Расчетная работа № 2

Динамика популяции. Одна популяция

Популяция – сообщество особей одного вида, занимающих некоторую область пространства планеты (бактерии, вирусы, различные виды насекомых, млекопитающих…).

Встречаются популяции с дискретным периодом размножением (сезонным, связанным с временами года) и с непрерывным периодом.

Для популяций с непрерывным периодом размножения применим аппарат дифференциального исчисления.

Модель Мальтуса

Модель была предложена священником Томасом Мальтусом в 1778 г. в работе «Трактат о народонаселении».

Содержательная постановка задачи

Как будет изменяться численность популяции, если сдерживающие факторы (болезни, хищники, конкурирующие виды, ограниченность питания и т.д.) отсутствуют

Концептуальная постановка задачи

Гипотезы:

1. объектом исследования является некоторая популяция организмов;
2. сдерживающие факторы роста популяции отсутствуют;
3. скорость прироста прямо пропорциональна численности популяции;

Последние две гипотезы очень грубые. Применимы на очень коротком начальном этапе развития популяции.

Математическая постановка:

x(*t*) – численность популяции в момент времени *t*

относительное изменение численности за время Δt

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{x(t)\,\Delta t}$$

если эта величина – константа, тогда:

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{x(t)\,\Delta t} = \alpha$$

Переходя к пределу, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x$$

С начальным условием:

$$x(0) = x_0$$

Решение уравнения:

$$x(t) = x_0 e^{\alpha t}$$

Модель Ферхюльста (логистическая модель)

Любая экологическая ниша может обеспечить существование популяции только определенной численности x_{max}

Измеряя численность популяции в относительных единицах: $X = x/x_{max}$

Тогда относительная скорость прироста:

$$\frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{X(t)\,\Delta t} = \alpha(1 - X)$$

Дифференциальное уравнение с начальным условием:

$$\frac{dX}{dt} = \alpha(1 - X)X$$

$$X(0) = X_0$$

Решение:

$$X(t) = \frac{X_0 e^{\alpha t}}{1 - X_0(1 - e^{\alpha t})}$$

Модель безымунной эпидемии

Пусть имеется *N* здоровых людей, и в момент времени *t* = 0 в эту группу попадает один заболевший человек (источник инфекции). Предположим, что удаления заболевших из группы (изоляция) не происходит и человек становится источником инфекции сразу же, как заразился сам.

x(t) число источников инфекции в момент времени *t*,

y(t) – число еще не заболевших (часть из них, естественно, может заболеть с течением времени).

Очевидно, что *x(t)* + *y(t)* = *N* +1 в любой момент времени *t*, причем при *t* = 0 выполняется условие $x(0)$ = 1.

Рассмотрим интервал времени *t*, *t* +Δ *t*, где Δ *t* достаточно мало. Естественно, что число больных Δ*x*, появившихся за этот интервал, пропорционально Δ*t*.

Естественно также предположить, что это число пропорционально числу контактов между больными и здоровыми, т.е. произведению *x(t)y(t).* Таким образом, $\Delta x \approx \alpha x(t) y(t) dt$, где *α* – коэффициент пропорциональности, учитывая смертность, как уменьшение числа источников инфекции на с *x(t)*.

В пределе получим дифференциальное уравнение с начальным условием:

$$\frac{dX}{dt} = \alpha(N + 1 - X - c\,X)$$

$$X(0) = X_0$$

Задание по Расчетной работе № 2.

1. С помощью пакета «Wolfram Mathematica» Для модели Мальтуса получить аналитическое решение. Изобразить график численности популяции в зависимости от времени.
2. Исследовать влияние параметров на вид решения.
3. Построить график зависимости скорости прироста от численности (фазовую диаграмму).
4. Выполнить пп. 1–3 для модели Ферхюльста.
5. Выполнить пп. 1–3 для модели безымунной эпидемии.

Численное решение задачи:

Требуется найти функцию y(t), удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)), \quad 0 < t \leq T, \quad y(0) = y_0$$

где $f(t, y(t))$ – заданная непрерывная функцию двух аргументов.

Метод Эйлера

Пусть на отрезке [0, T] ищется решение задачи Коши, построим на этом отрезке сетку с постоянным шагом τ

$$\Omega_n = \left\{ t_k = a + k \cdot \tau; \quad \tau = \frac{T}{n}; \quad k = \overline{0, n} \right\}$$

Заменим производную функции в точке $t_k \in \Omega_n$ разностным аналогом:

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau}$$

Тогда дифференциальное уравнение можно заменить разностным:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} = f(t_k, y_k)$$

Окончательно вычислительная процедура примет вид

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + f(t_k, y_k) \cdot \tau, \quad k = 0, 1, \ 2, \ldots, \quad y_0 = y(0)}$$