Логика – это *наука о способах доказательств и опровержений.*

Основатель – Аристотель.

Алгебра логики – раздел математики изучающий высказывания, рассматриваемые со стороны их логических значений (истинности (1)или ложности (0)) и логических операций над ними.

Алгебра логики

Алгебра логики возникла в середине XIX века в трудах английского математика **Джорджа Буля**.
Ее создание представляло собой попытку решать традиционные логические задачи алгебраическими методами.

Джордж Буль

Что же такое логическое высказывание?

<u>Логическое высказывание</u> — это любое повествовательное предложение, в отношении которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Так, например, предложение "*6 — четное число*" следует считать высказыванием, так как оно истинное. Предложение "*Рим — столица Франции*" тоже высказывание, так как оно ложное.

Употребляемые в обычной речи слова и словосочетания **"не"**, **"и"**, **"или"**, **"если... , то"**, **"тогда и только тогда"** и другие позволяют из уже заданных высказываний строить новые высказывания. Такие слова и словосочетания называются **логическими связками.**

Высказывания, образованные из других высказываний с помощью логических связок, называются **составными.** Высказывания, не являющиеся составными, называются **элементарными.**

Так, например, из элементарных высказываний "*Петров — врач*", "*Петров — шахматист*" при помощи связки "*и*" можно получить составное высказывание "*Петров — врач и шахматист*"

Чтобы обращаться к логическим высказываниям, им назначают имена. Пусть через **А** обозначено высказывание *«2-четное число",* а через **В** — высказывание *«6- четное число".* Тогда составное высказывание *«2 и 6 четные числа"* можно кратко записать как

А и В. Здесь **"и"** — логическая связка, **А, В** — логические переменные, которые могут принимать только два значения — "истина" или "ложь", "1" и "0".

Каждая логическая связка рассматривается как операция над логическими высказываниями и имеет свое название и обозначение:

конъюнкция, дизъюнкция, отрицание, импликация, эквиваленция.

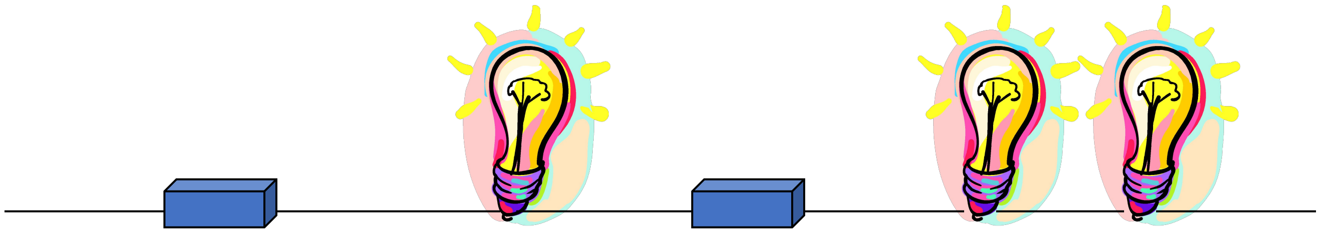
Конъюнкция
логическое умножение

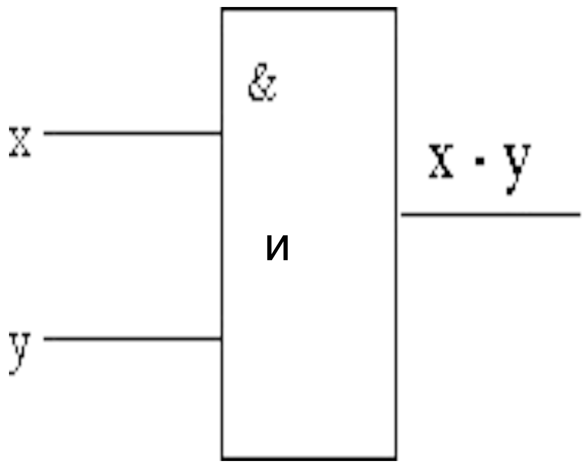
Конъюнкцией высказываний А и В называется высказывание, которое истинно только тогда, когда А и В истинны.

