

Логика – это *наука о способах доказательств и опровержений.*

Основатель – **Аристотель.**

Алгебра логики – раздел математики изучающий высказывания, рассматриваемые со стороны их логических значений (истинности (1) или ложности (0)) и логических операций над ними.

Алгебра логики

Алгебра логики возникла в середине XIX века в трудах английского математика **Джорджа Буля**. Ее создание представляло собой попытку решать традиционные логические задачи алгебраическими методами.



Джордж Буль

Что же такое логическое высказывание?

Логическое высказывание — это любое повествовательное предложение, в отношении которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Так, например, предложение "6 — четное число" следует считать высказыванием, так как оно истинное. Предложение "Рим — столица Франции" тоже высказывание, так как оно ложное.

Употребляемые в обычной речи слова и словосочетания "не", "и", "или", "если... , то", "тогда и только тогда" и другие позволяют из уже заданных высказываний строить новые высказывания. Такие слова и словосочетания называются **ЛОГИЧЕСКИМИ СВЯЗКАМИ.**

Высказывания, образованные из других высказываний с помощью логических связок, называются **составными**. Высказывания, не являющиеся составными, называются **элементарными**.

Так, например, из элементарных высказываний "*Петров — врач*", "*Петров — шахматист*" при помощи связки "*и*" можно получить составное высказывание "*Петров — врач и шахматист*".

Чтобы обращаться к логическим высказываниям, им назначают имена. Пусть через **A** обозначено высказывание «2-четное число», а через **B** — высказывание «6- четное число». Тогда составное высказывание «2 и 6 четные числа» можно кратко записать как

A и B. Здесь "и" — логическая связка, **A, B** — логические переменные, которые могут принимать только два значения — "истина" или "ложь", "1" и "0".

Каждая логическая связка рассматривается как операция над логическими высказываниями и имеет свое название и обозначение:

конъюнкция, дизъюнкция, отрицание, импликация, эквиваленция.

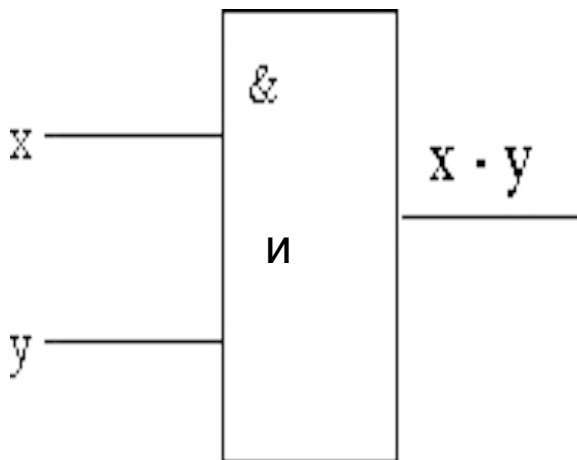
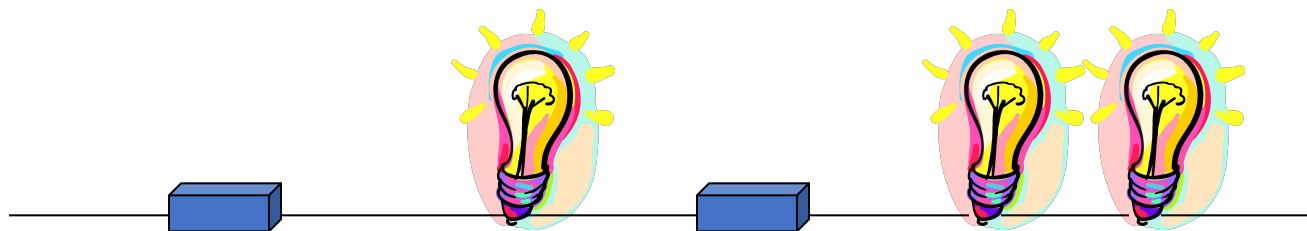
Конъюнкция

логическое умножение

Конъюнкцией высказываний A и B называется высказывание, которое истинно только тогда, когда A и B истинны.

