АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

ВАХЛАЕВА О.В.

МОУ СОШ №61» Г.САРАТОВ

Неравенства –не только составная часть контрольно-измерительных материалов государственной итоговой аттестации- «задания этого типа являются **характеристическим свойством,** различающим базовый и профильный уровни подготовки учащихся. К их выполнению в 2015 г. приступало более 60% участников профильного единого государственного экзамена (ЕГЭ), а положительные баллы получили более 30% всех участников.

Поэтому при подготовке выпускников к экзамену решению заданий подобного уровня следует уделять много внимания».

- В данной работе рассматриваются рациональные, дробно-рациональные неравенствах и неравенствах, содержащие знак модуля.

ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Функциональный подход

Неравенство- как сравнение двух функций

Алгебраический подход

Неравенство- как сравнение двух выражений

Геометрический подход

Геометрическая интерпретация неравенств

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ПОДХОД

Метод интервалов основан на свойстве непрерывности функции.

$$\frac{(5x-2)^2}{x-3} \geq \frac{4-20x+25x^2}{24-11x+x^2}.$$

Преобразуем неравенство: $\dfrac{(5x-2)^2}{x-3} \geq \dfrac{4-20x+25x^2}{24-11x+x^2}.$

$$\frac{(5x-2)^2}{x-3} \geq \frac{4-20x+25x^2}{24-11x+x^2} \Leftrightarrow \frac{(5x-2)^2}{x-3} - \frac{(5x-2)^2}{(x-3)(x-8)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(5x-2)^2(x-9)}{(x-3)(x-8)} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0,4, \\ 3<x<8, \\ x \geq 9. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{0,4\} \cup (3;\ 8) \cup [9;+\infty).$

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ПОДХОД

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ МОНОТОННОСТИ ФУНКЦИИ

Решите неравенство: $(2x^2+1)^5 - (3x)^5 > 3x - 2x^2 - 1$.

Запишем неравенство как

$$(2x^2+1)^5 + 2x^2+1 > (3x)^5+3x$$

Рассмотрим функцию $y = t^5 + t$, определенную при всех действительных значениях t. Так как $y'(t) = 5t^4 + 1 > 0$ для любого t из области определения, то функция y(t) возрастает на всей области определения . Для возрастающей функции, определенной на всей числовой прямой, неравенство $y(t_1) > y(t_2)$ равносильно неравенству $t_1 > t_2$.Значит, наше неравенство равносильно неравенству $2x^2+1>3x$,

$$2x^2-3x+1>0, \text{ откуда } x < 0,5 \text{ или } x>1.$$

Ответ: $(-\infty;0,5)\ (1;+\infty)$.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ПОДХОД

МЕТОД РАЦИОНАЛИЗАЦИИ

- Пример 5. Решите неравенство: $(x^2-1)^{2+x} > (x^2-1)^{5x-3}$
- Запишем его как $(x^2-1)^{2+x} - (x^2-1)^{5x-3} > 0$ и используем метод рационализации.
- $\begin{cases} (x^2-1-1)(2+x-5x+3) > 0, \\ x^2-1 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow$
- $\begin{cases} (x-\sqrt{2}\;)(x+\;\sqrt{2}\;)(5-4x) > 0, \\ (x-1)(x+1) > 0. \end{cases} \Leftrightarrow$
- $\left[\begin{array}{l} x < -\sqrt{2}\;, \\ 1{,}25 < x < \sqrt{2}. \end{array}\right.$
- Ответ: $(-\infty\;;-\sqrt{2}\;) \cup\; (1,25;\sqrt{2}\;)$

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД

СВЕДЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА К РАВНОСИЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

Пример 6. Решите неравенство:

$$\left|x^2 - \frac{29}{12}x - \frac{35}{12}\right| \geq 2x^2 - \frac{61}{12}x - \frac{19}{12}.$$

Согласно одной из стандартных схем неравенство равносильно совокупности неравенств:

$$\left|x^2 - \frac{29}{12}x - \frac{35}{12}\right| \geq 2x^2 - \frac{61}{12}x - \frac{19}{12} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - \frac{29}{12}x - \frac{35}{12} \geq 2x^2 - \frac{61}{12}x - \frac{19}{12}, \\ -x^2 + \frac{29}{12}x + \frac{35}{12} \geq 2x^2 - \frac{61}{12}x - \frac{19}{12} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{4}{3} \leq 0, \\ x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-2)\left(x - \frac{2}{3}\right) \leq 0, \\ (x-3)\left(x + \frac{1}{2}\right) \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow -0,5 \leq x \leq 3.$$

Ответ: $[-0,5;\ 3]$.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД

МЕТОД ВВЕДЕНИЯ НОВОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Пример 7. Решите неравенство:

$$\frac{3}{2-(x+1)\sqrt{3}}+\frac{(x+1)\sqrt{3}-1}{(x+1)\sqrt{3}-3}\ge 3.$$

Сделаем замену $z=(x+1)\sqrt{3}$; решим неравенство методом интервалов.

$$\frac{3}{2-z}+\frac{z-1}{z-3}\ge 3 \Leftrightarrow \frac{(z-1)(z-3,5)}{(z-2)(z-3)}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1\le z<2, \\ 3<z\le 3,5. \end{array}\right.$$

Возвратимся к исходной переменной и получим:

$1\le (x+1)\,\xi\,\overline{3} < 2$ или $3< (x+1)\,\xi\,\overline{3} \le 3,5$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}-1\le x<\frac{2}{\sqrt{3}}-1$$ или $$\sqrt{3}-1<x\le\frac{7}{2\sqrt{3}}-1.$$

Ответ: $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}-1;\ \frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)\cup\left(\sqrt{3}-1;\ \frac{7}{2\sqrt{3}}-1\right].$

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД

РАЗБИЕНИЕ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НА ПОДМНОЖЕСТВА

Пример 8. Решите неравенство:

$$3|x+1|+\frac{1}{2}|x-2|-\frac{3}{2}x \le 8.$$

Числа 2 и -1 разбивают числовую прямую на три промежутка $(-\infty;1)$, $[1;\ 2)$ и $[2;\ +\infty)$. Освобождаясь от знаков модулей, с учетом знаков выражений под знаком модуля решим данное неравенство на каждом из этих промежутков.

