Развитие понятия о числе

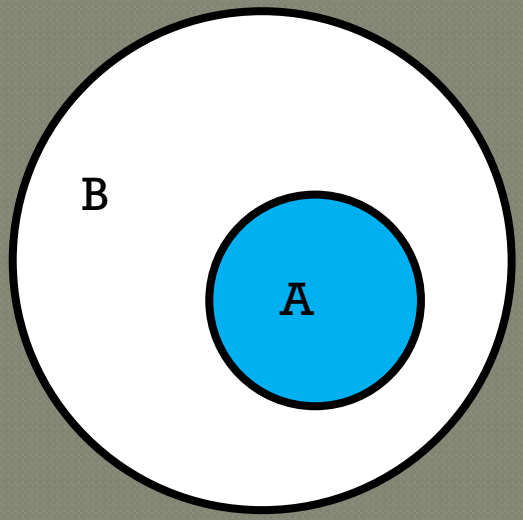
Целые и рациональные числа.
Иррациональные числа.
Действительные числа.
Приближенные вычисления.

Понятие множества

Множество можно представить как совокупность некоторых объектов, объединенных по определенному признаку.

- **Каждый объект, принадлежащий множеству A, называется *элементом этого множества*.**
- $a \in A$ – элемент a принадлежит множеству A.
  $b \notin A$ - элемент b не принадлежит множеству A.
- **Множество не содержащее ни одного элемента, называется *пустым множеством*.**
- $\emptyset$ - в множестве нет элементов.

- **Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то говорят, что множество A является подмножеством множества B: $A \subset B$, или $A \subseteq B$.**

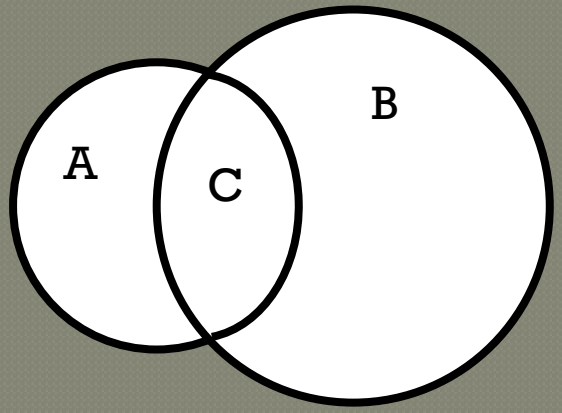


$$A \subset B \Leftrightarrow \text{Если } x \in A, \text{то } x \in B.$$

Два множества называются *равными*, если каждый элемент первого множества является элементом второго множества и, наоборот каждый элемент второго множества является элементом первого множества:

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in B \\ x \in B \Rightarrow x \in A \end{cases}$$

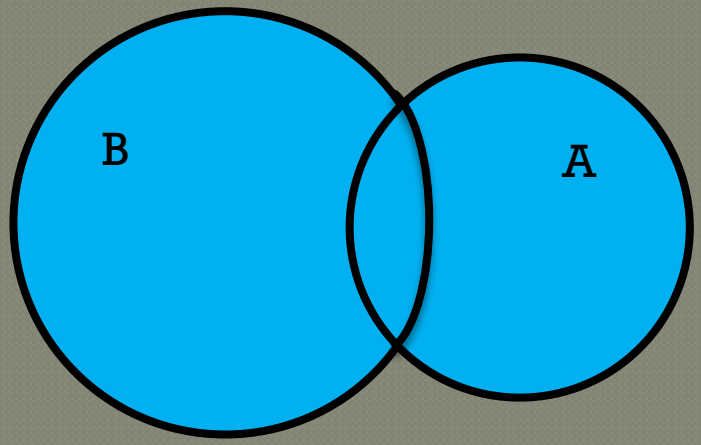
Пересечением множеств ***A и B*** **называют их общую часть, то есть множество C всех элементов, принадлежащих как множеству A, так и множеству B.**



$$C = A \cap B$$

$$x \in C \Leftrightarrow x \in A \text{ и } x \in B$$

Объединением множеств **A и B называют множество C, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств (A или B).**



$$C = A \cup B$$

$$x \in C \Leftrightarrow x \in A \text{ или } x \in B$$

Целые и рациональные числа

- В курсе математики чаще всего рассматриваются множества, элементами которых являются числа, и поэтому их называют *числовыми множествами*.

