

ЛЕКЦИЯ 1

1. Числовая прямая, числовые множества, числовые промежутки.
2. Прямоугольные координаты на плоскости
3. Понятие функции одной переменной, основные определения, связанные с понятием функции.
4. Основные элементарные функции.

Числовая прямая

- **Определение числовой прямой.** Прямая, на которой зафиксирована точка O – начало координат, положительное направление и единичный отрезок $[0,1]$, называется координатной или числовой прямой.

Каждому действительному числу a соответствует одна и только одна точка A координатной прямой. Чтобы построить точку A , необходимо отложить отрезок OA , длина которого $|OA| = a$ в положительном направлении, если $a > 0$, или в отрицательном направлении, если $a < 0$. Если числу x на координатной прямой соответствует точка M , то это число называется координатой точки M . Обозначение: $M(x)$. Если $M(x)$, то точку M называют для краткости точкой x .

Прямоугольная (декартова) система координат на

ПЛОСКОСТИ

- Плоскость, на которой выбраны две взаимно перпендикулярные координатные прямые с общим началом O и одинаковыми единичными отрезками, называется *координатной плоскостью*. Точка O называется *началом координат*. Обычно горизонтальная координатная прямая называется *осью абсцисс* или *осью x -ов* и обозначается через Ox и вертикальная – *осью ординат* или *осью y -ов* и обозначается через Oy . Координатную плоскость с осями Ox и Oy будем обозначать через Oxy .

Прямоугольные координаты на плоскости

• Пусть M – произвольная точка координатной плоскости, $M_1(x_M)$ - проекция точки M на ось Ox и $M_2(y_M)$ - проекция точки M на ось Oy (в скобках записаны координаты точек M_1 и M_2 на осях Ox и Oy , соответственно).

Упорядоченная пара чисел (x_M, y_M) называется *прямоугольными координатами точки M* . То, что точка M имеет координаты (x_M, y_M) , записывается так: $M(x_M, y_M)$.

Построение точки на координатной плоскости

Наоборот, каждой упорядоченной паре чисел (x_0, y_0) можно сопоставить единственную точку M с координатами $x_M = x_0$ и $y_M = y_0$. Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между всеми упорядоченными парами действительных чисел и точками координатной плоскости.

Расстояние между двумя точками на координатной плоскости

- Пусть $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$ - две данные точки на координатной плоскости, тогда расстояние между ними определяется по формуле:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

В частности,

$$|OA| = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}.$$

ОБОЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

N – множество натуральных чисел:

$$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Z – множество целых чисел:

$$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Q – множество рациональных чисел:

$$Q = \{m/n : m \in Z, n \in N, n \neq 0\}$$

R – множество действительных чисел

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

ОБОЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ЧИСЛОВЫХ ПРОМЕЖУТКОВ

Вид промежутка	Геометрическое изображение	Обозначение	Запись с помощью неравенства
Интервал		(a, b)	$a < x < b$
Отрезок		$[a, b]$	$a \leq x \leq b$
Полуинтервал		$(a, b]$	$a < x \leq b$
Полуинтервал		$[a, b)$	$a \leq x < b$
Луч или полупрямая		$[a, +\infty)$	$a \leq x$
Луч или полупрямая		$(-\infty, a]$	$x \leq a$
Открытый луч		$(a, +\infty)$	$x > a$
Открытый луч		$(-\infty, a)$	$x < a$
ε -окрестность точки b		$(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$	$ x - b < \varepsilon$

Определение модуля числа

- *Модулем или абсолютной величиной* действительного числа a называется само число a , если $a \geq 0$, и противоположное ему число $-a$, если $a < 0$. Обозначение: $|a|$. Итак,

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

Примеры. $|0| = 0$; $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$;

$$|\pi - 3| = \pi - 3; \quad |-0,7| = 0,7$$

Свойства модулей

Для любых действительных чисел $a, b \in R$:

1. $|a| \geq 0$

2. $|a| = |-a|$

3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

4. $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$, где $b \neq 0$

5. $|a|^2 = |a^2|$

Формула расстояния между двумя точками на числовой прямой

- Если $A(a)$ и $B(b)$, то расстояние AB между точками A и B равно $|b - a|$.