Первый случай.

$$\begin{cases} -3x-3-\frac{1}{2}x+1-\frac{3}{2}x \le 8, \\ x \le -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x \le 10, \\ x \le -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le x \le -1.$$

Второй случай.

$$\begin{cases} 3x+3-\frac{1}{2}x+1-\frac{3}{2}x \le 8, \\ -1 < x \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 4, \\ -1 < x \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \le 2.$$

Третий случай.

$$\begin{cases} 3x+3+\frac{1}{2}x-1-\frac{3}{2}x \le 8, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \le 6, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x \le 3.$$

Объединяя промежутки, получаем $-2 \le x \le 3.$

Ответ: $[-2;\ 3].$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД

В РЕШЕНИИ НЕРАВЕНСТВ ИСПОЛЬЗУЮТ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МОДУЛЯ

- Пример 9. Решите неравенство: $|x-5| > |x+2|$.

Геометрическая интерпретация дает простое и красивое решение: так как $|x-5|$ и $|x+2| = |x-(-2)|$ – это расстояния от точки x до точек 5 и – 2 соответственно, то из данного равенства следует, что точка x – середина отрезка $[-2;5]$, и поэтому $x=\frac{-2+5}{2}=1{,}5$. Значит, решениями данного неравенства являются все числа $x \in(-\infty;1{,}5)$, т.е. все точки, расстояния от каждой из которых до точки 5 больше расстояния до точки (–2).

Ответ: $(-\infty;1{,}5)$.

$\frac{1}{(x-2)(x-3)} > 0$

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА В КИМах ГОСУДАРСТВЕННОЙ ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

НЕРАВЕНСТВА	РЕШЕНИЯ
А) $x^2+5x+6\leq 0$	1) $[2;3]$
Б) $x^2+5x-6\leq 0$	2) $[-3;-2]$
В) $x^2-5x+6\leq 0$	3) $[-1;6]$
Г) $x^2-5x-6\leq 0$	4) $[-6;1]$

НЕРАВЕНСТВА

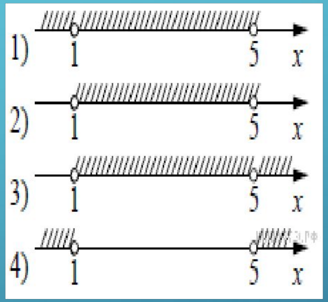
А) $(x-1)^2(x-5)<0$

Б) $(x-1)(x-5)<0$

В) $\frac{x-1}{x-5}>0$

Г) $\frac{(x-5)^2}{x-1}>0$

РЕШЕНИЯ



НЕРАВЕНСТВА	РЕШЕНИЯ
А) $\frac{1}{(x-2)(x-3)}>0$	1) $x<2$ или $x>3$
Б) $3^{-x+3}>3$	2) $2<x<3$
В) $\log_3 x>1$	3) $x<2$
Г) $\frac{x-3}{x-2}<0$	4) $x>3$

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕСТВА В КИМах ГОСУДАРСТВЕННОЙ ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ

Профильный уровень

2.

3.

$$(x^2-3,6x+3,24)(x-1,5)\le 0.$$

$$\frac{x^2-2x-2}{x^2-2x}+\frac{7x-19}{x-3}\le\frac{8x+1}{x}.$$

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2-x}\le 5.$$

$$\left(\frac{10}{5x-21}+\frac{5x-21}{10}\right)^2\le\frac{25}{4}.$$

$$\frac{2-(x-6)^{-1}}{5(x-6)^{-1}-1}\le -0,2.$$

$$\frac{6}{x\sqrt{3}-3}+\frac{x\sqrt{3}-6}{x\sqrt{3}-9}\ge 2.$$

$$\left|2x^2+\frac{19}{8}x-\frac{1}{8}\right|\ge 3x^2+\frac{1}{8}x-\frac{19}{8}.$$

$$3|x+1|+\frac{1}{2}|x-2|-\frac{3}{2}x\le 8.$$

Алгебраические неравества в КИМах государственной итоговой аттестации

Типичные ошибки и способы их устранения

- Используют преобразования, нарушающие равносильность;
- Формальное перенесение приемов решения уравнений на неравенство;
- Последовательность шагов нарушена, незакончена, не выполнена до конца (нет обратных переходов);
- Неверное использование логической символики;
- Не исключают из ответа точки, при которых знаменатель обращается в 0;
- В расстановке знаков, записи конечного ответа;
- Вычислительные ошибки.

- Добиваться понимания смысла равносильных переходов, а не формального запоминания;
- нужно более тщательно отрабатывать применение метода введения вспомогательной переменной при решении неравенств, указывая на отличия от уравнений, решаемых тем же способом, запись промежуточных ответов лучше в виде неравенства
- Логическую символику отработать или не использовать
- система устной работы для формирования вычислительной грамотности