- Представление о числах у человечества складывалось под воздействием требований практики.
- С необходимостью счета предметов появились *натуральные числа:* $\boldsymbol{N = \{1, 2, 3 \dots \dots\}}$. При сложении и умножении натуральных чисел всегда получаются натуральные числа. Однако разность и частное натуральных чисел могут не быть натуральными числами.
- Одних натуральных чисел оказалось недостаточно для решения задач практики. Дополнением натуральных чисел нулем и отрицательными числами множество $\boldsymbol{N}$ расширяется до множества *целых чисел:* $\boldsymbol{Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}}$. Сумма, разность и произведение любых двух целых чисел являются целыми числами, а частное не всегда целое число.

- Измерение величин привело к необходимости расширения множества целых чисел и введения *рациональных чисел*, т. е. чисел вида $\frac{m}{n}$, где $m \in \boldsymbol{Z}, n \in N$.
- Каждое целое число m также является рациональным, т.к. его можно представить в виде $\frac{m}{1}$.
- Сумма, разность, произведение и частное любых двух рациональных чисел являются рациональными числами (на нуль делить нельзя!).

Рациональное число, записанное в виде дроби, можно также записать в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби, разделив числитель на знаменатель.

Пример. $\frac{3}{4} = 0{,}75$; $\frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots\ldots$

Периодическая дробь - это бесконечная десятичная дробь, у которой, начиная с некоторого десятичного знака, повторяется одна и та же цифра или группа цифр - период дроби.

Пример. $\frac{3}{22} = 0{,}136363636\ldots\ldots = 0{,}1(36)$.

Конечную десятичную дробь можно изображать в виде бесконечной, у которой после последнего десятичного знака, отличного от нуля, на месте следующих десятичных знаков записываются нули.

Пример. $\frac{3}{4} = 0{,}75 = 0{,}75000\ldots\ldots$.

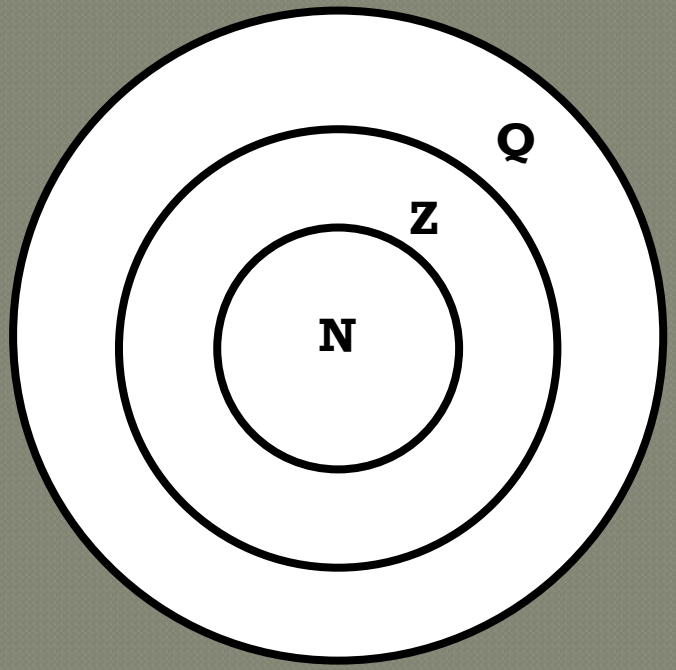
Целые числа также записывают в виде бесконечной десятичной дроби, у которой справа от запятой на месте десятичных знаков стоят нули.
Пример. 13=13,000000……..

Каждое рациональное число может быть записано в виде бесконечной периодической десятичной дроби, и наоборот каждая бесконечная периодическая дробь задает рациональное число.

Любая периодическая десятичная дробь с периодом девять равна бесконечной десятичной дроби с периодом нуль, у которой десятичный разряд, предшествующий периоду, увеличен на единицу по сравнению с разрядом первой дроби.

Пример. $\frac{3}{10} = 0{,}2(9)$; $\frac{3}{10} = 0{,}3(0)$.

Множество рациональных чисел обозначают буквой ***Q.***



$$N \subset Z \subset Q$$

Иррациональные числа

- Если бесконечная десятичная дробь непериодическая, то она не является рациональным числом.
- Пример. 0,101001000100001…… не является периодической дробью.
- *Иррациональным числом называется бесконечная десятичная непериодическая дробь.*
- Иррациональные числа могут быть положительными и отрицательными.
- Пример. 0,123456……. – положительное иррациональное число.
  -5,246810…… - отрицательное иррациональное число.