Обозначение:

$$|AB| = |b - a|.$$

Понятие функции одной переменной

- Пусть даны два непустых множества X и Y . Если каждому элементу $x \in X$ сопоставлен по определенному правилу один и только один элемент $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана *функция* f с множеством значений Y . Обычно функцию обозначают так: $y = f(x)$ или $y = y(x)$. При этом x называется *независимой переменной* или *аргументом*, а переменную y - *функцией*. Множество X называется *областью определения* и обозначается $D(f)$ или $D(y)$, а множество Y называется *множеством значений* функции и обозначается $E(f)$ или $E(y)$. Значение функции $y = f(x)$ при $x = a$ обозначается через $f(a)$.

Свойства функций

- *Графиком* функции $y = f(x)$ называется множество точек координатной плоскости Oxy с координатами $(x, f(x))$ для всех $x \in D(f)$.

Функция $y = f(x)$, область определения которой, как числовой промежутку, симметрична относительно начала координат, называется *четной*, если $f(-x) = f(x)$ для всех $x \in D(f)$, и называется *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$ для всех $x \in D(f)$. График четной функции симметричен относительно оси Oy , график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T > 0$, что $f(x + T) = f(x)$ для всех $x \in D(f)$. Наименьшее $\tau > 0$, обладающее указанным свойством, называется *периодом* данной функции.

Монотонные функции

- Числовые промежутки, на которых функция сохраняет свой знак (т.е. остается только положительной или только отрицательной), называются *промежутками знакопостоянства* функции. Значения аргумента $x \in D(f)$, при которых $f(x) = 0$, называются *корнями* или *нулями функции*. Корни функции – это абсциссы точек пересечения графика функции с осью Ox .

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на данном числовом промежутке, если

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2),$$

и называется *убывающей*, если

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

для всех x_1 и x_2 из этого числового промежутка.

Функция $y = f(x)$ называется *монотонной* на данном числовом промежутке, если она либо возрастающая, либо убывающая на этом промежутке.

ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Степенные функции

- *Степенные функции* – это функции вида $y = x^a$, где $a \in R$ - фиксированное число.

В зависимости от вида числа a некоторые степенные функции имеют собственные названия. Так при $a = 1$ функция $y = x$ называется *линейной*^{*}, а ее график представляет собой биссектрису 1-го и 3-го координатных углов; при $a = 2$ функция $y = x^2$ называется *квадратичной*^{**}, а ее график называется *параболой*; при $a = 3$ функция $y = x^3$ называется *кубической*, а ее график называется *кубической параболой*.

* В общем случае линейная функция задается уравнением $y = kx + b$

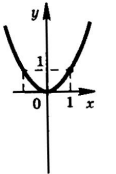
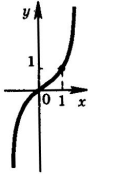
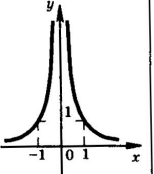
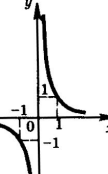
** В общем случае квадратичная функция задается уравнением $y = ax^2 + bx + c$

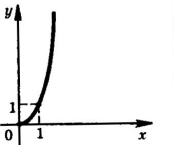
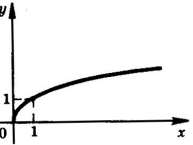
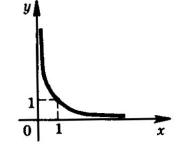
Степенные функции

- При $a = -1$ функция $y = x^{-1} = 1/x$ называется *обратной пропорциональностью*, а ее график называется *гиперболой*; при $a = 1/2$ получаем функцию $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$, графиком которой является парабола, симметричная относительно оси Ox ; при $a = 1/3$ получаем функцию $y = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$, графиком которой является кубическая парабола, симметричная относительно оси Ox .

