ЛЕКЦИЯ 1

1. Числовая прямая, числовые множества, числовые промежутки.
2. Прямоугольные координаты на плоскости
3. Понятие функции одной переменной, основные определения, связанные с понятием функции.
4. Основные элементарные функции.

Числовая прямая

- **Определение числовой прямой.** Прямая, на которой зафиксирована точка *O – начало координат, положительное направление* и *единичный отрезок* [0,1] , называется *координатной или числовой прямой.*

Каждому действительному числу *a* соответствует одна и только одна точка *A* координатной прямой. Чтобы построить точку *A*, необходимо отложить отрезок *OA*, длина которого $|OA| = a$ в положительном направлении, если $a > 0$, или в отрицательном направлении, если $a < 0$. Если числу *x* на координатной прямой соответствует точка *M*, то это число называется координатой точки *M*. Обозначение: $M(x)$. Если $M(x)$, то точку *M* называют для краткости точкой *x*.

Прямоугольная (декартова) система координат на плоскости

- Плоскость, на которой выбраны две взаимно перпендикулярные координатные прямые с общим началом O и одинаковыми единичными отрезками, называется *координатной плоскостью*. Точка O называется *началом координат*. Обычно горизонтальная координатная прямая называется *осью абсцисс* или *осью x*-ов и обозначается через Ox и вертикальная – *осью ординат* или *осью y*-ов и обозначается через Oy. Координатную плоскость с осями Ox и Oy будем обозначать через Oxy.

Прямоугольные координаты на плоскости

- Пусть *M* – произвольная точка координатной плоскости, $M_1(x_M)$ - проекция точки *M* на ось *Ox* и $M_2(y_M)$ - проекция точки *M* на ось *Oy* (в скобках записаны координаты точек M_1 и M_2 на осях *Ox* и *Oy*, соответственно).

Упорядоченная пара чисел (x_M, y_M) называется *прямоугольными координатами точки M*. То, что точка *M* имеет координаты (x_M, y_M) , записывается так: $M(x_M, y_M)$.

Построение точки на координатной плоскости

- Наоборот, каждой упорядоченной паре чисел (x_0, y_0) можно сопоставить единственную точку M с координатами $x_M = x_0$ и $y_M = y_0$. Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между всеми упорядоченными парами действительных чисел и точками координатной плоскости.

Расстояние между двумя точками на координатной плоскости

- Пусть $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$ - две данные точки на координатной плоскости, тогда расстояние между ними определяется по формуле:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

В частности,

$$|OA| = \sqrt{{x_A}^2 + {y_A}^2}.$$

ОБОЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

N – множество натуральных чисел:

$$N = \{0,1,2,3, \dots\}$$

Z – множество целых чисел:

$$Z = \{\dots, -2, -1,0,1,2, \dots\}$$

Q – множество рациональных чисел:

$$Q = \{m/n : m \in Z, n \in N, n \neq 0\}$$

R – множество действительных чисел

$$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$$

ОБОЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ЧИСЛОВЫХ ПРОМЕЖУТКОВ

Вид промежутка	Геометрическое изображение	Обозначение	Запись с помощью неравенства
Интервал		(a, b)	$a < x < b$
Отрезок		$[a, b]$	$a \le x \le b$
Полуинтервал		$(a, b]$	$a < x \le b$
Полуинтервал		$[a, b)$	$a \le x < b$
Луч или полупрямая		$[a, +\infty)$	$a \le x$
Луч или полупрямая		$(-\infty, a]$	$x \le a$
Открытый луч		$(a, +\infty)$	$x > a$
Открытый луч		$(-\infty, a)$	$x < a$
ε-окрестность точки b		$(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$	$\lvert x - b \rvert < \varepsilon$

Определение модуля числа

- *Модулем* или *абсолютной величиной* действительного числа *a* называется само число *a*, если $a \geq 0$, и противоположное ему число -*a*, если $a < 0$. Обозначение: $|a|$. Итак,

$$|a| = \begin{cases} a, \text{если } a \geq 0 \\ -a, \text{если } a < 0 \end{cases}$$

Примеры. $|0| = 0$; $\left|\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$;
$|\pi - 3| = \pi - 3$; $|-0{,}7| = 0{,}7$

Свойства модулей

- Для любых действительных чисел $a, b \in R$:

1. $|a| \geq 0$
2. $|a| = |-a|$
3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
4. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, где $b \neq 0$
5. $|a|^2 = |a^2|$

Формула расстояния между двумя точками на числовой прямой

- *Если* $A(a)$ *и* $B(b)$, *то расстояние* AB *между точками A и B равно* $|b-a|$.

