Логика – это *наука о способах доказательств и опровержений.*

Основатель – Аристотель.

Алгебра логики – раздел математики изучающий высказывания, рассматриваемые со стороны их логических значений (истинности (1)или ложности (0)) и логических операций над ними.

Алгебра логики

Алгебра логики возникла в середине XIX века в трудах английского математика **Джорджа Буля**.
Ее создание представляло собой попытку решать традиционные логические задачи алгебраическими методами.

Джордж Буль

Что же такое логическое высказывание?

Логическое высказывание — это любое повествовательное предложение, в отношении которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Так, например, предложение "*6 — четное число*" следует считать высказыванием, так как оно истинное. Предложение "*Рим — столица Франции*" тоже высказывание, так как оно ложное.

Употребляемые в обычной речи слова и словосочетания **"не", "и", "или", "если... , то", "тогда и только тогда"** и другие позволяют из уже заданных высказываний строить новые высказывания. Такие слова и словосочетания называются **логическими связками.**

Высказывания, образованные из других высказываний с помощью логических связок, называются **составными.** Высказывания, не являющиеся составными, называются **элементарными.**

Так, например, из элементарных высказываний "*Петров — врач*", "*Петров — шахматист*" при помощи связки "*и*" можно получить составное высказывание "*Петров — врач и шахматист*"

Чтобы обращаться к логическим высказываниям, им назначают имена. Пусть через **А** обозначено высказывание *«2-четное число",* а через **В** — высказывание *«6- четное число".* Тогда составное высказывание *«2 и 6 четные числа"* можно кратко записать как

А и В. Здесь **"и"** — логическая связка, **А, В** — логические переменные, которые могут принимать только два значения — "истина" или "ложь", "1" и "0".

Каждая логическая связка рассматривается как операция над логическими высказываниями и имеет свое название и обозначение: конъюнкция, дизъюнкция, отрицание, импликация, эквиваленция.

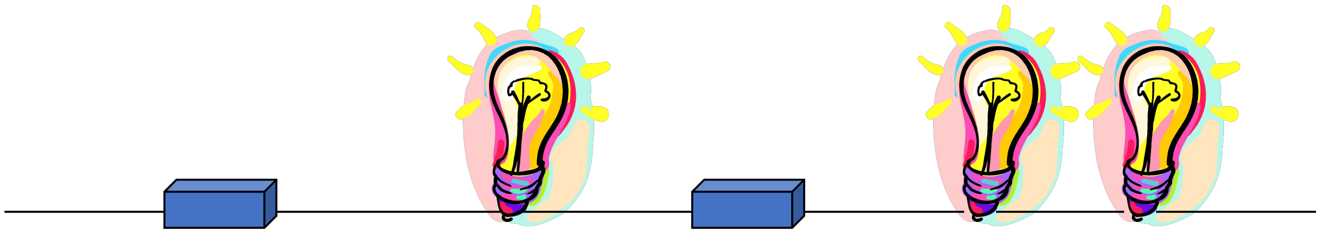
Конъюнкция
логическое умножение

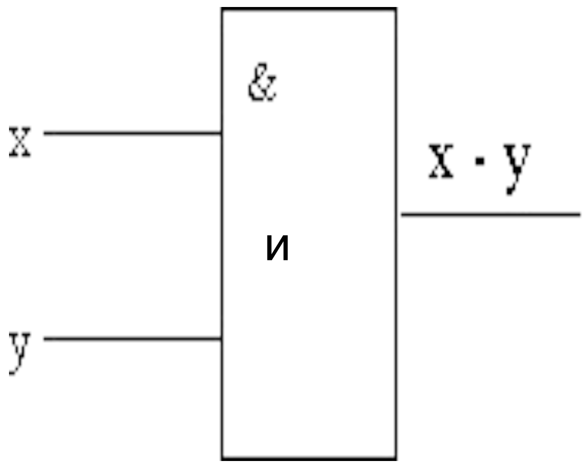
Конъюнкцией высказываний А и В называется высказывание, которое истинно только тогда, когда А и В истинны.

