Развитие понятия о числе

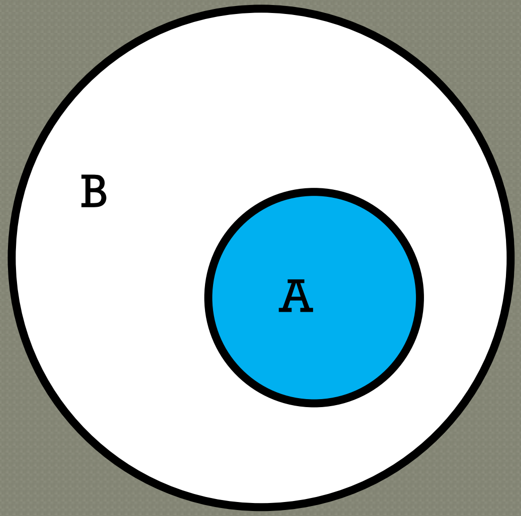
Целые и рациональные числа.
Иррациональные числа.
Действительные числа.
Приближенные вычисления.

Понятие множества

Множество можно представить как совокупность некоторых объектов, объединенных по определенному признаку.

- **Каждый объект, принадлежащий множеству A, называется *элементом этого множества*.**
- $a \in A$ – элемент a принадлежит множеству A.
- $b \notin A$ - элемент b не принадлежит множеству A.
- **Множество не содержащее ни одного элемента, называется *пустым множеством*.**
- $\emptyset$ - в множестве нет элементов.

- **Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то говорят, что множество A является подмножеством множества B:** $A \subset B$, или $A \subseteq B$.

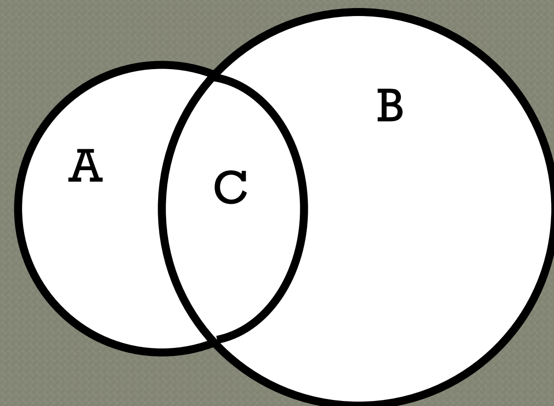


$$A \subset B \Leftrightarrow \text{Если } x \in A, \text{то } x \in B.$$

- Два множества называются *равными*, если каждый элемент первого множества является элементом второго множества и, наоборот каждый элемент второго множества является элементом первого множества:

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in B \\ x \in B \Rightarrow x \in A \end{cases}$$

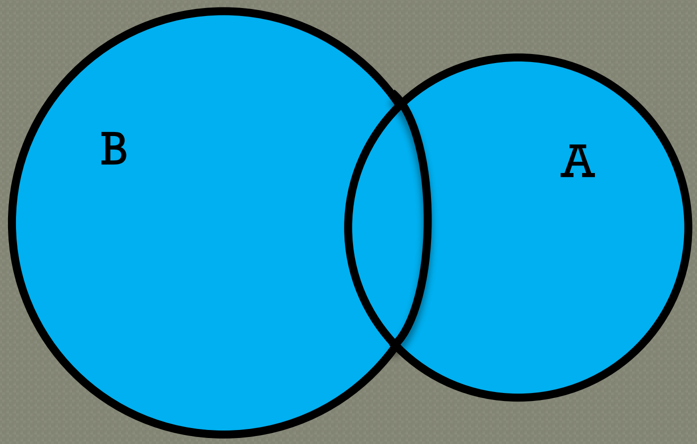
Пересечением множеств A и B **называют их общую часть, то есть множество C всех элементов, принадлежащих как множеству A, так и множеству B.**



$$C = A \cap B$$

$$x \in C \Leftrightarrow x \in A \text{ и } x \in B$$

Объединением множеств **А** и **В** называют множество **С**, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств (**А** или **В**).



$$C = A \cup B$$

$$x \in C \Leftrightarrow x \in A \text{ или } x \in B$$

Целые и рациональные числа

- В курсе математики чаще всего рассматриваются множества, элементами которых являются числа, и поэтому их называют *числовыми множествами*.