Обозначение:

$$|AB| = |b - a|.$$

Понятие функции одной переменной

- Пусть даны два непустых множества X и Y. Если каждому элементу $x \in X$ сопоставлен по определенному правилу один и только один элемент $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана *функция* f с множеством значений Y. Обычно функцию обозначают так: $y = f(x)$ или $y = y(x)$. При этом x называется *независимой переменной* или *аргументом*, а переменную y - *функцией*. Множество X называется *областью определения* и обозначается $D(f)$ или $D(y)$, а множество Y называется *множеством значений* функции и обозначается $E(f)$ или $E(y)$. Значение функции $y = f(x)$ при $x = a$ обозначается через $f(a)$.

Свойства функций

- *Графиком* функции $y = f(x)$ называется множество точек координатной плоскости Oxy с координатами $(x, f(x))$ для всех $x \in D(f)$.

  Функция $y = f(x)$, область определения которой, как числовой промежуток, симметрична относительно начала координат, называется *четной*, если $f(-x) = f(x)$ для всех $x \in D(f)$, и называется *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$ для всех $x \in D(f)$. График четной функции симметричен относительно оси Oy, график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

  Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T > 0$, что $f(x + T) = f(x)$ для всех $x \in D(f)$. Наименьшее $\tau > 0$, обладающее указанным свойством, называется *периодом* данной функции.

Монотонные функции

- Числовые промежутки, на которых функция сохраняет свой знак (т.е. остается только положительной или только отрицательной), называются *промежутками знакопостоянства* функции. Значения аргумента $x \in D(f)$, при которых $f(x) = 0$, называются *корнями* или *нулями функции*. Корни функции – это абсциссы точек пересечения графика функции с осью Ox.

  Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей на данном числовом промежутке*, если

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2),$$

  и называется *убывающей*, если

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

  для всех x_1 и x_2 из этого числового промежутка.

  Функция $y = f(x)$ называется *монотонной на данном числовом промежутке*, если она либо возрастающая, либо убывающая на этом промежутке.

ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Степенные функции

- *Степенные функции* – это функции вида $y = x^a$, где $a \in R$ - фиксированное число.

  В зависимости от вида числа a некоторые степенные функции имеют собственные названия. Так при $a = 1$ функция $y = x$ называется *линейной**, а ее график представляет собой биссектрису 1-го и 3-го координатных углов; при $a = 2$ функция $y = x^2$ называется *квадратичной***, а ее график называется *параболой*; при $a = 3$ функция $y = x^3$ называется *кубической*, а ее график называется *кубической параболой*.

  * В общем случае линейная функция задается уравнением $y = kx + b$

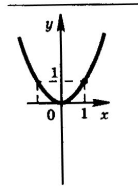
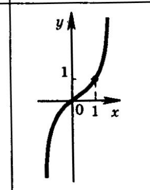
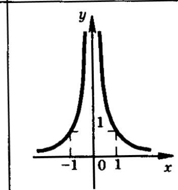
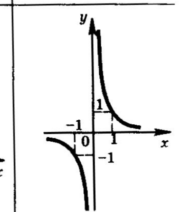
  ** В общем случае квадратичная функция задается уравнением $y = ax^2 + bx + c$

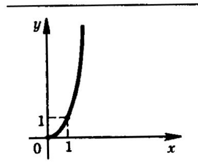
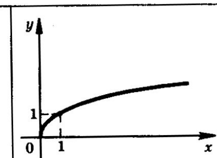
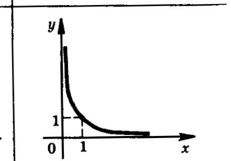
Степенные функции

- При $a = -1$ функция $y = x^{-1} = 1/x$ называется *обратной пропорциональностью*, а ее график называется *гиперболой*; при $a = 1/2$ получаем функцию $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$, графиком которой является парабола, симметричная относительно оси Ox; при $a = 1/3$ получаем функцию $y = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$, графиком которой является кубическая парабола, симметричная относительно оси Ox.

