

Раздел курса  
**«Колебания и волны»**

Тема

Групповая скорость волн.

Дисперсия волн.

Бесконечная монохроматическая волна,  
уравнение которой имеет вид

$$\psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi),$$

**не может** быть использована для передачи информации.

Для того, чтобы волна могла переносить информацию, необходимо изменять со временем (**модулировать**) её параметры  $A$ ,  $\omega$  или  $\phi$ . Соответственно существуют **амплитудная, частотная и фазовая модуляции волны.**

Рассмотрим волну с амплитудной модуляцией.

Для того, чтобы создавать волну, амплитуда которой изменяется со временем, источник волны должен совершать колебания то с большей, то с меньшей амплитудой, то есть в простейшем случае совершать биения.

Ранее было показано, что биения возникают при сложении двух однонаправленных гармонических колебаний, частоты которых  $\omega_1$  и  $\omega_2$  различны, но мало отличаются друг от друга:

$$\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega \ll \omega_1, \omega_2.$$

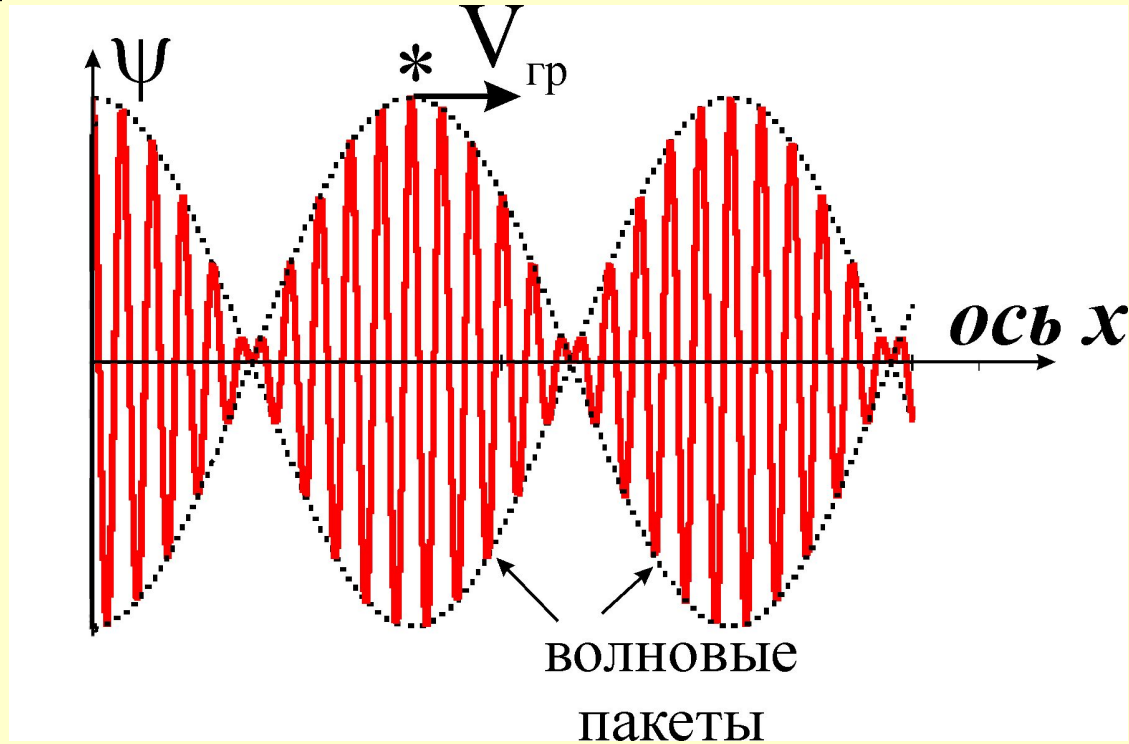
Следовательно, источник, который совершает биения, создает **две гармонические волны**, бегущие в одном направлении, частоты которых  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

Обе волны возбуждают одинаково направленные колебания в одних и тех же точках пространства.

Получим уравнение результирующей волны считая, что колебания источника происходят при сложении гармонических косинусоидальных колебаний с нулевой начальной фазой и одинаковыми амплитудами.

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_1 + \psi_2 = \\ &= A \cos(\omega_1 t - k_1 x) + A \cos(\omega_2 t - k_2 x) = \\ &= 2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t - \frac{k_2 - k_1}{2} x\right) \cdot \\ &\quad \cdot \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t - \frac{k_2 + k_1}{2} x\right).\end{aligned}$$

«Фотография» полученной волны в некоторый момент времени имеет вид



Скорость перемещения в пространстве максимума волнового пакета (точка \*) называется групповой скоростью  $V_{гр}$  волн, составляющих волновой пакет.



Огибающая волнового пакета определяется в уравнении модулированной волны членом

$$\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t - \frac{k_2 - k_1}{2}x\right).$$

В процессе перемещения такой модулированной волны для точки, обозначенной звездочкой (\*), постоянной остается фаза, стоящая в этом выражении:

$$\left( \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t - \frac{k_2 - k_1}{2} x^* \right) = \text{const.}$$

Здесь  $x^*$  - координата максимума волнового пакета.

Поставим задачу: выразить групповую скорость  $V_{\text{гр}}$  через циклические частоты  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и волновые числа  $k_1$ ,  $k_2$  волн, составляющих волновой пакет.

Итак, показано, что групповая скорость волн равна производной от циклической частоты по волновому числу:

$$V_{гр} = \frac{d\omega}{dk}.$$

Поставим задачу: найти связь групповой и фазовой скорости волны:

$$V_{гр} = f(V_{ф}) - ?$$

Итак, показано, что групповая скорость волны выражается через фазовую скорость формулой

$$V_{gp} = V_{\phi} - \lambda \frac{dV_{\phi}}{d\lambda}.$$

## Рассмотрим три случая:

1)  $V_{\phi} \neq f(\lambda)$  – фазовая скорость не зависит от длины волны (явление дисперсии волн отсутствует);

$$\frac{dV_{\phi}}{d\lambda} = 0$$

2)  $V_{\phi}$  растет с ростом длины волны  $\lambda$ , то есть

$$\frac{dV_{\phi}}{d\lambda} > 0$$

(наблюдается нормальная дисперсия);

3)  $V_{\phi}$  уменьшается с ростом длины волны  $\lambda$ ,

то есть

$$\frac{dV_{\phi}}{d\lambda} < 0$$

(наблюдается аномальная дисперсия).



Итак,

- 1) если дисперсия отсутствует, то групповая скорость волн равна фазовой

$$V_{gr} = V_{\phi};$$

- 2) если наблюдается нормальная дисперсия, то групповая скорость волн меньше фазовой

$$V_{gr} < V_{\phi};$$

- 3) если наблюдается аномальная дисперсия, то групповая скорость волн больше фазовой

$$V_{gr} > V_{\phi}.$$

Последовательные моментальные «фотографии» волнового пакета в моменты времени  $t_1, t_2, t_3$

- а) нормальная дисперсия,
- б) аномальная дисперсия.



График зависимости циклической частоты волны от волнового числа  $\omega=f(k)$  называется **дисперсионным**.

Для трех рассмотренных выше случаев этот график имеет вид

