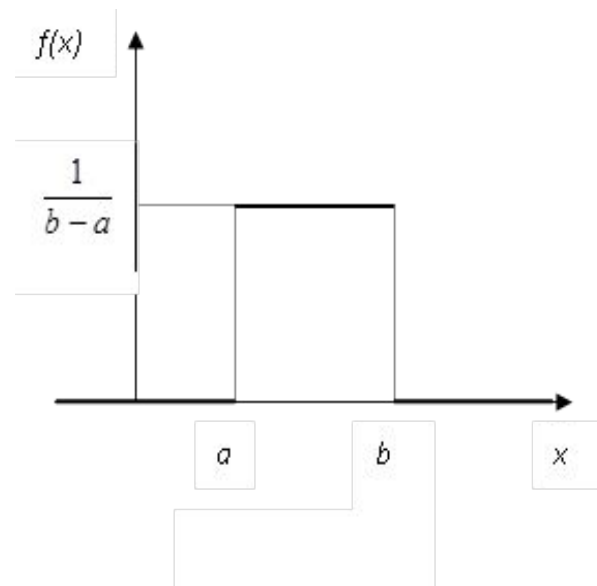
ТИПОВЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Равномерный закон распределения

- **Определение.** Непрерывная случайная величина X распределена по равномерному закону с параметрами a и b , если плотность вероятности ее распределения задается формулой

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \in (a; b), \\ \dfrac{1}{b-a}, \text{при } x \notin (a; b). \end{cases}$$



Теорема. Функция распределения, математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, распределенной по равномерному закону определяются по формулам:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \leq a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \text{при } a < x \leq b, \\ 1, \text{при } x > b, \end{cases}$$

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Сфера применения равномерного закона распределения

1. Время ожидания транспорта на остановке – случайная величина, равномерно распределенная на интервале $[0; \Delta t]$, где Δt – интервал движения транспорта.

2. Угол остановки юлы в играх, типа «рулетка», случайная величина с равномерным законом распределения с параметрами $a = 0$ и $b = 2\pi$.

3. Случайное число, полученное на основе датчика случайных чисел имеет равномерный закон распределения с параметрами $a = 0$ и $b = 1$ по умолчанию.

Показательный закон распределения

- **Определение.** Непрерывная случайная величина *X* распределена по показательному закону с параметром *λ*, если плотность вероятности ее распределения задается функцией

$$f(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, x\geq 0\end{cases}$$

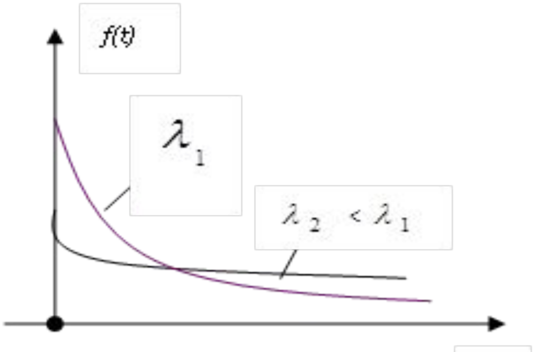


Рис. 7.3.1

- **Теорема**
- Функция распределения *F(x)*, математическое ожидание *M(x)* и дисперсия *D(x)* случайной величины *X* распределенной по показательному закону определяются по формулам:

$$F(x)=\begin{cases}0, x\leq 0,\\ 1-e^{-\lambda x}, x>0,\end{cases}\quad M(x)=\frac{1}{\lambda},\quad D(x)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

- Доказательство

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$если\ \ x\in(-\infty;0],\ то\ F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dx=0,$$

$$если\ \ x\in(0;+\infty),\ то\ F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{x}\lambda\cdot e^{-\lambda x}dx=\lambda\cdot\int_{0}^{x}e^{-\lambda x}dx=\lambda\cdot\left.\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right|_{0}^{x}=-e^{-\lambda x}+1=1-e^{-\lambda x}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ 1-e^{-\lambda x}, x>0.\end{cases}$$

$$M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x\cdot 0dx+\int_{0}^{+\infty}x\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}x\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda x}dx=\lim_{b\to\infty}\left(\left.\left(x\cdot e^{-\lambda x}\right)\right|_{0}^{b}+\int_{0}^{b}e^{-\lambda x}dx\right)$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{b}{e^{\lambda\cdot b}}+\left.\left(-\frac{1}{e^{\lambda\cdot x}}\cdot\frac{1}{\lambda}\right)\right|_{0}^{b}\right)=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{b}{e^{\lambda\cdot b}}-\frac{1}{\lambda\cdot e^{\lambda\cdot b}}+\frac{1}{\lambda}\right)=\frac{1}{\lambda}$$

$$D(x)=M(x^2)-M^2(x)=\frac{2}{\lambda^2}-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{1}{\lambda^2}$$

$$M(x^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x^2\cdot 0dx+\int_{0}^{+\infty}x^2\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}x^2\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda x}dx=\lim_{b\to\infty}\left(\left.\left(x^2\cdot e^{-\lambda x}\right)\right|_{0}^{b}+2\int_{0}^{b}x\cdot e^{-\lambda x}dx\right)$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{b}{e^{\lambda\cdot b}}\right)+\frac{2}{\lambda^2}=\frac{2}{\lambda^2}$$