  В общем случае область определения степенной функции – множество положительных чисел, но для значений показателя степени $a \in N$ - область определения – множество R, причем для четных a степенная функция четная, а для нечетных a – нечетная.

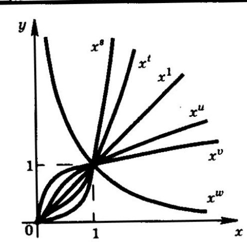
Графики степенных функций

$n > 0$, натуральное		$n < 0$, целое	
n — *четное*	n — *нечетное*	n — *четное*	n — *нечетное*
$D(y) = R$	$D(y) = R$	$D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$	
$E(y) = [0;\ +\infty)$	$E(y) = R$	$E(y) = (0;\ +\infty)$	$E(y) = (-\infty;\ 0) \cup$ $\cup\ (0;\ +\infty)$
			
Четная функция	Нечетная функция	Четная функция	Нечетная функция

n — не целое число		
$n > 1$	$0 < n < 1$	$n < 0$
$D(y) = [0;\ +\infty) = E(y)$		$D(y) = (0;\ +\infty) = E(y)$
		

Сравнение графиков степенных функций

$w < 0 < v < u < 1 < t < s$



Тригонометрические функции

- *Тригонометрические функции –*

$$y = sinx, y = cosx, y = tgx, y = ctgx,$$

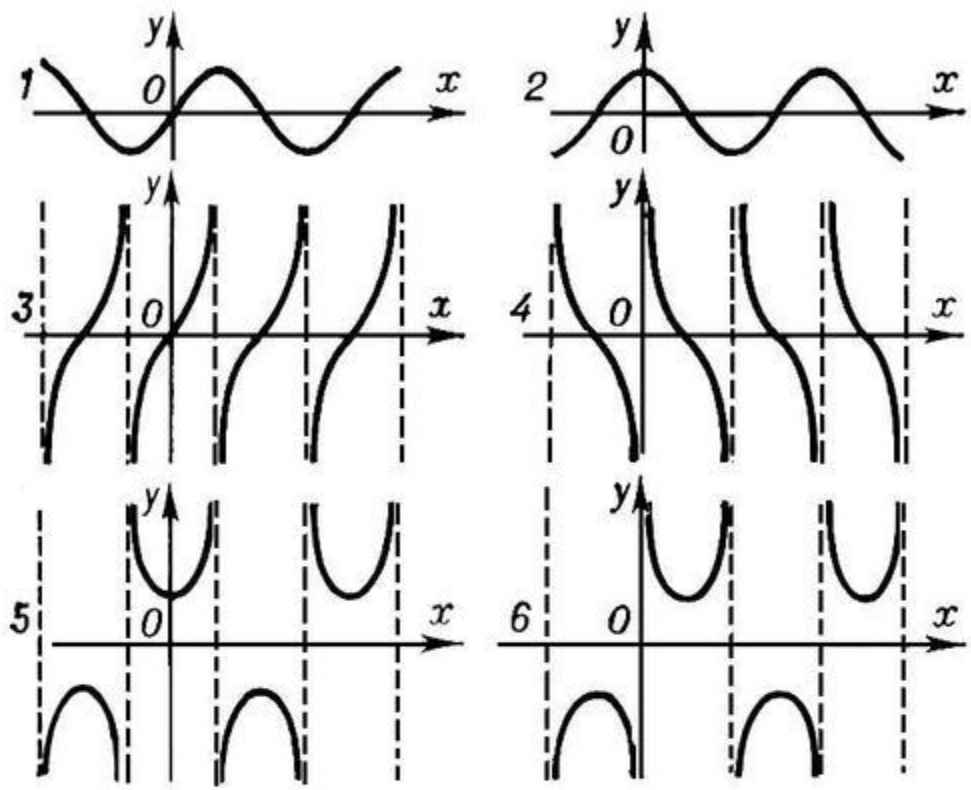
$$y = secx = \frac{1}{cosx}, y = cosecx = \frac{1}{sinx}.$$

Все тригонометрические функции являются периодическими, причем период $\tau = 2\pi$ для функций $y = sinx, y = cosx, y = secx$ и $y = cosecx$, и $\tau = \pi$ для функций $y = tgx$ и $y = ctgx$. Функция $y = cosx$ является четной, а все остальные являются нечетными.

