

ДВА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯ

Деревич И.В.

Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021

УРАВНЕНИЕ РЕЛАКСАЦИОННОГО ТИПА

Уравнение релаксационного типа

Движение частицы в вязкой среде

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{U(t) - V(t)}{\tau}$$

$U(t)$ скорость газа (задана)

$V(t)$ скорость частицы $V(0) = V_0$

τ время динамической релаксации

Распределение скорости частицы

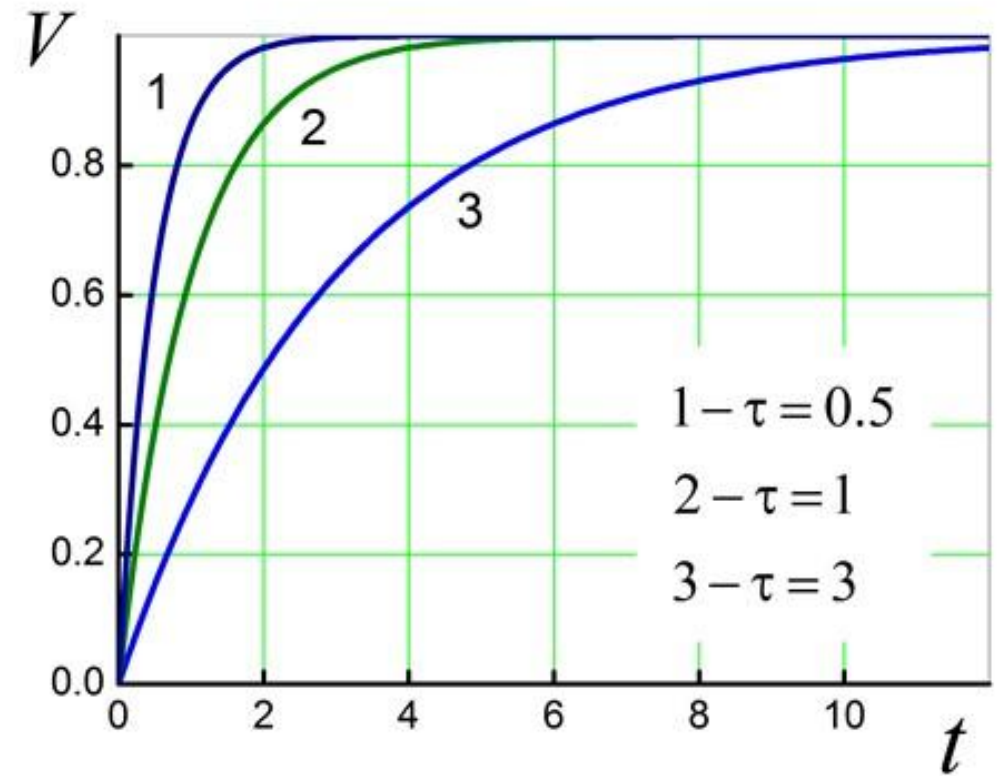
$$V(t) = V_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{1}{\tau} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau}\right) U(s) ds$$