Записывается: **А⋀В; А&В;А·В;**

Читается: И (AND)

Последовательное соединение





x	y	x·y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Элемент «И»

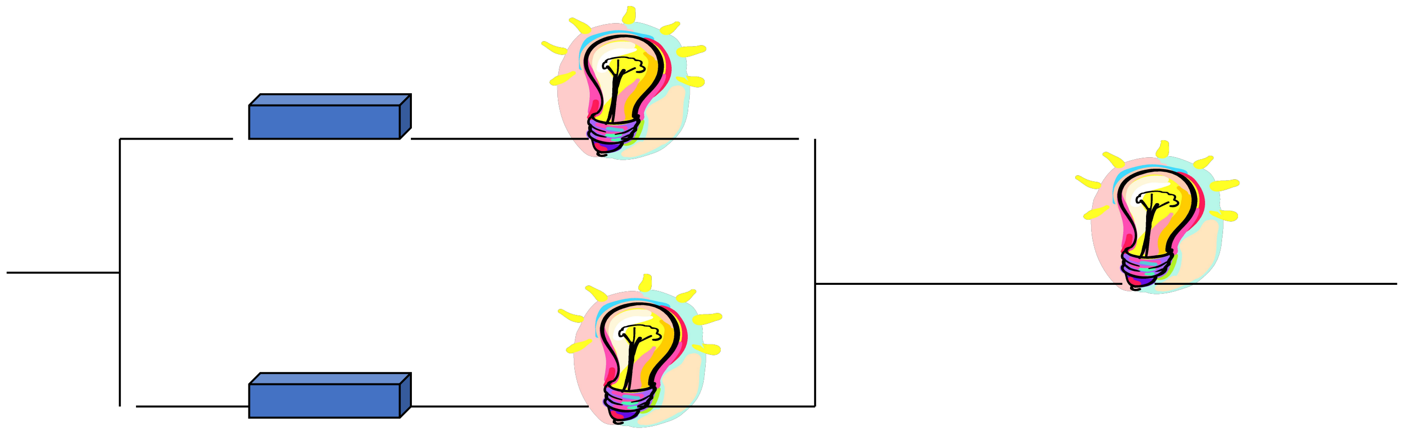
Дизъюнкция
Логическое сложение

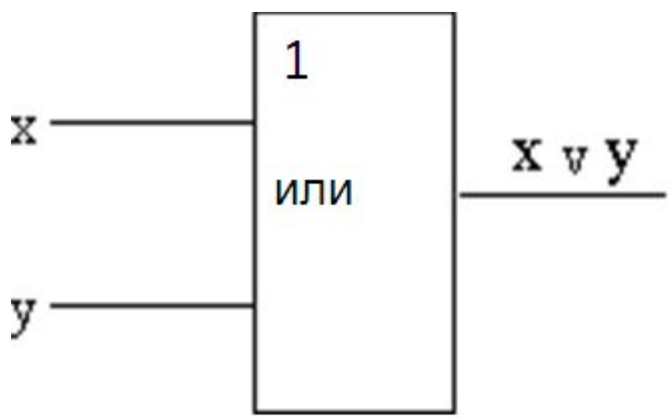
Дизъюнкцией высказываний А и В называется высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны.

Записывается: А∨В; А+В

Читается: ИЛИ (OR)

Параллельное соединение





x	y	x v y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Элемент «ИЛИ»

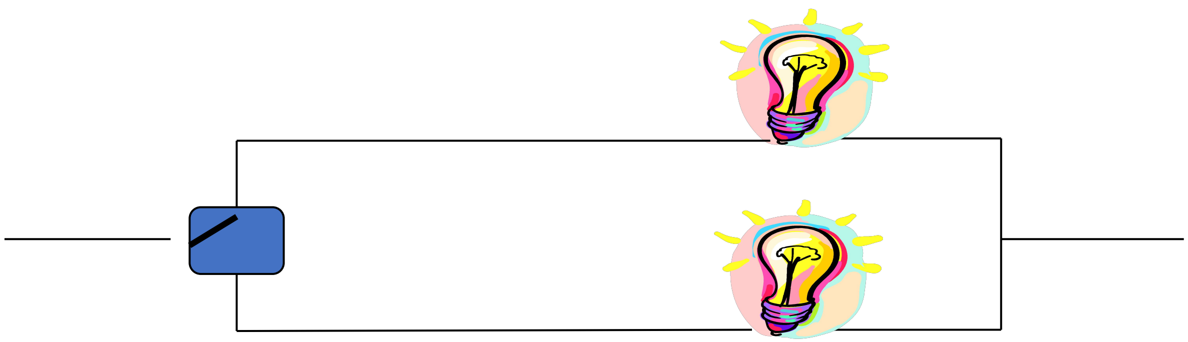
Инверсия-Отрицание

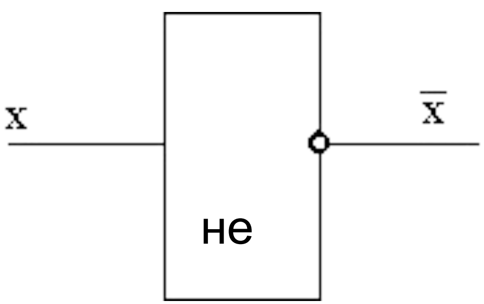
Отрицанием высказывания А называется высказывание , которое истинно, когда А ложно.