Числа $\sqrt{2}, \sqrt{7}, -\sqrt[3]{3}, \pi$ являются иррациональными.

Множество иррациональных чисел обозначают ***I***.

Действительные числа

- Рациональные и иррациональные числа образуют множество действительных чисел ***R***.
- Каждое действительное число может быть записано в виде бесконечной десятичной дроби: рациональные числа в виде бесконечной периодической десятичной дроби, а иррациональные- в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.

Действительным числом называется бесконечная десятичная дробь, т.е. дробь вида, $+a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots$ *или* $-a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots$ *где* a_0 *-целое неотрицательное число, а каждая из букв* $a_1, a_2, \ldots$ *- это одна из десяти цифр: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.*

Пример. $\pi = 3{,}1415\ldots$

$a_0 = 3, a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 1, a_4 = 5.$

$-\sqrt{234} =$ -15,297058.....

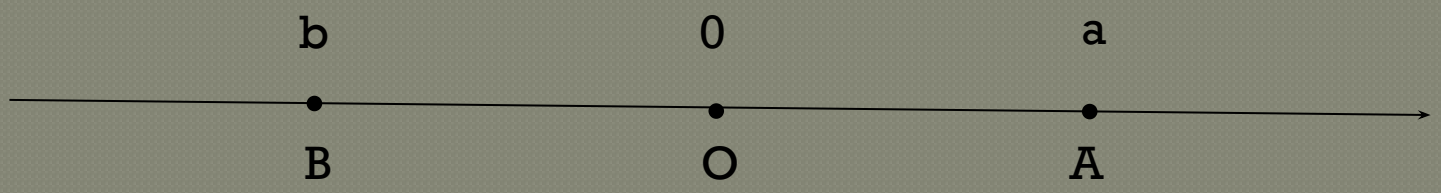
$a_0 = 15, a_1 = 2, a_2 = 9, a_3 = 7, a_4 = 0$ и т.д.

Модуль действительного числа

Модулем положительного числа называется само это число, модулем отрицательного числа называется число, противоположное ему, модуль нуля равен нулю.

$$|a| = \begin{cases} a \text{ при } a > 0, \\ 0 \text{ при } a = 0, \\ -a \text{ при } a < 0. \end{cases}$$

- На координатной прямой каждому действительному числу соответствует единственная точка и, наоборот, каждой точке координатной прямой соответствует единственное действительное число.
- На координатной прямой модуль- это расстояние от начала координат до точки, изображающей это число.



$$|a| = OA, \qquad |b| = OB$$
$$|a - b| = AB$$

Свойства модуля

1. $|a| \geq 0$
2. $|-a| = |a|$
3. $a \leq |a|$
4. При $b > 0$ $\quad |a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$
5. При $b > 0$ $\quad |a| \geq b \Leftrightarrow a \leq -b$ или $a \geq b$
6. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
7. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} (b \neq 0)$
8. $|a^n| = |a|^n$
9. $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$
10. $\big||a| - |b|\big| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$

Приближенные вычисления

- *Модуль разности между точным числом x и его приближенным значением a называется абсолютной погрешностью приближенного значения числа x и обозначается через α:* $|x - a| = \alpha$.

- Число a называется *приближенным значением* точного числа x с точностью до Δa, если абсолютная погрешность приближенного значения a не превышает Δa, т.е. $|x - a| \leq \Delta a$.

- *Число Δa называется границей абсолютной погрешности приближенного числа a.*

- *По известной границе абсолютной погрешности Δa находятся границы, в которых заключено точное значение числа x:*

$$(x = a \pm \Delta a) \Leftrightarrow (a - \Delta a \leq x \leq a + \Delta a).$$

- Пример. Даны приближенные значения числа $x = \frac{2}{3}$; $a_1 = 0{,}6$; $a_2 = 0{,}66$; $a_3 = 0{,}67$. Какое из этих приближений является лучшим?