В общем случае область определения степенной функции – множество положительных чисел, но для значений показателя степени $a \in \mathbb{N}$ - область определения – множество \mathbb{R} , причем для четных a степенная функция четная, а для нечетных a – нечетная.

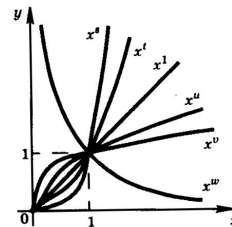
Графики степенных функций

$n > 0$, натуральное		$n < 0$, целое	
n — четное	n — нечетное	n — четное	n — нечетное
$D(y) = \mathbf{R}$ $E(y) = [0; +\infty)$	$D(y) = \mathbf{R}$ $E(y) = \mathbf{R}$	$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ $E(y) = (0; +\infty)$	$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
			
Четная функция	Нечетная функция	Четная функция	Нечетная функция

n — не целое число		
$n > 1$	$0 < n < 1$	$n < 0$
$D(y) = [0; +\infty) = E(y)$		$D(y) = (0; +\infty) = E(y)$
		

$$w < 0 < v < u < 1 < t < s$$

Сравнение графиков степенных функций



Тригонометрические функции

Тригонометрические функции –

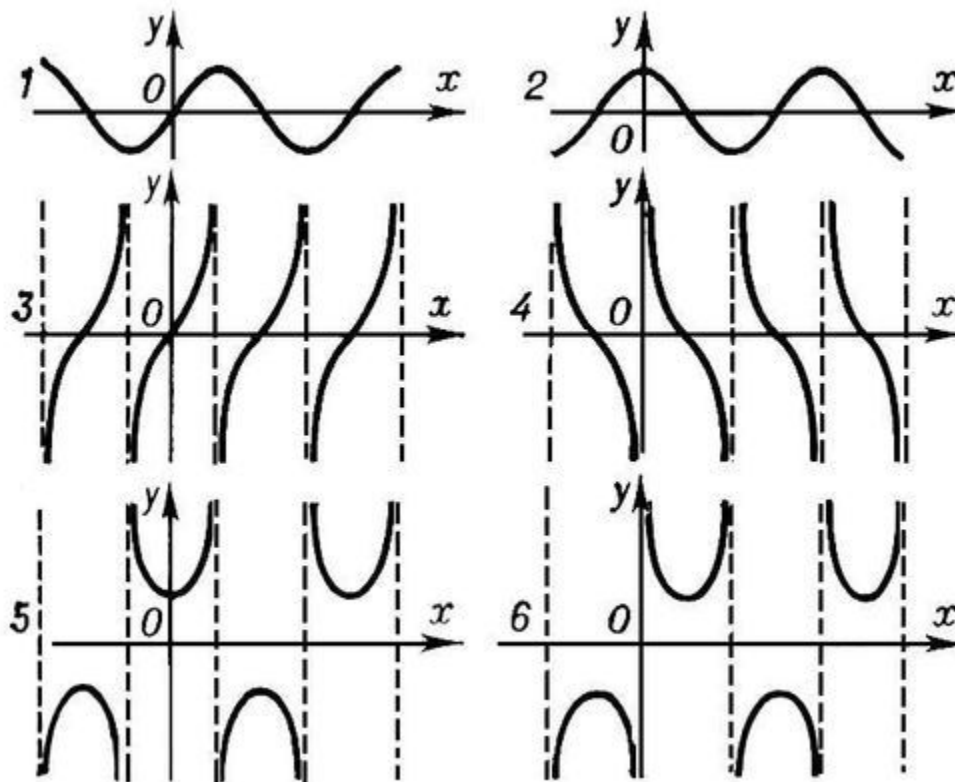
$$y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x,$$
$$y = \operatorname{sec} x = \frac{1}{\cos x}, y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

Все тригонометрические функции являются периодическими, причем период $\tau = 2\pi$ для функций $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{sec} x$ и $y = \operatorname{cosec} x$, и $\tau = \pi$ для функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$. Функция $y = \cos x$ является четной, а все остальные являются нечетными.