Область определения функций $y = sinx, y = cosx$ – множество *R;* функции $y = tgx$ – множество $R - \{\pi/2 + \pi k : k \in Z\}$; функции $y = ctgx$ – множество

$$R - \{\pi k : k \in Z\}$$

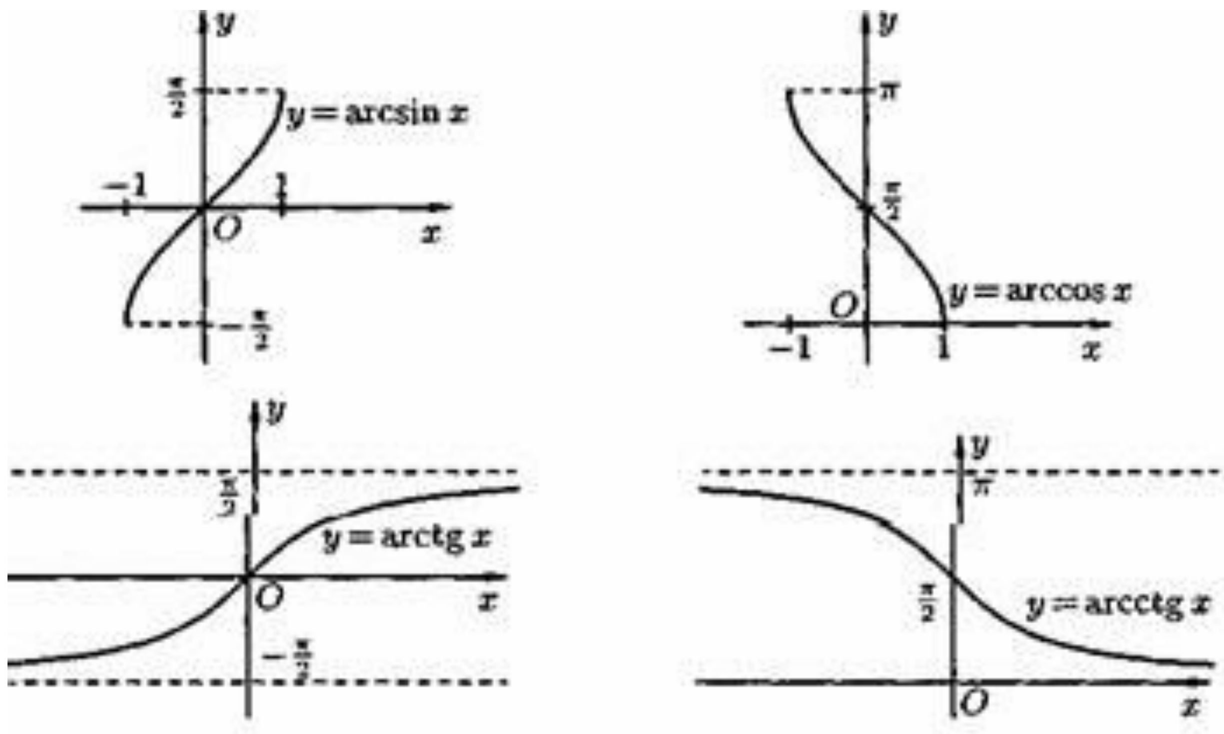
Графики тригонометрических функций



Обратные тригонометрические функции

- *Обратные тригонометрические функции* – $y = arcsinx$, $y = arccosx$, $y = arctgx$ и $y = arcctgx$. Область определения функций $y = arcsinx$, $y = arccosx$ - отрезок $[-1; 1]$, а множество значений – отрезок $[-\pi/2\,; \pi/2]$, функция $y = arcsinx$- нечетная и возрастающая, а $y = arccosx$ - убывающая, причем она не является ни четной, ни нечетной. Функции $y = arctgx$ и $y = arcctgx$ определены на всей числовой прямой, $y = arctgx$ - возрастающая и нечетная, а $y = arcctgx$ - убывающая и не является ни четной, ни нечетной. Множество значений функции $y = arctgx$ - интервал $(-\pi/2\,; \pi/2)$, а функции $y = arcctgx$ - интервал (0; π).