Записывается: $\overline{A}$; ***A’***

Читается: НЕ А (NOT)

Инвертор





x	$\overline{x}$
0	**1**
1	**0**

Элемент «НЕ»

Импликация

Импликацией высказываний А и В называется высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда

А истинно, В ложно.

А называется *посылкой*, а В *заключением.* Записывается А =>В

(из А следует В).

Операция, выражаемая связками *"если ..., то"*, *"из ...следует"*,*"... влечет ..."*

А =>В можно заменить на¬A v B

Импликация

A	B	A=>B
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Эквиваленция

Эквиваленцией высказываний A и B называется высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда высказывания A и B имеют одинаковые значения истинности (A *эквивалентно* B).

Записывается: A <=> B

Операция, выражаемая связками "*тогда и только тогда*", "*равносильно*"

A <=> B можно заменить на

(A & B)V(¬A & ¬B)

Эквиваленция

A	B	A<=>B
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

- Последовательность выполне-
  ния операций в сложных высказываниях задается **круглыми скобками.** Но для уменьшения числа скобок договорились считать, что сначала выполняется *операция*

  -отрицания ("не"), затем

  -конъюнкция ("и"), после -*дизъюнкция ("или")* и затем -*импликация*.

Логическая формула.

С помощью логических переменных и символов логических операций любое высказывание можно формализовать, то есть **заменить логической формулой.**

Определение <u>логической формулы</u>:

1. Всякая логическая переменная и символы "истина" ("1") и "ложь" ("0") — формулы.
2. Если A и B — формулы, то , $\bar{A}$, A · B , A v B ,
 $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ — формулы.
3. Никаких других формул в алгебре логики нет.

Работу логических элементов описывают с помощью таблиц истинности

Таблица истинности это табличное представление логической схемы (операции), в котором перечислены все возможные сочетания значений истинности входных сигналов (операндов) вместе со значением истинности выходного сигнала (результата операции) для каждого из этих сочетаний.

- Для формулы, которая содержит две переменные, таких наборов значений переменных всего четыре:
- (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1).
- Если формула содержит три переменные, то возможных наборов значений переменных восемь:
- (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1),

  (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1).

Составим таблицу истинности для формулы

$$\overline{x \vee y} \cdot (x \cdot \overline{y})$$

Переменные		Промежуточные логические формулы				Формула
x	y	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\overline{y}$	$x \cdot \overline{y}$	$\overline{x \vee y} \cdot (x \cdot \overline{y})$
0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Если **при всех наборах значений переменных x и y формула принимает значение 1**, то она является ***тождественно истинной***;
Если значение 0, то ***тождественно ложной***;
***Если же* в некоторых случаях функция принимает значение 1, а в некоторых — 0**, то она является **выполнимой**.

Основные законы логики:

$A = A$ – закон тождества

$A \,\&\, \overline{A} = 0$ – закон непротиворечия

$A \vee \overline{A} = 1$ – закон исключенного третьего

$\overline{\overline{A}} = A$ – закон двойного отрицания

Свойства констант:

$\overline{0} = 1$ $\quad$ $\overline{1} = 0$

$A \vee 0 = A$ $\quad$ $A \,\&\, 0 = 0$

$A \vee 1 = 1$ $\quad$ $A \,\&\, 1 = 1$

Законы идемпотентности:

$A \vee A = A$

$A \,\&\, A = A$

Законы коммутативности:

$A \vee B = B \vee A$

$A \,\&\, B = B \,\&\, A$

Законы ассоциативности:

$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$

$A \,\&\, (B \,\&\, C) = (A \,\&\, B) \,\&\, C$

Законы дистрибутивности:

$A \vee (B \,\&\, C) = (A \vee B) \,\&\, (A \vee C)$

$A \,\&\, (B \vee C) = (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)$

Законы поглощения:

$A \vee (A \,\&\, B) = A$

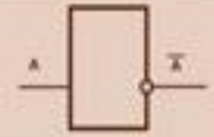
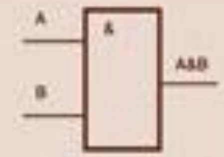
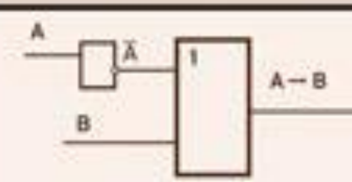
$A \,\&\, (A \vee B) = A$