Область определения функций $y = \sin x, y = \cos x$ – множество R ; функции $y = \operatorname{tg} x$ – множество

$R - \{\pi/2 + \pi k: k \in Z\}$; функции $y = \operatorname{ctg} x$ – множество
 $R - \{\pi k: k \in Z\}$

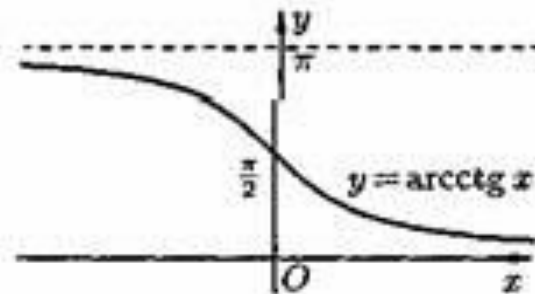
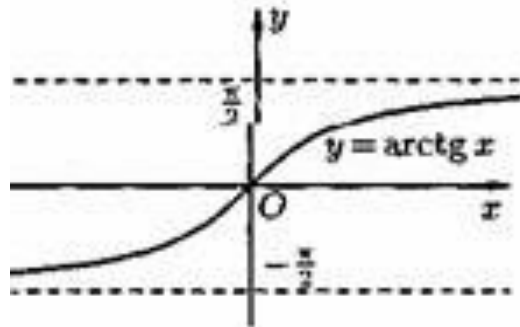
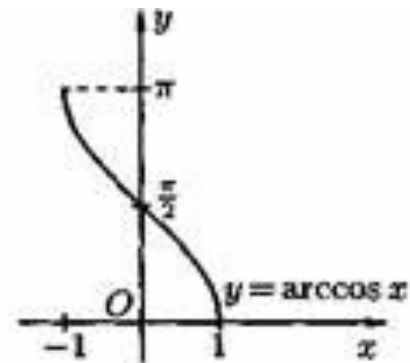
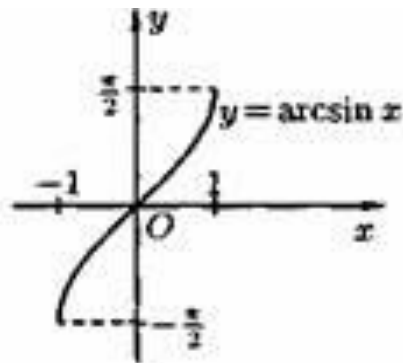
Графики тригонометрических функций



Обратные тригонометрические функции

- Обратные тригонометрические функции – $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctg x$ и $y = \text{arcctg} x$. Область определения функций $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ - отрезок $[-1; 1]$, а множество значений – отрезок $[-\pi/2; \pi/2]$, функция $y = \arcsin x$ - нечетная и возрастающая, а $y = \arccos x$ - убывающая, причем она не является ни четной, ни нечетной. Функции $y = \arctg x$ и $y = \text{arcctg} x$ определены на всей числовой прямой, $y = \arctg x$ - возрастающая и нечетная, а $y = \text{arcctg} x$ - убывающая и не является ни четной, ни нечетной. Множество значений функции $y = \arctg x$ - интервал $(-\pi/2; \pi/2)$, а функции $y = \text{arcctg} x$ - интервал $(0; \pi)$.

Графики обратных тригонометрических функций



Показательные функции

- *Показательные функции* – функции вида $y = a^x$, где $a > 0, a \neq 1$. Областью определения показательной функции является множество R всех действительных чисел, а множеством значений – множество R^+ всех положительных действительных чисел. Если $a > 1$, то функция $y = a^x$ является возрастающей на всей числовой прямой, если $0 < a < 1$, то функция $y = a^x$ является убывающей. Функция $y = e^x$ называется *экспонентой*, для экспоненты часто используется следующее обозначение: $y = \exp(x)$.