Графики обратных тригонометрических функций



Показательные функции

- *Показательные функции* – функции вида $y = a^x$, где $a > 0, a \neq 1$. Областью определения показательной функции является множество R всех действительных чисел , а множеством значений – множество R^+ всех положительных действительных чисел. Если $a > 1$, то функция $y = a^x$ является возрастающей на всей числовой прямой, если $0 < a < 1$, то функция $y = a^x$ является убывающей. Функция $y = e^x$ называется *экспонентой*, для экспоненты часто используется следующее обозначение: $y = \exp(x)$.

Графики показательных функций

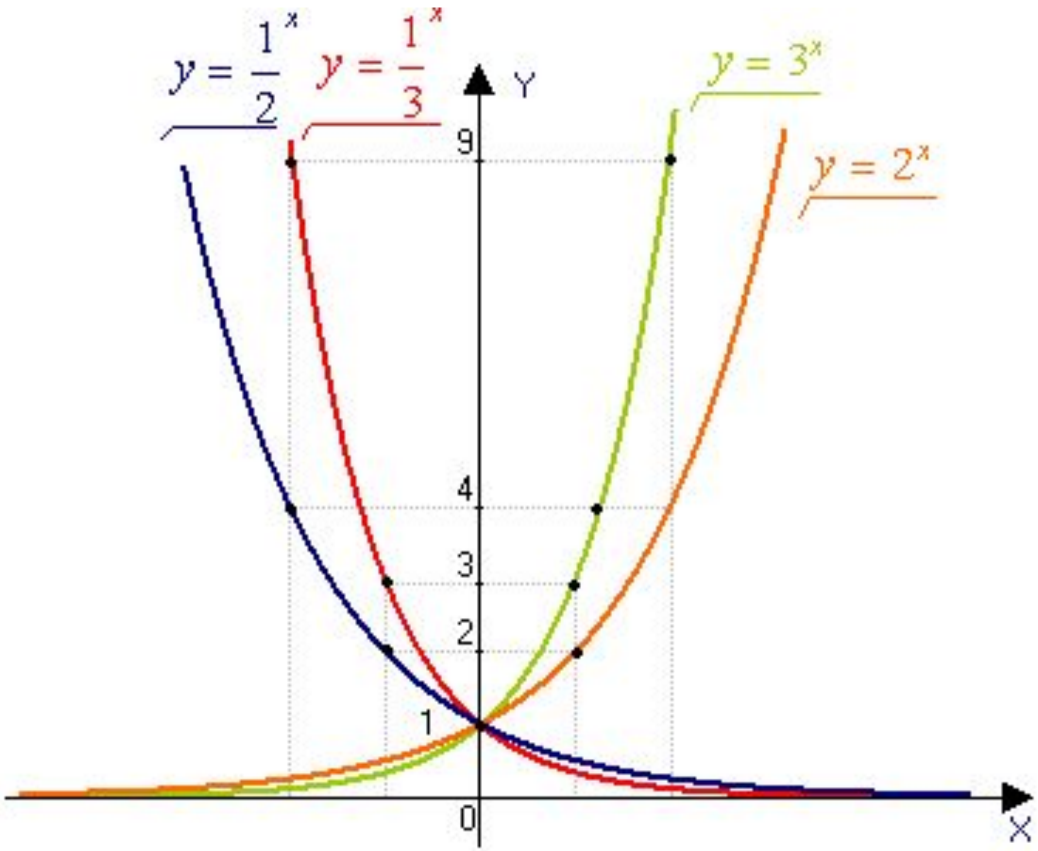
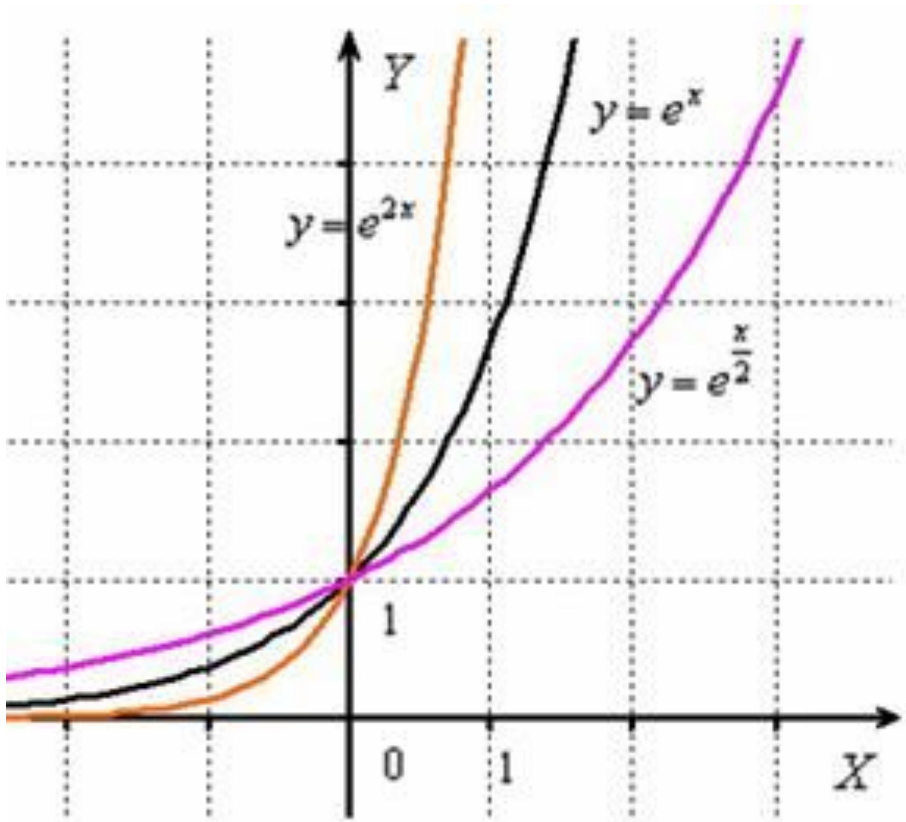