***Записывается: $A \wedge B$; $A \& B$; $A \cdot B$;
Читается: И (AND)***

Последовательное соединение



x	y	x·y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Элемент «И»

Дизъюнкция

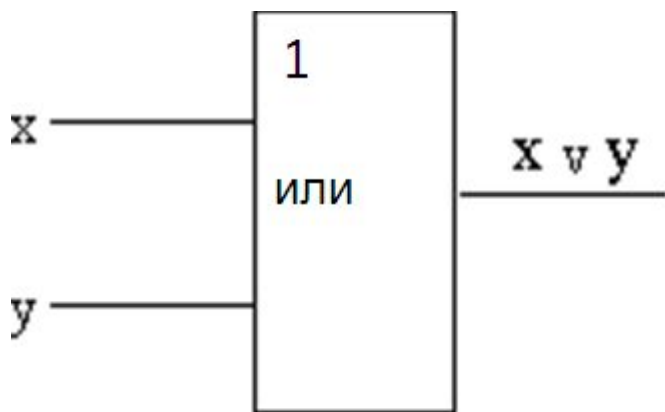
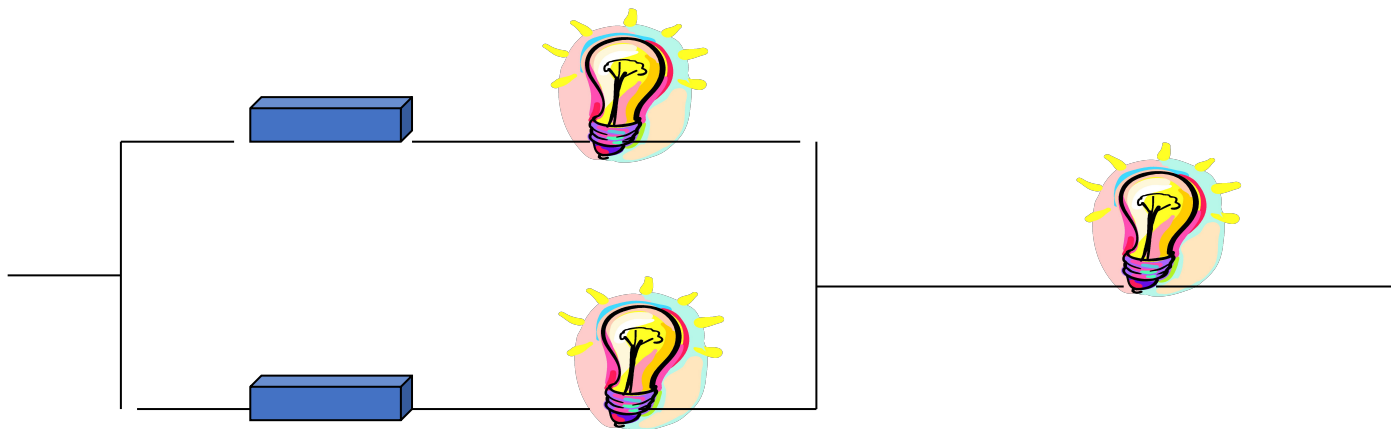
Логическое сложение

Дизъюнкцией высказываний А и В называется высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания ЛОЖНЫ.

Записывается: $A \vee B$; $A+B$

Читается: ИЛИ (OR)

Параллельное соединение



x	y	x v y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Элемент «ИЛИ»

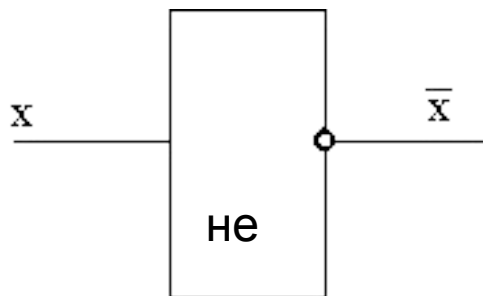
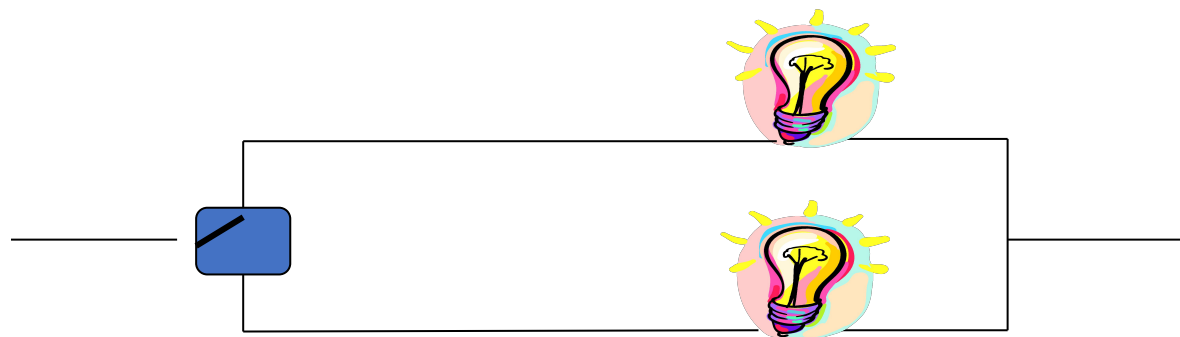
Инверсия-Отрицание