Постоянная скорость газа

$$U(t) = U_0 = \text{const} \quad \text{скорость газа}$$

Скорость частицы

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

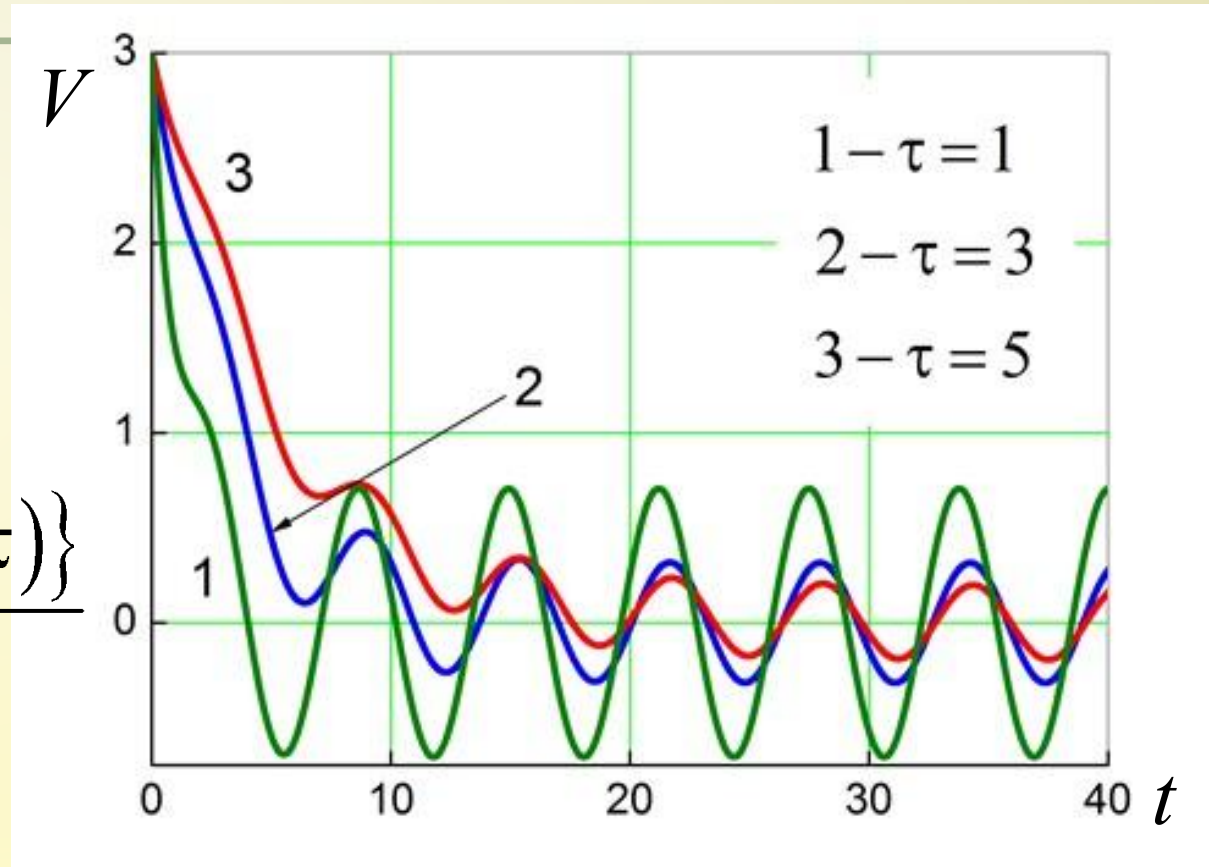


Периодическое изменение скорости газа

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t) \quad \text{скорость газа}$$

Скорость частицы

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + U_0 \frac{\sin(\omega t) - (\omega \tau) \{ \cos(\omega t) - \exp(-t/\tau) \}}{1 + (\omega \tau)^2}$$



УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ОСЦИЛЛЯТОРА

Уравнение колебаний осциллятора

$$\frac{d^2 U(t)}{dt^2} + \Omega^2 U(t) = F(t)$$

Ω собственная частота

U амплитуда колебаний

F внешняя сила

Начальные условия

$$U(0) = 0 \quad \frac{dU(0)}{dt} = 0$$

Метод решения

$$U(t) = U'(t) + U''(t)$$

$U'(t)$ общее решение однородного уравнения

$U''(t)$ частное решение неоднородного уравнения

Общий вид решения

$$U(t) = \frac{1}{\Omega} \int_0^t F(s) \sin[\Omega(t-s)] ds$$

Периодическое воздействие на осциллятор

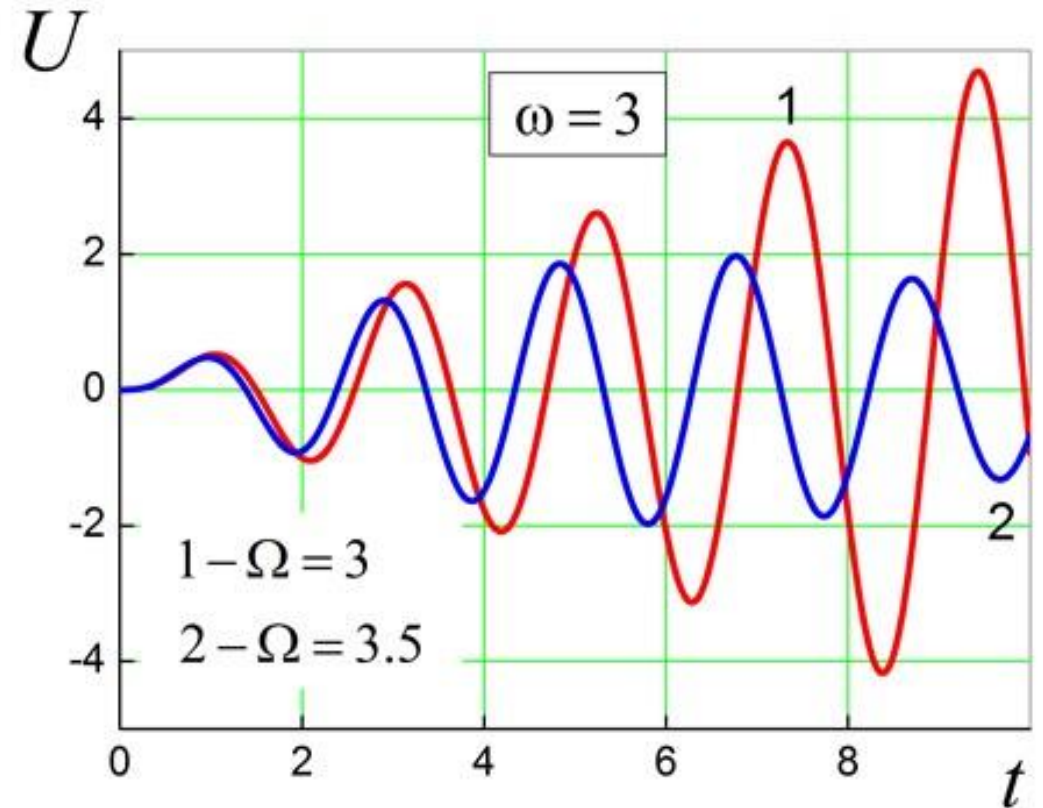
$$F(t) = F_0 \sin(\omega t) \qquad U(t) = F_0 \frac{\omega \sin(\Omega t) - \Omega \sin(\omega t)}{\Omega(\omega^2 - \Omega^2)}$$

Резонанс

$\omega \rightarrow \Omega$ условие резонанса

Амплитуда колебаний осциллятора при резонансе

$$U(t) = F_0 \frac{\sin(\omega t) - (\omega t) \cos(\omega t)}{2\omega^2}$$



Resume

В курсе уравнений математической физики
используется решение двух ОДУ

- ✓ Уравнение релаксационного типа
- ✓ Уравнение колебаний осциллятора