Графики показательных функций

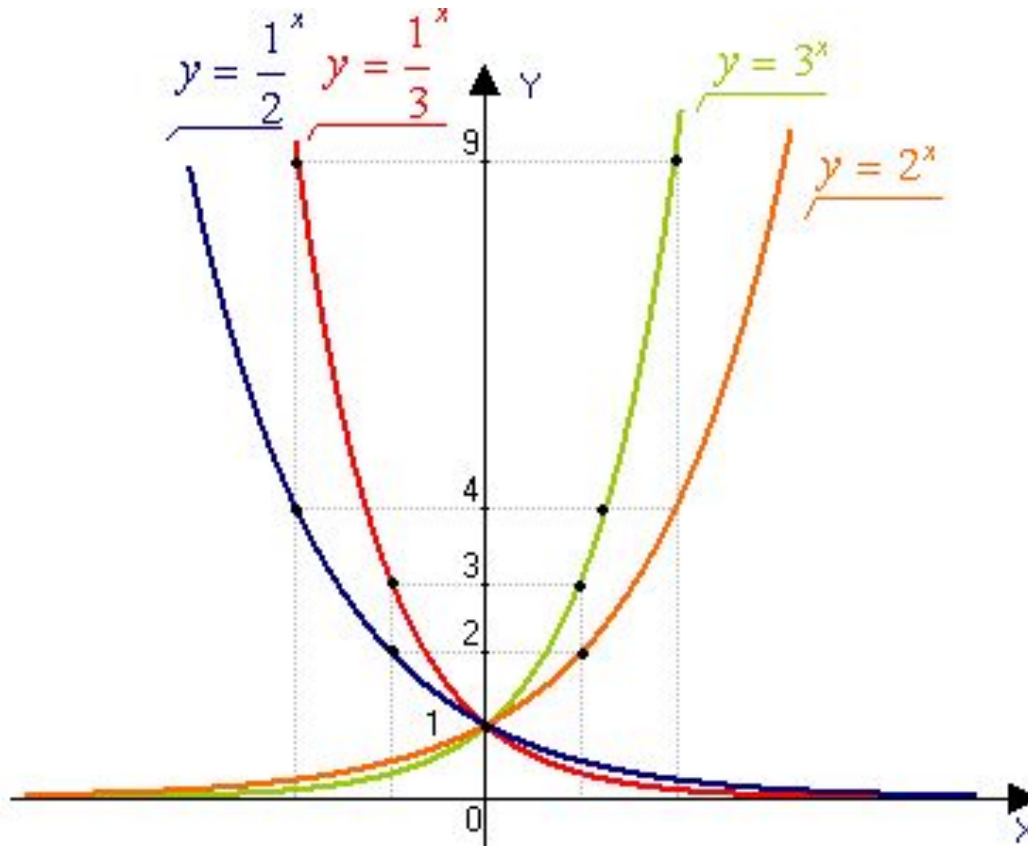
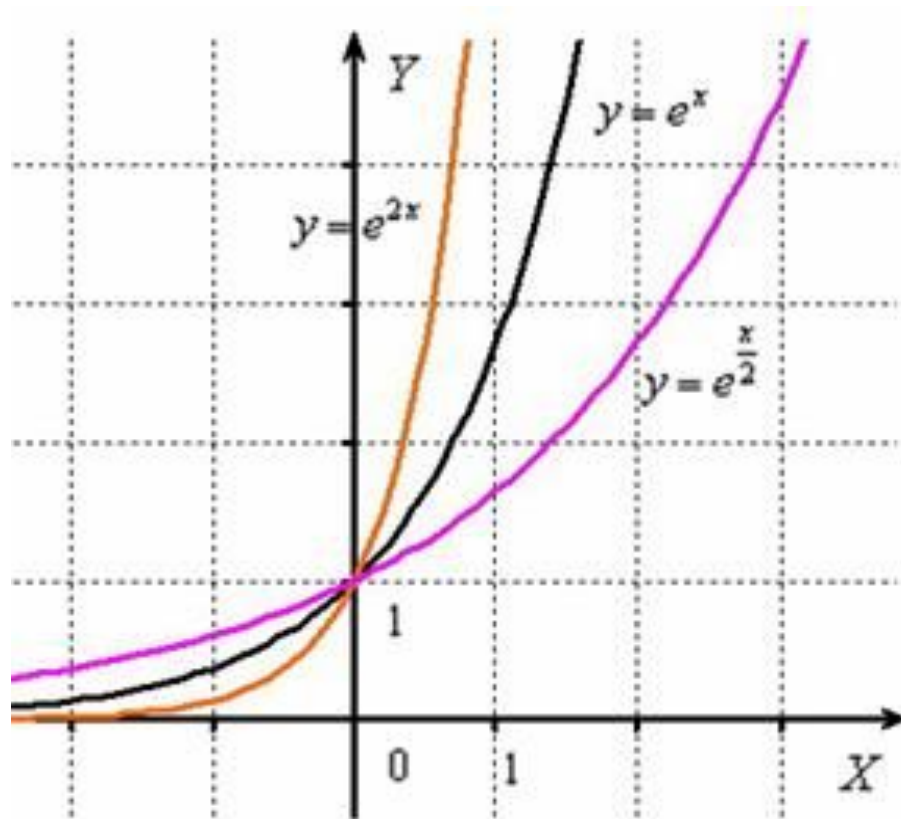


