Дифференцирование показательной и логарифмической функций

$$(e^x)' = e^x$$

$$\left(e^{kx}\right)' = ke^x$$

$$a = e^{\ln a} \Rightarrow a^x = e^{x\ln a} \Rightarrow (a^x)' = \left(e^{x\ln a}\right)' =$$

$$= \ln a \cdot e^{x\ln a} = \ln a \cdot a^x$$

$$\boxed{(a^x)' = \ln a \cdot a^x}$$

Пример:

- Вычислить значение производной функции $y = 5^x$ в точке $x = 0$.

Решение:

$$(a^x)' = \ln a \cdot a^x$$

$$(5^x)' = \ln 5 \cdot 5^x$$

$$y'(0) = \ln 5 \cdot 5^0 = \ln 5 \cdot 1 = \ln 5$$

Ответ: $y'(0) = \ln 5$.

Пример:

- Найти производную функции $y = 4^{6x+5}$.

Решение:

$$f'(kx + m) = kf'(kx + m)$$

$$(a^x)' = \ln a \cdot a^x$$

$$(4^{6x+5})' = 6 \cdot (4^{6x+5})' = 6 \cdot \ln 4 \cdot 4^{6x+5} = \ln 4^6 \cdot 4^{6x+5} =$$

$$= \ln 4096 \cdot 4^{6x+5}$$

Ответ: $y' = \ln 4096 \cdot 4^{6x+5}$.

$$\boldsymbol{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \Rightarrow (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' =$$

$$= \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\boxed{(\log_a \boldsymbol{x})' = \frac{1}{x \ln a}}$$

Пример:

- Вычислить значение производной функции $y = \log_3 x$ в точке $x = 1$.

Решение:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$$

$$(\log_3 x)' = \frac{1}{x\ln 3}$$

$$y'(1) = \frac{1}{1 \cdot \ln 3} = \frac{1}{\ln 3}$$

Ответ: $y'(1) = \frac{1}{\ln 3}$.

Пример:

- Найти производную функции $y = \log_8(7x + 9)$.

Решение:

$f'(kx + m) = kf'(kx + m)$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$

$(\log_8(7x + 9))' = 7 \cdot (\log_8(7x + 9))' = 7 \cdot \dfrac{1}{(7x + 9)\ln 8}$

$= \dfrac{7}{(7x + 9)\ln 8}$

Ответ: $y' = \frac{7}{(7x+9)\ln 8}$.

$$(e^x)' = e^x$$

$$\left(e^{kx}\right)' = ke^x$$

$$(a^x)' = \ln a \cdot a^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$