- Представление о числах у человечества складывалось под воздействием требований практики.
- С необходимостью счета предметов появились *натуральные числа:* $\boldsymbol{N} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3} \dots \dots\}$. При сложении и умножении натуральных чисел всегда получаются натуральные числа. Однако разность и частное натуральных чисел могут не быть натуральными числами.
- Одних натуральных чисел оказалось недостаточно для решения задач практики. Дополнением натуральных чисел нулем и отрицательными числами множество $\boldsymbol{N}$ расширяется до множества *целых чисел:* $\boldsymbol{Z} = \{\dots, -\mathbf{3}, -\mathbf{2}, -\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots\}$. Сумма, разность и произведение любых двух целых чисел являются целыми числами, а частное не всегда целое число.

- Измерение величин привело к необходимости расширения множества целых чисел и введения *рациональных чисел*, т. е. чисел вида $\frac{m}{n}$, где $m \in \boldsymbol{Z}, n \in N$.
- Каждое целое число m также является рациональным, т.к. его можно представить в виде $\frac{m}{1}$.
- Сумма, разность, произведение и частное любых двух рациональных чисел являются рациональными числами (на нуль делить нельзя!).

Рациональное число, записанное в виде дроби, можно также записать в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби, разделив числитель на знаменатель.

Пример. $\frac{3}{4} = 0{,}75;\ \frac{1}{3} = 0{,}33333\ \ldots\ldots$

Периодическая дробь - это бесконечная десятичная дробь, у которой, начиная с некоторого десятичного знака, повторяется одна и та же цифра или группа цифр - период дроби.

Пример. $\frac{3}{22} = 0{,}136363636\ \ldots\ldots = 0{,}1(36).$

Конечную десятичную дробь можно изображать в виде бесконечной, у которой после последнего десятичного знака, отличного от нуля, на месте следующих десятичных знаков записываются нули.

Пример. $\frac{3}{4} = 0{,}75 = 0{,}75000\ldots\ldots\ .$

Целые числа также записывают в виде бесконечной десятичной дроби, у которой справа от запятой на месте десятичных знаков стоят нули.

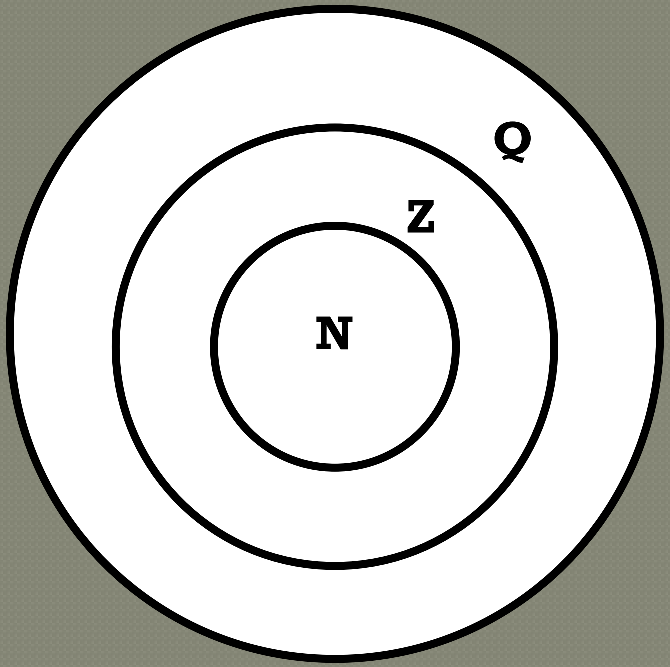
Пример. 13=13,000000……..

Каждое рациональное число может быть записано в виде бесконечной периодической десятичной дроби, и наоборот каждая бесконечная периодическая дробь задает рациональное число.

Любая периодическая десятичная дробь с периодом девять равна бесконечной десятичной дроби с периодом нуль, у которой десятичный разряд, предшествующий периоду, увеличен на единицу по сравнению с разрядом первой дроби.

Пример. $\frac{3}{10} = 0{,}2(9); \frac{3}{10} = 0{,}3(0).$

Множество рациональных чисел обозначают буквой ***Q*.**



$$N \subset Z \subset Q$$

Иррациональные числа

- Если бесконечная десятичная дробь непериодическая, то она не является рациональным числом.
- Пример. 0,101001000100001…… не является периодической дробью.
- *Иррациональным числом называется бесконечная десятичная непериодическая дробь.*
- Иррациональные числа могут быть положительными и отрицательными.
- Пример. 0,123456……. – положительное иррациональное число.
  -5,246810…… - отрицательное иррациональное число.