График экспоненты



Логарифмические функции

- *Логарифмические функции - $y = \log_a x$, где $a > 0, a \neq 1$. Областью определения логарифмической функции является множество всех положительных действительных чисел R^+ , а множеством значений – множество всех действительных чисел. Если $a > 1$, то функция $y = \log_a x$ является возрастающей на R^+ , если $0 < a < 1$, то функция $y = \log_a x$ является убывающей. Если $a = 10$, то функция $y = \log_{10} x = \lg x$ называется десятичным логарифмом, если $a = e$, то функция $y = \log_e x = \ln x$ называется натуральным логарифмом.*

График логарифмической функции

График функции $y = \log_a x$, если $a > 1$

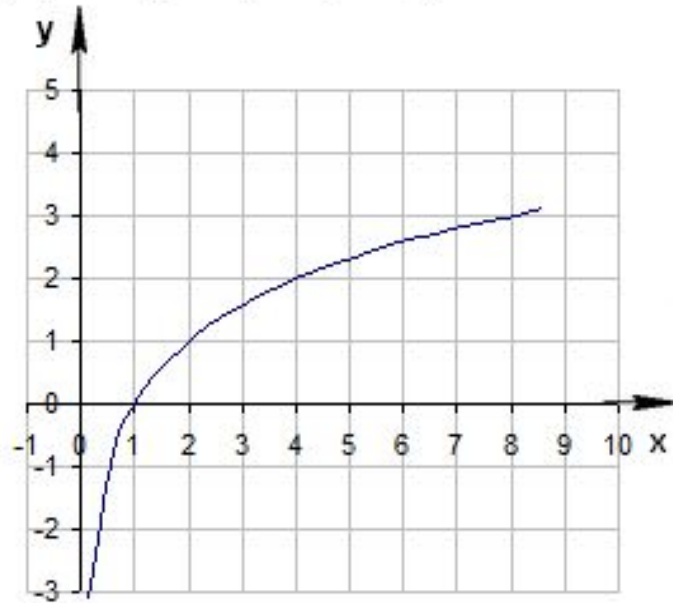


График функции $y = \log_a x$, если $0 < a < 1$