Записывается: **А∧В; А&В;А·В;**

Читается: И (AND)

Последовательное соединение





x	y	x·y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Элемент «И»

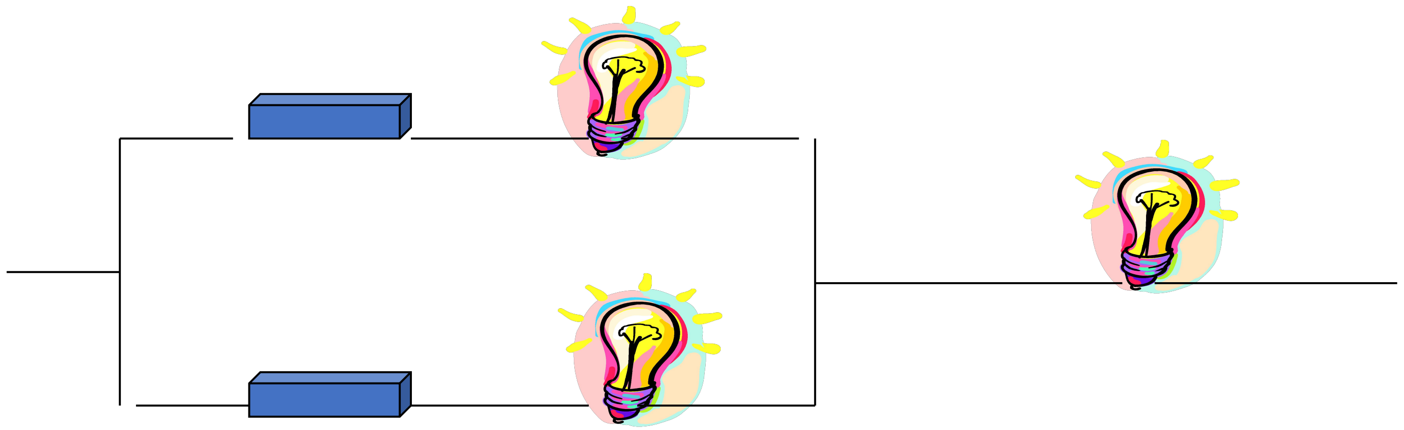
Дизъюнкция
Логическое сложение

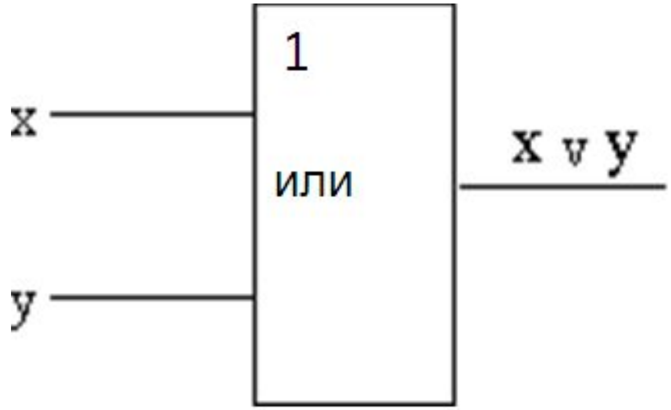
Дизъюнкцией высказываний А и В называется высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны.

Записывается: $A \vee B$; $A+B$

Читается: ИЛИ (OR)

Параллельное соединение





x	y	x v y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Элемент «ИЛИ»

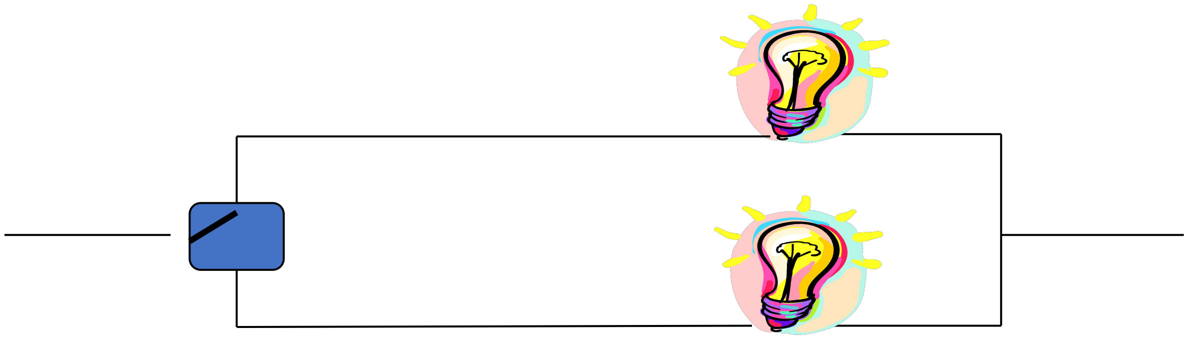
Инверсия-Отрицание

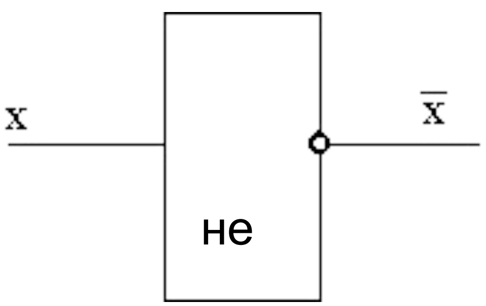
Отрицанием высказывания А называется высказывание , которое истинно, когда А ложно.

