ДВА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯ

Деревич И.В.

Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021

УРАВНЕНИЕ РЕЛАКСАЦИОННОГО ТИПА

Уравнение релаксационного типа

Движение частицы в вязкой среде

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{U(t) - V(t)}{\tau}$$

$U(t)$ скорость газа (задана)

$V(t)$ скорость частицы $\quad V(0) = V_0$

τ время динамической релаксации

Распределение скорости частицы

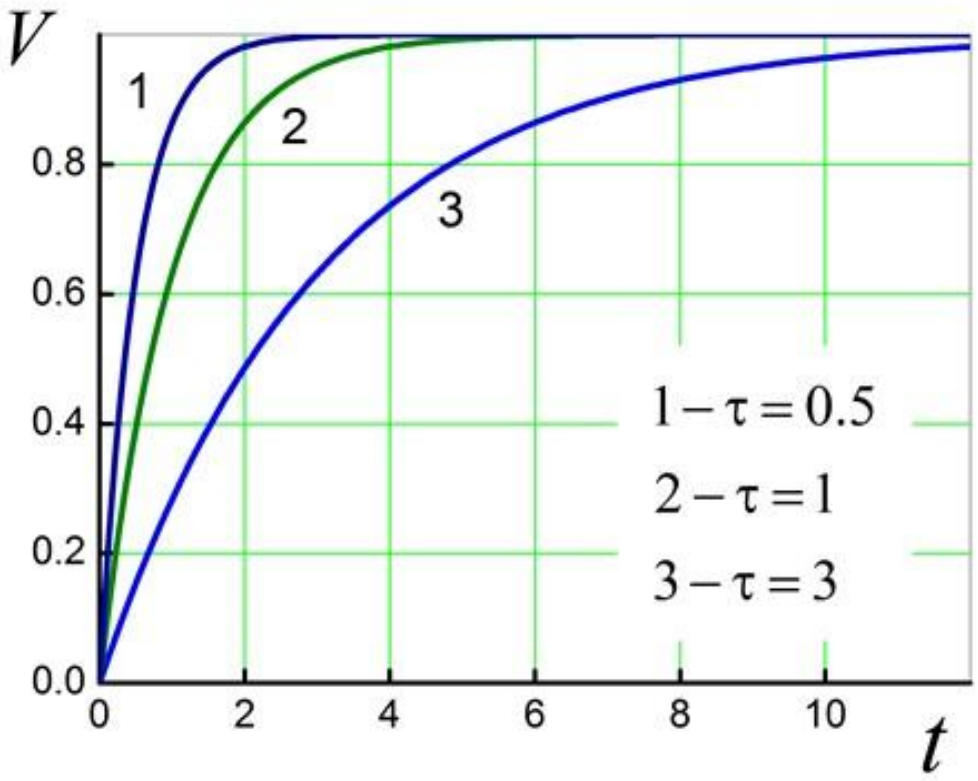
$$V(t) = V_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{1}{\tau}\int_0^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau}\right) U(s)\,\mathrm{d}s$$