Решение: $\alpha_1 = \left|\frac{2}{3} - 0{,}6\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right| = \frac{1}{15}$,

$$\alpha_2 = \left|\frac{2}{3} - 0{,}66\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{33}{50}\right| = \frac{1}{150},$$

$$\alpha_3 = \left|\frac{2}{3} - 0{,}67\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{67}{100}\right| = \left|-\frac{1}{300}\right| = \frac{1}{300}.$$

Лучшим приближением числа x является $a_3 = 0{,}67$.

- *Цифра **m** приближенного числа **a** называется **верной в широком смысле,** если граница абсолютной погрешности числа **a** не превосходит единицы того разряда, в котором записывается цифра **m** .*

- *Цифра **m** приближенного числа **a** называется **верной в строгом смысле,** если граница абсолютной погрешности числа **a** не превосходит половины единицы того разряда, в котором записана цифра **m** .*

- В числах, используемых в десятичной записи приближенного значения числа все цифры должны быть верными.

- Цифры в записи приближенного числа, о которых неизвестно, являются ли они верными, называются ***сомнительными.***

Значащими цифрами приближенного числа называются все его верные цифры, кроме нулей, стоящих перед первой цифрой (слева направо), отличной от нуля.

Пример. Найти границу абсолютной погрешности приближенного значения 0,1978 числа x, все цифры которого верны в строгом смысле.

Решение. Граница абсолютной погрешности этого числа равна 0,00005, т.е. половине единицы последнего разряда, сохраняемого в записи.

Пример. Указать верные цифры в (широком смысле) следующих чисел:

$$1)\ 2{,}73 \pm 0{,}056;\ 2)\ 4{,}627 \pm 0{,}0008.$$

Решение. 1)граница погрешности $\Delta a = 0{,}056$ не превосходит единицы разряда десятых $(0{,}056 < 0{,}1)$. Верными являются цифры 2 и 7.

2) $\Delta a = 0{,}0008 < 0{,}001$. Все цифры приближенного числа 4,627 верные.

- *Относительной погрешностью δ приближенного значения a числа x называется отношение абсолютной погрешности α этого приближения к числу a:* $\delta = \frac{\alpha}{a}$.

На практике оценивают модуль относительной погрешности некоторым числом ε , которое заведомо не больше этого модуля: $|\delta| \leq \varepsilon$.

- *Число ε называется границей относительной погрешности.*

- *Границей относительной погрешности a приближенного значения a называется отношение границы абсолютной погрешности Δa к модулю числа a:* $\varepsilon_a = \frac{\Delta a}{|a|}$.

- В ряде задач границу абсолютной погрешности находят по данной относительной погрешности и модулю приближенного значения величины: $\Delta a = |a| \cdot \varepsilon_a$.

Пример. Найти относительную погрешность числа 6,8, если обе цифры его верны в строгом смысле.

Решение. По условию $\Delta a = 0{,}05$.

Тогда $\varepsilon_a = \frac{0{,}05}{6{,}8} = 0{,}00735 = 0{,}7\%$.

Пример. Какие цифры числа 4,86 при относительной погрешности 0,03%, являются верными?

Решение. $\Delta a = |a| \cdot \varepsilon_a$;

$\Delta a = 4{,}86 \cdot 0{,}003 = 0{,}01458 < 0{,}02$.

$a = 4{,}86 \pm 0{,}02$.

Верными являются первые две цифры 4 и 8.

Округление положительных десятичных дробей

- *Абсолютная погрешность, допускаемая при округлении, называется* ***погрешностью округления.***
- *Округление с недостатком* до единиц некоторого разряда состоит в отбрасывании единиц всех младших разрядов.

Пример. Округлить с недостатком до сотых, десятых и единиц число 54,376.

Решение. Имеем 54,37; 54,3; 54. Погрешности округлений соответственно равны 0,006; 0,076; 0,376.

- При *округлении с избытком* до единиц некоторого разряда число единиц данного разряда увеличивают на единицу.

Пример. Округлить с избытком до сотых, десятых и единиц число 24,368.

Решение. Имеем 24,37; 24,4; 25. Погрешности округлений

Правило округления *с наименьшей погрешностью*:

1)единицы младших разрядов отбрасываются;

2)число единиц данного разряда не изменяется,

если следующая цифра дроби меньше 5, и увеличивается на единицу, если следующая цифра больше или равна 5.

Пример. Округлить с наименьшей погрешностью

до сотых, десятых и единиц число 32,467.

Решение. Имеем 32,47; 32,5; 32. Погрешности округлений соответственно равны