Законы де Моргана:

$\overline{A \vee B} = \overline{A} \,\&\, \overline{B}$

$\overline{A \,\&\, B} = \overline{A} \vee \overline{B}$

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

ОПЕРАЦИЯ	ОБОЗНАЧЕНИЕ	ТАБЛИЦА ИСТИННОСТИ	ЛОГИЧЕСКИЙ ЭЛЕМЕНТ ИЛИ ФРАГМЕНТ СХЕМЫ
ИНВЕРСИЯ (ЛОГИЧЕСКОЕ ОТРИЦАНИЕ)	не **A**, $\overline{A}$, ¬**A**, not **A**, <>	A $\overline{A}$ 0 1 1 0	
КОНЪЮНКЦИЯ (ЛОГИЧЕСКОЕ УМНОЖЕНИЕ)	**A** *и* **B**, **A** & **B**, **A** ∧ **B**, **A** *and* **B** **A** * **B**	A B A∧B 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1	
ДИЗЪЮНКЦИЯ (ЛОГИЧЕСКОЕ СЛОЖЕНИЕ)	**A** *или* **B**, **A** + **B**, **A** | **B**, **A** ∨ **B**, **A** *or* **B**	A B A∨B 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1	
ИМПЛИКАЦИЯ (ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДОВАНИЕ)	*"если... ,то..."* **A** → **B**, **A** ⇒ **B**	A B A→B 0 0 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1	
ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ (ЛОГИЧЕСКОЕ РАВЕНСТВО)	*"... тогда и только тогда, когда..."* **A** ↔ **B**, **A** ≡ **B**, **A** ~ **B**,	A B A↔B 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 1	 

Рассмотрим особенности
Записи целых чисел со знаком на примере **однобайтового формата**, при котором для знака отводится один разряд, а для цифр абсолютной величины – семь разрядов.

Формат числа в байтах	Диапазон	
	Запись с порядком	Обычная запись
1	$-2^{7} \dots 2^{7}-1$	–128 ... 127
2	$-2^{15} \dots 2^{15}-1$	–32768 ... 32767

*

В компьютерной технике применяются три формы записи (кодирования) целых чисел со знаком: прямой код, обратный код, дополнительный код.

- **Положительные числа** в прямом, обратном и дополнительном кодах изображаются одинаково — двоичными кодами с цифрой 0 в знаковом разряде.

*

Например:

Число $1_{10}=1_2$

0	0	0	0	0	0	0	1

Знак числа "+"

Число $127_{10}=1111111_2$

0	1	1	1	1	1	1	1

Знак числа "+"

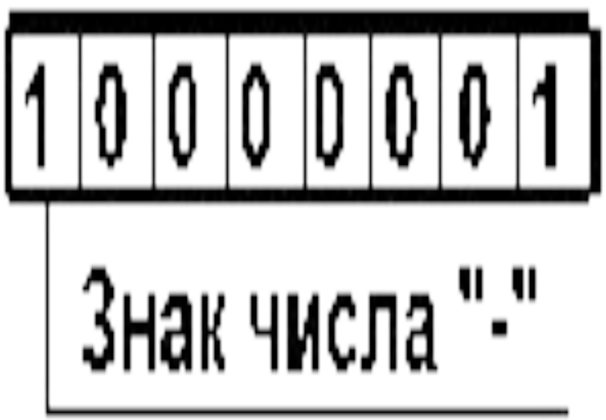
Отрицательные числа в прямом, обратном и дополнительном кодах имеют разное изображение.

- **Прямой код**. В знаковый разряд помещается цифра 1, а в разряды цифровой части числа — двоичный код его абсолютной величины.

*

Например

Прямой код числа - 1



Прямой код числа - 127

Обратный код.

- Получается инвертированием всех цифр двоичного кода абсолютной величины числа, включая разряд знака: нули заменяются единицами, а единицы — нулями.

*

Например:

Число: -1

Код модуля числа: 0 0000001

Обратный код числа: 1 1111110

1	1	1	1	1	1	1	0

Число: -127

Код модуля числа: 0 1111111

Обратный код числа: 1 0000000

1	0	0	0	0	0	0	0

•Дополнительный код.

Получается образованием обратного кода с последующим прибавлением единицы к его младшему разряду. Например

Дополнительный код числа - 1

1	1	1	1	1	1	1	1

Дополнительный код числа - 127

1	0	0	0	0	0	0	1