Числа $\sqrt{2}, \sqrt{7}, -\sqrt[3]{3}, \pi$ являются иррациональными.

Множество иррациональных чисел обозначают $\boldsymbol{I}$.

Действительные числа

- Рациональные и иррациональные числа образуют множество действительных чисел ***R***.
- Каждое действительное число может быть записано в виде бесконечной десятичной дроби: рациональные числа в виде бесконечной периодической десятичной дроби, а иррациональные- в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.

Действительным числом называется бесконечная десятичная дробь, т.е. дробь вида, $+a_0, a_1a_2a_3 \ldots \ldots$ или $-a_0, a_1a_2a_3 \ldots \ldots$ где a_0 -целое неотрицательное число, а каждая из букв $a_1, a_2, \ldots$ - это одна из десяти цифр: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Пример. $\pi = 3{,}1415 \ldots$

$$a_0 = 3, a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 1, a_4 = 5.$$

$$-\sqrt{234 =} \text{-15,297058.....}$$

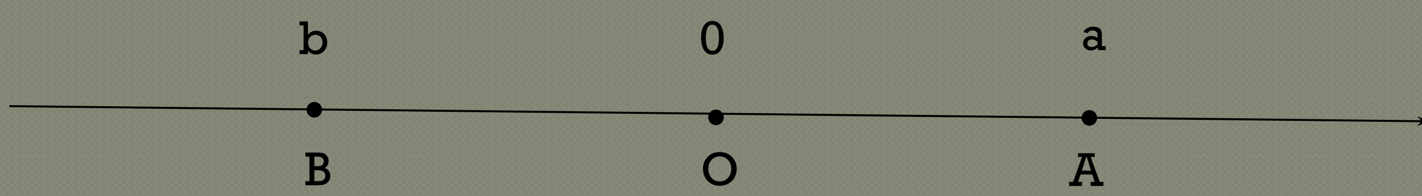
$$a_0 = 15, a_1 = 2, a_2 = 9, a_3 = 7, a_4 = 0 \text{ и т.д.}$$

Модуль действительного числа

- *Модулем положительного числа называется само это число, модулем отрицательного числа называется число, противоположное ему, модуль нуля равен нулю.*

$$|a| = \begin{cases} a \text{ при } a > 0, \\ 0 \text{ при } a = 0, \\ -a \text{ при } a < 0. \end{cases}$$

- На координатной прямой каждому действительному числу соответствует единственная точка и, наоборот, каждой точке координатной прямой соответствует единственное действительное число.
- На координатной прямой модуль- это расстояние от начала координат до точки, изображающей это число.



$$|a| = OA, \qquad |b| = OB$$
$$|a - b| = AB$$

Свойства модуля

1. $|a| \geq 0$
2. $|-a| = |a|$
3. $a \leq |a|$
4. При $b > 0 \quad |a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$
5. При $b > 0 \quad |a| \geq b \Leftrightarrow a \leq -b$ или $a \geq b$
6. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
7. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} (b \neq 0)$
8. $|a^n| = |a|^n$
9. $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$
10. $\big||a| - |b|\big| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$

Приближенные вычисления

- *Модуль разности между точным числом x и его приближенным значением a называется абсолютной погрешностью приближенного значения числа x и обозначается через α:* $|x - a| = \alpha$.

- Число a называется *приближенным значением* точного числа x с точностью до Δa, если абсолютная погрешность приближенного значения a не превышает Δa, т.е. $|x - a| \leq \Delta a$.

- *Число Δа называется границей абсолютной погрешности приближенного числа а.*

- *По известной границе абсолютной погрешности Δа находятся границы, в которых заключено точное значение числа x:*

$$(x = a \pm \Delta a) \Leftrightarrow (a - \Delta a \le x \le a + \Delta a).$$

- Пример. Даны приближенные значения числа $x = \frac{2}{3};\ a_1 = 0{,}6;\ a_2 = 0{,}66;\ a_3 = 0{,}67$. Какое из этих приближений является лучшим?

Решение: $\alpha_1 = \left|\frac{2}{3} - 0{,}6\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right| = \frac{1}{15}$,

$$\alpha_2 = \left|\frac{2}{3} - 0{,}66\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{33}{50}\right| = \frac{1}{150},$$

$$\alpha_3 = \left|\frac{2}{3} - 0{,}67\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{67}{100}\right| = \left|-\frac{1}{300}\right| = \frac{1}{300}.$$

Лучшим приближением числа x является $a_3 = 0{,}67$.

