Раздел курса
«Колебания и волны»

Тема
Групповая скорость волн. Дисперсия волн.

Бесконечная монохроматическая волна, уравнение которой имеет вид

$$\psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi),$$

не может быть использована для передачи информации.

Для того, чтобы волна могла переносить информацию, необходимо изменять со временем (**модулировать**) её параметры ***A***, **ω** или ф. Соответственно существуют **амплитудная, частотная** и **фазовая модуляции** волны.

Рассмотрим волну с амплитудной модуляцией.

Для того, чтобы создавать волну, амплитуда которой изменяется со временем, источник волны должен совершать колебания то с большей, то с меньшей амплитудой, то есть в простейшем случае совершать биения.

Ранее было показано, что биения возникают при сложении двух однонаправленных гармонических колебаний, частоты которых $\boldsymbol{\omega_1}$ и $\boldsymbol{\omega_2}$ различны, но мало отличаются друг от друга:

$$\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega << \omega_1, \omega_2.$$

Следовательно, источник, который совершает биения, создает **две гармонические волны**, бегущие в одном направлении, частоты которых $\boldsymbol{\omega_1}$ и $\boldsymbol{\omega_2}$.

Обе волны возбуждают одинаково направленные колебания в одних и тех же точках пространства.

Получим уравнение результирующей волны считая, что биения источника происходят при сложении гармонических косинусоидальных колебаний с нулевой начальной фазой и одинаковыми амплитудами.

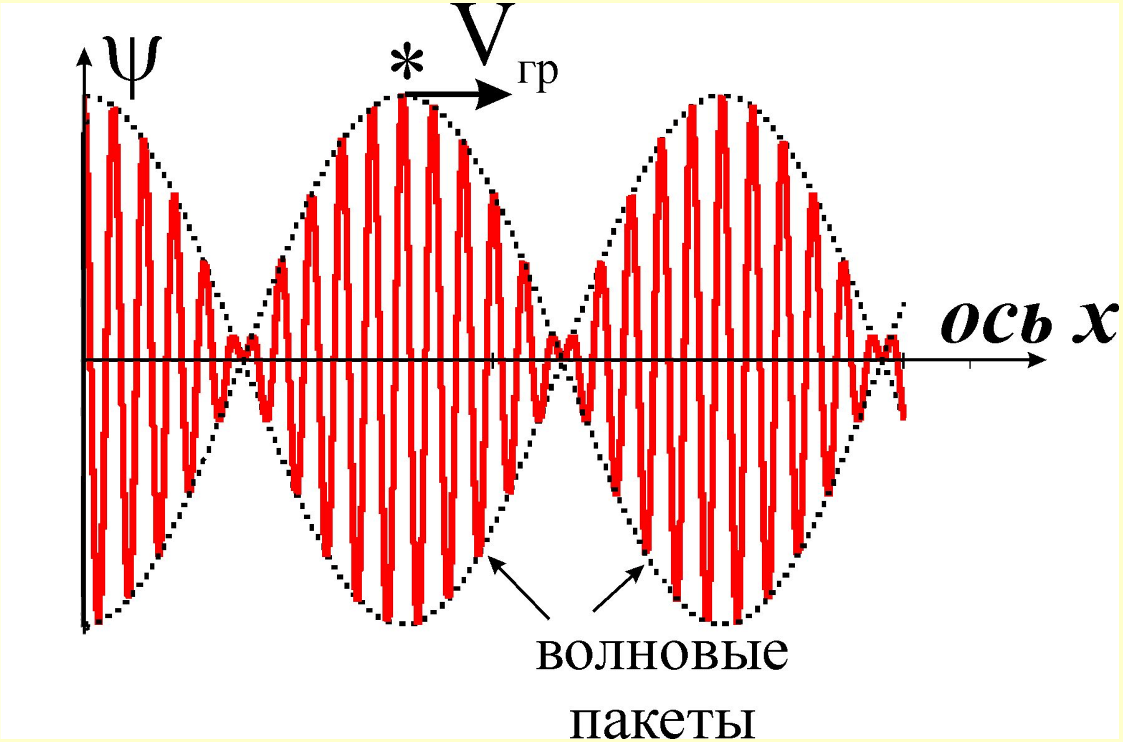
$$\psi = \psi_1 + \psi_2 =$$

$$= A\cos(\omega_1 t - k_1 x) + A\cos(\omega_2 t - k_2 x) =$$

$$= 2A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t - \frac{k_2 - k_1}{2}x\right)\cdot$$

$$\cdot\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t - \frac{k_2 + k_1}{2}x\right).$$

«Фотография» полученной волны в некоторый момент времени имеет вид



Скорость перемещения в пространстве максимума волнового пакета (точка *) называется групповой скоростью $V_{гр}$ волн, составляющих волновой пакет.

Огибающая волнового пакета определяется в уравнении модулированной волны членом

$$\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t-\frac{k_2-k_1}{2}x\right).$$

В процессе перемещения такой модулированной волны для точки, обозначенной звездочкой (*), постоянной остается фаза, стоящая в этом выражении:

$$\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t - \frac{k_2 - k_1}{2} x^*\right) = const.$$

Здесь ***x**** - координата максимума волнового пакета.

Поставим задачу: выразить групповую скорость $V_{гр}$ через циклические частоты ω_1, ω_2 и волновые числа k_1, k_2 волн, составляющих волновой пакет.