Постоянная скорость газа

$$U(t) = U_0 = \text{const}$$ скорость газа

Скорость частицы

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

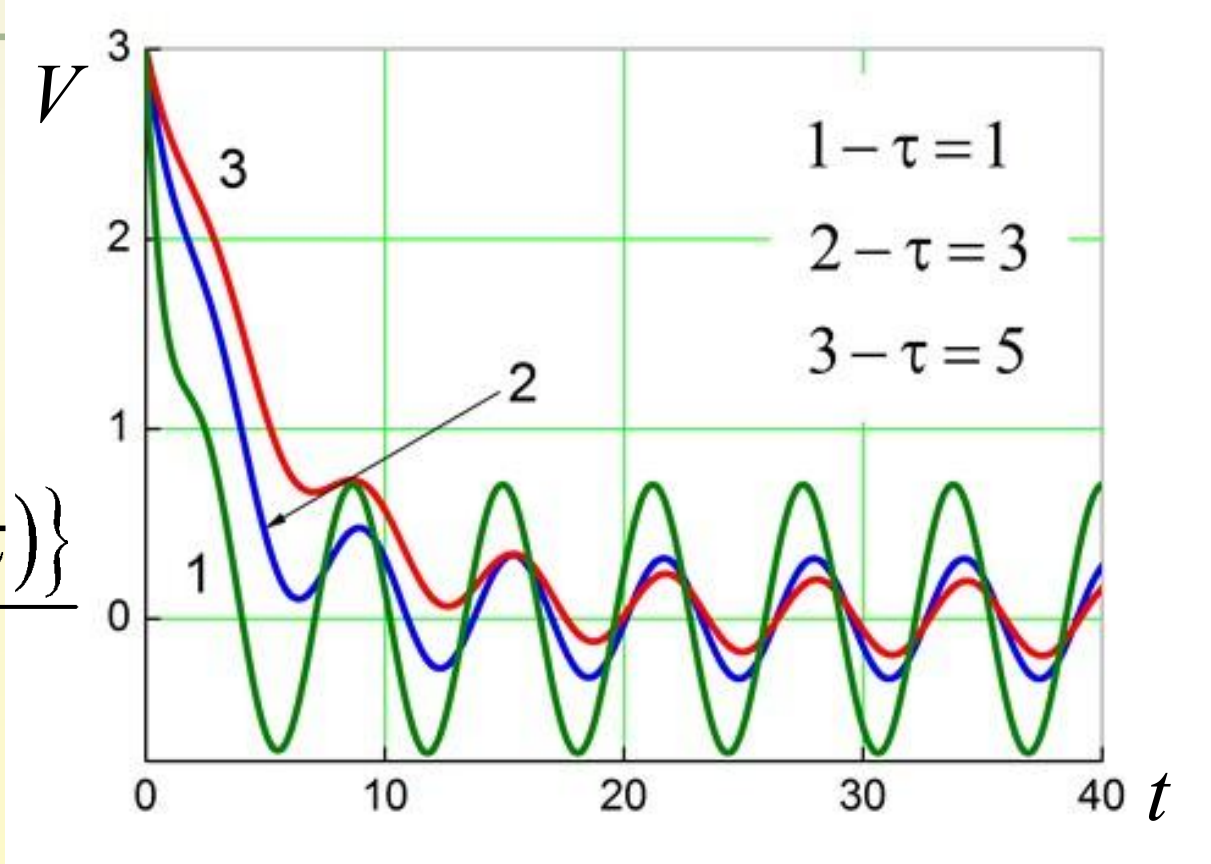


Периодическое изменение скорости газа

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t)$$ скорость газа

Скорость частицы

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + U_0 \frac{\sin(\omega t) - (\omega\tau)\{\cos(\omega t) - \exp(-t/\tau)\}}{1 + (\omega\tau)^2}$$



УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ОСЦИЛЛЯТОРА

Уравнение колебаний осциллятора

$$\frac{d^2U(t)}{dt^2}+\Omega^2U(t)=F(t)$$

Ω собственная частота

U амплитуда колебаний

F внешняя сила

Начальные условия

$$U(0)=0 \qquad \frac{dU(0)}{dt}=0$$

<u>Метод решения</u>

$$U(t)=U'(t)+U''(t)$$

$U'(t)$ общее решение однородного уравнения

$U''(t)$ частное решение неоднородного уравнения

Общий вид решения

$$\boxed{U(t)=\frac{1}{\Omega}\int_0^t F(s)\sin\left[\Omega(t-s)\right]\mathrm{d}s}$$