- *Цифра* ***m*** *приближенного числа* ***a*** *называется* ***верной в широком смысле,*** *если граница абсолютной погрешности числа* ***a*** *не превосходит единицы того разряда, в котором записывается цифра* ***m*** *.*

- *Цифра* ***m*** *приближенного числа* ***a*** *называется* ***верной в строгом смысле,*** *если граница абсолютной погрешности числа* ***a*** *не превосходит половины единицы того разряда, в котором записана цифра* ***m*** *.*

- В числах, используемых в десятичной записи приближенного значения числа все цифры должны быть верными.

- Цифры в записи приближенного числа, о которых неизвестно, являются ли они верными, называются ***сомнительными.***

- *Значащими цифрами приближенного числа называются все его верные цифры, кроме нулей, стоящих перед первой цифрой (слева направо), отличной от нуля.*

- Пример. Найти границу абсолютной погрешности приближенного значения 0,1978 числа x, все цифры которого верны в строгом смысле.

Решение. Граница абсолютной погрешности этого числа равна 0,00005, т.е. половине единицы последнего разряда, сохраняемого в записи.

- Пример. Указать верные цифры в (широком смысле) следующих чисел:

1) $2,73 \pm 0,056$; 2) $4,627 \pm 0,0008$.

Решение. 1)граница погрешности $\Delta a = 0,056$ не превосходит единицы разряда десятых $(0,056 < 0,1)$. Верными являются цифры 2 и 7.

2) $\Delta a = 0,0008 < 0,001$. Все цифры приближенного числа 4,627 верные.

Относительной погрешностью δ приближенного значения a числа x называется отношение абсолютной погрешности α этого приближения к числу a: $\delta = \frac{\alpha}{a}$.

На практике оценивают модуль относительной погрешности некоторым числом ε , которое заведомо не больше этого модуля: $|\delta| \leq \varepsilon$.

- *Число ε называется границей относительной погрешности.*

- *Границей относительной погрешности а приближенного значения а называется отношение границы абсолютной погрешности Δa к модулю числа a:* $\varepsilon_a = \frac{\Delta a}{|a|}$.

- В ряде задач границу абсолютной погрешности находят по данной относительной погрешности и модулю приближенного значения величины: $\Delta a = |a| \cdot \varepsilon_a$.

Пример. Найти относительную погрешность числа 6,8, если обе цифры его верны в строгом смысле.

Решение. По условию $\Delta a = 0{,}05$.

Тогда $\varepsilon_a = \frac{0{,}05}{6{,}8} = 0{,}00735 = 0{,}7\%$.

Пример. Какие цифры числа 4,86 при относительной погрешности 0,03%, являются верными?

Решение. $\Delta a = |a| \cdot \varepsilon_a$;

$\Delta a = 4{,}86 \cdot 0{,}003 = 0{,}01458 < 0{,}02.$

$a = 4{,}86 \pm 0{,}02.$

Верными являются первые две цифры 4 и 8.

Округление положительных десятичных дробей

- *Абсолютная погрешность, допускаемая при округлении, называется* ***погрешностью округления.***
- *Округление с недостатком* до единиц некоторого разряда состоит в отбрасывании единиц всех младших разрядов.

Пример. Округлить с недостатком до сотых, десятых и единиц число 54,376.

Решение. Имеем 54,37; 54,3; 54. Погрешности округлений соответственно равны 0,006; 0,076; 0,376.

- При *округлении с избытком* до единиц некоторого разряда число единиц данного разряда увеличивают на единицу.

Пример. Округлить с избытком до сотых, десятых и единиц

число 24,368.

Решение. Имеем 24,37; 24,4; 25. Погрешности округлений

Правило округления *с наименьшей погрешностью*:

1)единицы младших разрядов отбрасываются;

2)число единиц данного разряда не изменяется,

если следующая цифра дроби меньше 5, и увеличивается на единицу, если следующая цифра больше или равна 5.

Пример. Округлить с наименьшей погрешностью

до сотых, десятых и единиц число 32,467.

Решение. Имеем 32,47; 32,5; 32. Погрешности округлений соответственно равны

0,003; 0,033; 0,467.