Сфера применения показательного закона распределения

- В сфере массового обслуживания, с простейшим потоком событий, время обслуживания заявки имеет показательный закон распределения, а параметр λ – это интенсивность потока заявок (число заявок за единицу времени).
- **Пример** (задача 4.18. Кремер).
- Среднее время безотказной работы прибора равно 80 ч. Полагая, что время безотказной работы прибора имеет показательный закон распределения, найти: а) выражение его плотности вероятности и функции распределения; б) вероятность того, что в течение 100 ч прибор не выйдет из строя.
- **Решение.**
- *X* – время безотказной работы прибора.
- По условию *M*(*x*) = 80 ч.
- а) $f(x)=\begin{cases} 0,\ x<0 \\ 0{,}0125\cdot e^{-0{,}0125\cdot x},\ x\ge 0\end{cases}$ $\quad F(x)=\begin{cases} 0,\ x\le 0 \\ 1-e^{-0{,}0125\cdot x},\ x>0\end{cases}$
- б) $P(X\ge 100)=1-P(X<0)=1-F(X=100)=1-1+e^{-1{,}25}=e^{-1{,}25}=\dfrac{1}{e^{1{,}25}}\approx 0{,}29$

Нормальный закон распределения

- **Определение.** Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами m_x и σ_x , если плотность вероятности распределения этой случайной величины задается функцией

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma_x}\cdot e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\cdot\sigma_x^2}} \qquad F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma_x}\cdot\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\cdot\sigma_x^2}}dx$$

- Нормальный закон распределения с параметрами $m_x = 0$ и σ_x =1 называется распределением Гаусса $(T = \frac{X-m_x}{\sigma_x})$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}, \qquad F(t) = \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Свойства нормального закона распределения:

1) $P(a < x < b) = \Phi\left(\frac{b - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{a - m_x}{\sigma_x}\right)$, где *Ф(х)* – функция Лапласа;

2) $P(|X - m_x| \le \Delta) = 2 \cdot \Phi_0\left(\frac{\Delta}{\sigma_x}\right)$

3) (Правило «трёх сигм») Если случайная величина Х имеет нормальный закон распределения с m_x и σ_x , то $P(|X - m_x| \le 3 \cdot \sigma_x) = 0{,}9973$ (1)

- Справедливо и обратное утверждение, а именно если для случайной величины *X* выполняется равенство (1), то случайная величина *X* имеет нормальный закон распределения.
- Сфера применения: нормальный закон распределения является самым распространенным, практически все ошибки измерения — это случайные величины с нормальным законом распределения.
- Согласно композиции законов распределения закон распределения случайной величины

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

при $n \ge 6$ мало отличается от нормального закона распределения вне зависимости от того по какому из законов распределения распределены случайные величины X_i .

- **Пример** (задача 4.21. Кремер).
- Коробки с конфетами упаковываются автоматически. Их средняя масса равна 540 г. Известно, что масса коробок с конфетами имеет нормальное распределение, а 5% коробок имеют массу, меньшую 500 г. Каков процент коробок, масса которых: а) менее 470 г; б) от 500 до 550 г; в) более 550 г; г) отличается от средней не более, чем на 30 г (по абсолютной величине)?
- **Решение.**
- Пусть Х – масса одной коробки с конфетами.

$M(X) = 540$ г, $\sigma_x = ?$

$$P(X < 500) = 0{,}05$$

$$P(X < 500) = P\left(T < \frac{500 - 540}{\sigma_x}\right) = P\left(T < -\frac{40}{\sigma_x}\right) = 0{,}05$$

$$\Phi_0\left(\frac{40}{\sigma_x}\right) = 0{,}45$$

$$\frac{40}{\sigma_x} = 1{,}65$$

$$\sigma_x = 24$$

- а) $P(x < 470) = P\left(T < \frac{470 - 540}{24}\right) = P(T < -2.92) = 0.5 - \frac{0.9965}{2} = 0.00175$
- б) $P(500 < X < 550) = P(-1.65 < X < 0.41) = \Phi_0(1{,}65) + \Phi_0(0{,}41) = 0{,}45 + \frac{0{,}3182}{2} =$

  $0{,}45 + 0{,}1591 = 0{,}6091$
- в) $P(X > 550) = P(T > 0.41) = 0.5 - 0.1592 = 0.3408$
- г) $P\left(|X - 540| \le 30\right) = 2 \cdot \Phi_0\left(\frac{30}{24}\right) = 0{,}7887$

Логарифмически-нормальное распределение

- **Определение.** Непрерывная случайная величина X имеет логарифмически-нормальное (сокращенно логонормальное) распределение, если ее логарифм подчинен нормальному закону.
- Так как при $x>0$ неравенства $X < x \Leftrightarrow lnX < lnx$, то функция логонормального распределения совпадает с функцией нормального распределения для СВ lnX.

$$F(x) = P(X < x) = P(lnX < lnx)$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{lnx} e^{-\frac{(t-lna)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Плотность распределения:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-lna)^2}{2\sigma^2}}.$$

Числовые характеристики:

$$M(X) = ae^{\sigma^2/2}, D(X) = ae^{\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right),$$

$$M_0(X) = ae^{-\sigma^2}, Me(X) = a.$$

- Логонормальное распределение используется для описания распределения доходов, банковских вкладов, цен активов, месячной заработной платы, посевных площадей под разные культуры, долговечности изделий в режиме износа и старения и др.

Пример.