Отрицанием высказывания A называется высказывание, которое истинно, когда A ложно.

Записывается: \bar{A} ; A'

Читается: НЕ A (NOT)

Инвертор



x	\bar{x}
0	1
1	0

Элемент «HE»

Импликация

Импликацией высказываний A и B называется высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда

A истинно, B ложно.

A называется *посылкой*, а B *заключением*. Записывается $A \Rightarrow B$ (из A следует B).

Операция, выражаемая связками "если ..., то", "из ... следует", "... влечет ..."

$A \Rightarrow B$ можно заменить на $\neg A \vee B$

Импликация

А	В	$A \Rightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Эквиваленция

Эквиваленцией высказываний A и B называется высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда высказывания A и B имеют одинаковые значения истинности (A эквивалентно B).

Записывается: $A \Leftrightarrow B$

Операция, выражаемая связками "*тогда и только тогда*", "*равносильно*"

$A \Leftrightarrow B$ можно заменить на $(A \ \& \ B) \vee (\neg A \ \& \ \neg B)$

Эквиваленция

А	В	$A \Leftrightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

- Последовательность выполнения операций в сложных высказываниях задается **круглыми скобками**. Но для уменьшения числа скобок договорились считать, что сначала выполняется *операция отрицания ("не")*, затем *конъюнкция ("и")*, после *дизъюнкция ("или")* и затем *импликация*.

Логическая формула.

С помощью логических переменных и символов логических операций любое высказывание можно формализовать, то есть заменить логической формулой.

Определение логической формулы:

1. Всякая логическая переменная и символы "истина" ("1") и "ложь" ("0") — формулы.
2. Если A и B — формулы, то $A \neg B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ — формулы.
3. Никаких других формул в алгебре логики нет.

Работу логических элементов описывают с помощью таблиц истинности

Таблица истинности это табличное представление логической схемы (операции), в котором перечислены все возможные сочетания значений истинности входных сигналов (операндов) вместе со значением истинности выходного сигнала (результата операции) для каждого из этих сочетаний.

- Для формулы, которая содержит две переменные, таких наборов значений переменных всего четыре:
- $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$.
- Если формула содержит три переменные, то возможных наборов значений переменных восемь:
- $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$,
 $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$.

Составим таблицу истинности для формулы

$$\overline{x \vee y} \cdot (x \cdot \overline{y})$$

Переменные		Промежуточные логические формулы				Формула
x	y	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	\overline{y}	$x \cdot \overline{y}$	$\overline{x \vee y} \cdot (x \cdot \overline{y})$
0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Если при всех наборах значений переменных x и y формула принимает значение 1, то она является *тождественно истинной*;

Если значение 0, то *тождественно ложной*;

Если же в некоторых случаях функция принимает значение 1, а в некоторых — 0, то она является *выполнимой*.

Основные законы логики:

$A = A$	– закон тождества
$A \& \bar{A} = 0$	– закон непротиворечия
$A \vee \bar{A} = 1$	– закон исключенного третьего
$\bar{\bar{A}} = A$	– закон двойного отрицания

Свойства констант:

$\bar{0} = 1$	$\bar{1} = 0$
$A \vee 0 = A$	$A \& 0 = 0$
$A \vee 1 = 1$	$A \& 1 = A$

Законы идемпотентности:

$$A \vee A = A$$
$$A \& A = A$$

Законы коммутативности:

$$A \vee B = B \vee A$$
$$A \& B = B \& A$$

Законы ассоциативности:

$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$$
$$A \& (B \& C) = (A \& B) \& C$$

Законы дистрибутивности:

$$A \vee (B \& C) = (A \vee B) \& (A \vee C)$$
$$A \& (B \vee C) = (A \& B) \vee (A \& C)$$