Итак, показано, что групповая скорость волн равна производной от циклической частоты по волновому числу:

$$V_{гр} = \frac{d\omega}{dk}.$$

Поставим задачу: найти связь групповой и фазовой скорости волны:

$$V_{гр} = f\left(V_{ф}\right) - \ ?$$

Итак, показано, что групповая скорость волны выражается через фазовую скорость формулой

$$V_{гр} = V_{ф} - \lambda \frac{dV_{ф}}{d\lambda}.$$

Рассмотрим три случая:

1) $\boldsymbol{V_{ф} \neq f(\lambda)}$ – фазовая скорость не зависит от длины волны (явление дисперсии волн отсутствует);

$$\frac{dV_{\phi}}{d\lambda} = 0$$

2) $\boldsymbol{V_\text{ф}}$ растет с ростом длины волны **λ**, то есть

$$\frac{dV_\phi}{d\lambda} > 0$$

(наблюдается нормальная дисперсия);

3) $V_ф$ уменьшается с ростом длины волны **λ**,

то есть

$$\frac{dV_ф}{d\lambda} < 0$$

(наблюдается аномальная дисперсия).

Итак,

1) если дисперсия отсутствует, то групповая скорость волн равна фазовой

$$V_{гр} = V_{ф};$$

2) если наблюдается нормальная дисперсия, то групповая скорость волн меньше фазовой

$$V_{гр} < V_{ф};$$

3) если наблюдается аномальная дисперсия, то групповая скорость волн больше фазовой

$$V_{гр} > V_{ф}.$$

Последовательные моментальные «фотографии» волнового пакета в моменты времени t_1, t_2, t_3

а) нормальная дисперсия,

б) аномальная дисперсия.

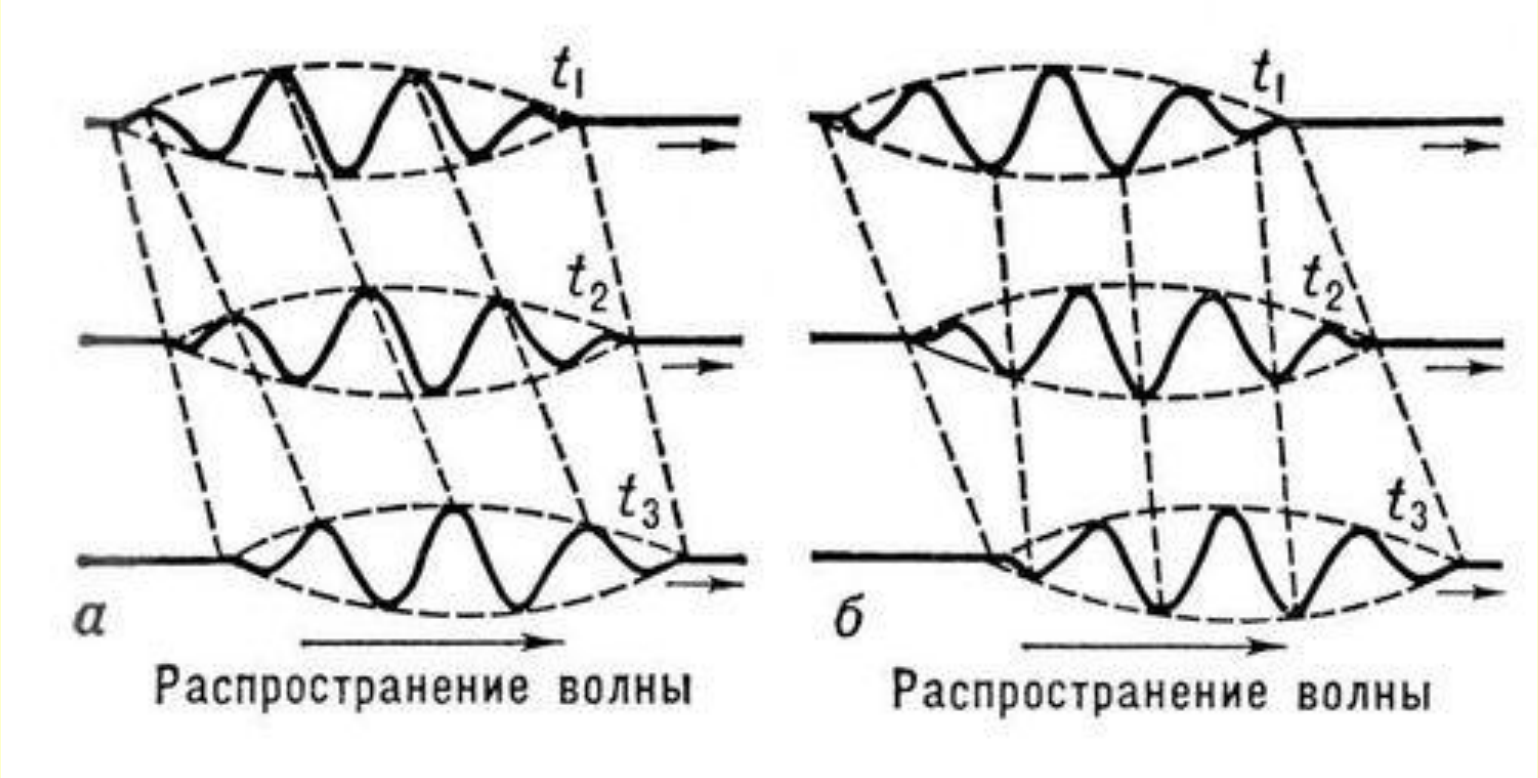


График зависимости циклической частоты волны от волнового числа **$\omega = f(k)$** называется **дисперсионным**.

Для трех рассмотренных выше случаев этот график имеет вид