Записываетcя: $\overline{A}$; ***A'***

Читается: НЕ А (NOT)

Инвертор





x	$\bar{x}$
0	1
1	0

Элемент «НЕ»

Импликация

Импликацией высказываний А и В называется высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда А истинно, В ложно.

А называется *посылкой*, а В *заключением*. Записывается А =>В (из А следует В).

Операция, выражаемая связками *"если ..., то"*, *"из ...следует"*,*"... влечет ..."*

А =>В можно заменить на ¬А V В

Импликация

A	B	A=>B
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Эквиваленция

Эквиваленцией высказываний А и В называется высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда высказывания А и В имеют одинаковые значения истинности (А *эквивалентно* В).

Записывается: А <=> В

Операция, выражаемая связками "*тогда и только тогда*", "*равносильно*"

А <=> В можно заменить на

(A & B)V(¬A & ¬B)

Эквиваленция

A	B	A<=>B
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

- Последовательность выполне-
ния операций в сложных высказываниях задается **круглыми скобками.** Но для уменьшения числа скобок договорились считать, что сначала выполняется *операция*

-отрицания ("не"), затем

-конъюнкция ("и"), после *-дизъюнкция ("или")* и затем *-импликация*.

Логическая формула.

С помощью логических переменных и символов логических операций любое высказывание можно формализовать, то есть **заменить логической формулой.**

Определение <u>логической формулы</u>:

1. Всякая логическая переменная и символы "истина" ("1") и "ложь" ("0") — формулы.
2. Если A и B — формулы, то , $\overline{A}$, A · B , A v B ,
 A→ B , A↔ B — формулы.
3. Никаких других формул в алгебре логики нет.

Работу логических элементов описывают с помощью таблиц истинности

Таблица истинности это табличное представление логической схемы (операции), в котором перечислены все возможные сочетания значений истинности входных сигналов (операндов) вместе со значением истинности выходного сигнала (результата операции) для каждого из этих сочетаний.

- Для формулы, которая содержит две переменные, таких наборов значений переменных всего четыре:
- (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1).
- Если формула содержит три переменные, то возможных наборов значений переменных восемь:
- (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1),

  (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1).

Составим таблицу истинности для формулы

$$\overline{x \vee y} \cdot (x \cdot \overline{y})$$

Переменные		Промежуточные логические формулы				Формула
x	y	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\overline{y}$	$x \cdot \overline{y}$	$\overline{x \vee y} \cdot (x \cdot \overline{y})$
0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Если **при всех наборах значений переменных x и y формула принимает значение 1**, то

она является ***тождественно истинной;***

Если значение 0, то ***тождественно ложной;***

***Если же* в некоторых случаях функция принимает значение 1, а в некоторых — 0**, то она является **выполнимой.**

Основные законы логики:

$A = A$ – закон тождества

$A \,\&\, \overline{A} = 0$ – закон непротиворечия

$A \vee \overline{A} = 1$ – закон исключенного третьего

$\overline{\overline{A}} = A$ – закон двойного отрицания

Свойства констант:

$\bar{0} = 1$ $\bar{1} = 0$

$A \vee 0 = A$ $A \,\&\, 0 = 0$

$A \vee 1 = 1$ $A \,\&\, 1 = 1$

Законы идемпотентности:

$A \vee A = A$

$A \,\&\, A = A$

Законы коммутативности:

$A \vee B = B \vee A$

$A \,\&\, B = B \,\&\, A$

Законы ассоциативности:

$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$

$A \,\&\, (B \,\&\, C) = (A \,\&\, B) \,\&\, C$

Законы дистрибутивности:

$A \vee (B \,\&\, C) = (A \vee B) \,\&\, (A \vee C)$

$A \,\&\, (B \vee C) = (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)$

Законы поглощения:

$A \vee (A \,\&\, B) = A$

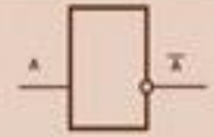
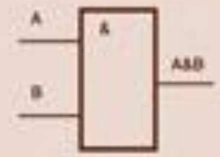
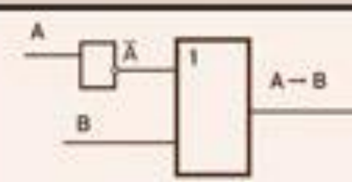
$A \,\&\, (A \vee B) = A$

Законы де Моргана:

$\overline{A \vee B} = \overline{A} \,\&\, \overline{B}$

$\overline{A \,\&\, B} = \overline{A} \vee \overline{B}$

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

<table>
<tr><th>ОПЕРАЦИЯ</th><th>ОБОЗНАЧЕНИЕ</th><th>ТАБЛИЦА ИСТИННОСТИ</th><th>ЛОГИЧЕСКИЙ ЭЛЕМЕНТ ИЛИ ФРАГМЕНТ СХЕМЫ</th></tr>
<tr><td>ИНВЕРСИЯ (ЛОГИЧЕСКОЕ ОТРИЦАНИЕ)</td><td>не A, $\overline{A}$,
¬A, not A, <></td><td><table><tr><th>A</th><th>$\overline{A}$</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>КОНЪЮНКЦИЯ (ЛОГИЧЕСКОЕ УМНОЖЕНИЕ)</td><td>A и B, A & B,
A ∧ B, A and B
A * B</td><td><table><tr><th>A</th><th>B</th><th>A∧B</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>ДИЗЪЮНКЦИЯ (ЛОГИЧЕСКОЕ СЛОЖЕНИЕ)</td><td>A или B, A + B,
A | B, A ∨ B, A or B</td><td><table><tr><th>A</th><th>B</th><th>AVB</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>ИМПЛИКАЦИЯ (ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДОВАНИЕ)</td><td>"если... ,то..."
A ⟶ B, A ⇒ B</td><td><table><tr><th>A</th><th>B</th><th>A→B</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ (ЛОГИЧЕСКОЕ РАВЕНСТВО)</td><td>"... тогда и только тогда, когда..."
A ↔ B,
A ≡ B,
A ~ B,</td><td><table><tr><th>A</th><th>B</th><th>A↔B</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td><td> </td></tr>
</table>

Рассмотрим особенности
Записи целых чисел со знаком на примере **однобайтового формата**, при котором для знака отводится один разряд, а для цифр абсолютной величины – семь разрядов.

Формат числа в байтах	**Диапазон**	
	Запись с порядком	**Обычная запись**
1	$-2^{7} \ldots 2^{7}-1$	**–128 ... 127**
2	$-2^{15} \ldots 2^{15}-1$	**–32768 ... 32767**

*

В компьютерной технике применяются три формы записи (кодирования) целых чисел со знаком: прямой код, обратный код, дополнительный код.

- **Положительные числа** в прямом, обратном и дополнительном кодах изображаются одинаково — двоичными кодами с цифрой 0 в знаковом разряде.

*

Например:

Число $1_{10}=1_2$

0	0	0	0	0	0	0	1

Знак числа "+"

Число $127_{10}=1111111_2$

0	1	1	1	1	1	1	1

Знак числа "+"

Отрицательные числа в прямом, обратном и дополнительном кодах имеют разное изображение.

- **Прямой код**. В знаковый разряд помещается цифра 1, а в разряды цифровой части числа — двоичный код его абсолютной величины.

*

Например

Прямой код числа - 1

1	0	0	0	0	0	0	1

Знак числа "-"

Прямой код числа - 127

1	1	1	1	1	1	1	1

Знак числа "-"

Обратный код.

- Получается инвертированием всех цифр двоичного кода абсолютной величины числа, включая разряд знака: нули заменяются единицами, а единицы — нулями.

*

Например:

Число: -1

Код модуля числа: 0 0000001

Обратный код числа: 1 1111110

1	1	1	1	1	1	1	0

Число: -127

Код модуля числа: 0 1111111

Обратный код числа: 1 0000000

1	0	0	0	0	0	0	0

•**Дополнительный код**.

Получается образованием обратного кода с последующим прибавлением единицы к его младшему разряду. Например

Дополнительный код числа - 1

1	1	1	1	1	1	1	1

Дополнительный код числа - 127

1	0	0	0	0	0	0	1