Законы поглощения:

$$A \vee (A \& B) = A$$
$$A \& (A \vee B) = A$$

Законы де Моргана:

$$\overline{A \vee B} = \bar{A} \& \bar{B}$$
$$\overline{A \& B} = \bar{A} \vee \bar{B}$$

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

ОПЕРАЦИЯ	ОБОЗНАЧЕНИЕ	ТАБЛИЦА ИСТИННОСТИ	ЛОГИЧЕСКИЙ ЭЛЕМЕНТ ИЛИ ФРАГМЕНТ СХЕМЫ															
ИНВЕРСИЯ (ЛОГИЧЕСКОЕ ОТРИЦАНИЕ)	не \bar{A} , $\neg A$, not A, <>	<table border="1"> <tr><td>A</td><td>\bar{A}</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td></tr> </table>	A	\bar{A}	0	1	1	0										
A	\bar{A}																	
0	1																	
1	0																	
КОНЪЮНКЦИЯ (ЛОГИЧЕСКОЕ УМНОЖЕНИЕ)	A и B, A & B, $A \wedge B$, A and B $A * B$	<table border="1"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>$A \wedge B$</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	A	B	$A \wedge B$	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	
A	B	$A \wedge B$																
0	0	0																
0	1	0																
1	0	0																
1	1	1																
ДИЗЪЮНКЦИЯ (ЛОГИЧЕСКОЕ СЛОЖЕНИЕ)	A или B, A + B, $A \vee B$, A or B	<table border="1"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>$A \vee B$</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	A	B	$A \vee B$	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	
A	B	$A \vee B$																
0	0	0																
0	1	1																
1	0	1																
1	1	1																
ИМПЛИКАЦИЯ (ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДОВАНИЕ)	"если... ,то..." $A \rightarrow B$, $A \Rightarrow B$	<table border="1"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>$A \rightarrow B$</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	A	B	$A \rightarrow B$	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	
A	B	$A \rightarrow B$																
0	0	1																
0	1	1																
1	0	0																
1	1	1																
ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ (ЛОГИЧЕСКОЕ РАВЕНСТВО)	"... тогда и только тогда, когда..." $A \leftrightarrow B$, $A \equiv B$, $A \sim B$,	<table border="1"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>$A \leftrightarrow B$</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	A	B	$A \leftrightarrow B$	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	
A	B	$A \leftrightarrow B$																
0	0	1																
0	1	0																
1	0	0																
1	1	1																

Рассмотрим особенности
Записи целых чисел со знаком на
примере **однобайтового формата**,
при котором для знака
отводится один разряд, а для цифр
абсолютной величины – семь разрядов.

Формат числа в байтах	Диапазон	
	Запись с порядком	Обычная запись
1	$-2^7 \dots 2^7 - 1$	-128 ... 127
2	$-2^{15} \dots 2^{15} - 1$	-32768 ... 32767

В компьютерной технике применяются три формы записи (кодирования) целых чисел со знаком: прямой код, обратный код, дополнительный код.

- **Положительные числа** в прямом, обратном и дополнительном кодах изображаются одинаково — двоичными кодами с цифрой 0 в знаковом разряде.

Например:

Число $1_{10} = 1_2$

0	0	0	0	0	0	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---

Знак числа "+"

Число $127_{10} = 1111111_2$

0	1	1	1	1	1	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---

Знак числа "+"

Отрицательные числа в прямом, обратном и дополнительном кодах имеют разное изображение.

- **Прямой код.** В знаковый разряд помещается цифра 1, а в разряды цифровой части числа — двоичный код его абсолютной величины.

Например

Прямой код числа - 1

1	0	0	0	0	0	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---

Знак числа "-"

Прямой код числа - 127

1	1	1	1	1	1	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---

Знак числа "-"

Обратный код.

- Получается инвертированием всех цифр двоичного кода абсолютной величины числа, включая разряд знака: нули заменяются единицами, а единицы — нулями.

Например:

Число: -1

Код модуля числа: 0 0000001

Обратный код числа: 1 1111110

1	1	1	1	1	1	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---

Число: -127

Код модуля числа: 0 1111111

Обратный код числа: 1 0000000

1	0	0	0	0	0	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---

•Дополнительный код.

Получается образованием обратного кода с последующим прибавлением единицы к его младшему разряду. Например

Дополнительный код числа - 1

1	1	1	1	1	1	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---

Дополнительный код числа - 127

1	0	0	0	0	0	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---