График экспоненты



Логарифмические функции

- *Логарифмические функции* - $y = \log_a x$, где $a > 0, a \neq 1$. Областью определения логарифмической функции является множество всех положительных действительных чисел R^+, а множеством значений – множество всех действительных чисел. Если $a > 1$, то функция $y = \log_a x$ является возрастающей на R^+, если $0 < a < 1$, то функция $y = \log_a x$ является убывающей. Если $a = 10$, то функция $y = \log_{10} x = \lg x$ называется *десятичным логарифмом*, если $a = e$, то функция $y = \log_e x = \ln x$ называется *натуральным логарифмом*.

График логарифмической функции

График функции $y=\log_a x$, если $a>1$

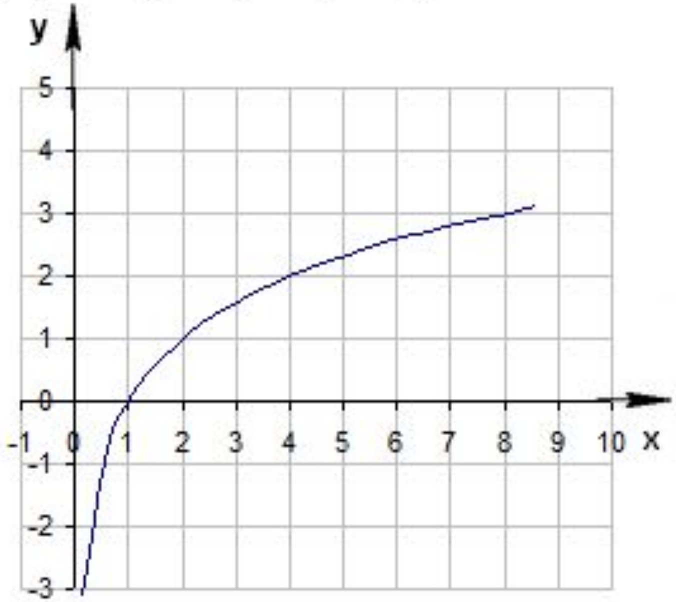


График функции $y=\log_a x$, если $0<a<1$