Периодическое воздействие на осциллятор

$$F(t)=F_0\sin(\omega t)$$

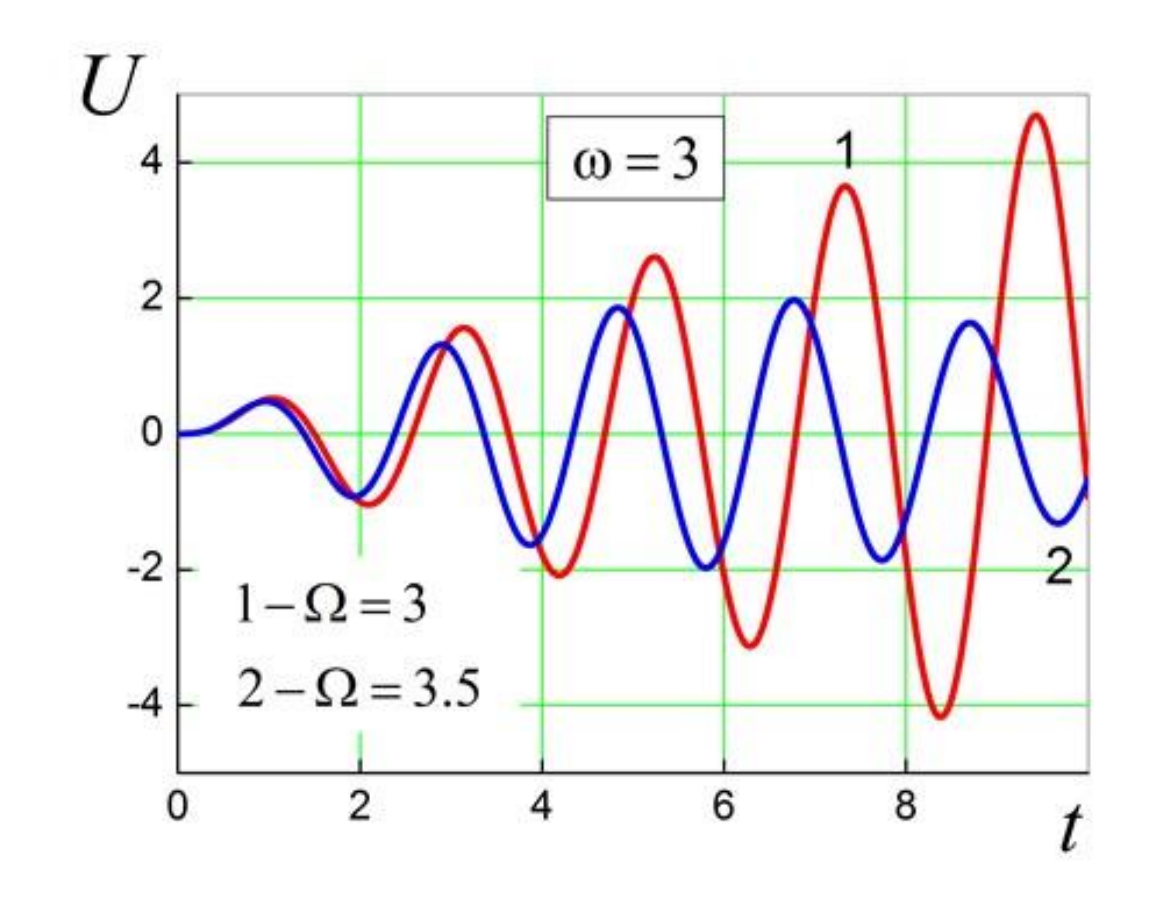
$$U(t)=F_0\frac{\omega\sin(\Omega t)-\Omega\sin(\omega t)}{\Omega\left(\omega^2-\Omega^2\right)}$$

Резонанс

$\omega \to \Omega$ условие резонанса

Амплитуда колебаний осциллятора при резонансе

$$U(t) = F_0 \frac{\sin(\omega t) - (\omega t)\cos(\omega t)}{2\omega^2}$$



Resume

В курсе уравнений математической физики используется решение двух ОДУ

- ✔ Уравнение релаксационного типа
- ✔ Уравнение колебаний осциллятора