ТЕМА: «МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА. СТАТИКА»

Лекция №5 «Общий порядок построения эпюр Q_x M

5.1 Построение эпюр способом «по участкам»

1. Определяют опорные реакции.

2. Разбивают балки на участки, границами которых являются характерные точки, и определяют число таких участков.

3. Нумеруют участки. Если нагрузка не сложная, то можно их нумеровать по порядку слева направо, т.е. от левого до правого конца балки. Если участков много, то часть их можно пронумеровать начиная от правого конца балки. Благодаря этому будут проще выглядеть уравнения равновесия.

4. В пределах каждого участка проводят сечения 1-1, 2-2 и т. д. «Привязывают» каждое сечение к левому или правому концу балки координатами соответственно x_1, x_2 и т.д.

5. Определяют граничные значения каждой из координат x_1, x_2 и т.д.

6. Определяют значения Q_x сначала в каждом из сечений в общем виде, затем в граничных точках, придавая числовые значения координатам x_1, x_2 и т.д. Строят эпюру Q_x откладывая значения найденных поперечных сил от оси балки в определенном масштабе и соединяют концы полученных отрезков.

7. Определяют значения M_x сначала в каждом из сечений в общем виде, затем в граничных точках, придавая числовые значения координатам x_1, x_2 и т.д. Строят эпюру M_x откладывая значения найденных изгибающих моментов от оси балки в определенном масштабе и соединяют концы полученных отрезков.

При наличии распределенной нагрузки необходимо найти экстремальное значение M_x на этом участке, для чего надо знать, на каком расстоянии от точки начала действия распределенной нагрузки находится сечение с экстремальным значением M_x. Определяют это расстояние 2-мя способами:

- находят первую производную от выражения момента и приравнивают ее нулю: $dM_x/d_x=0$;
- определяют по эпюре Q_x, рассматривая подобие треугольников.

Пример 5.1 Определить опорные реакции и построить эпюры Q_x и M_x для балки, приведенной на рисунке 5.1,а, если F=10кН и l=4м.

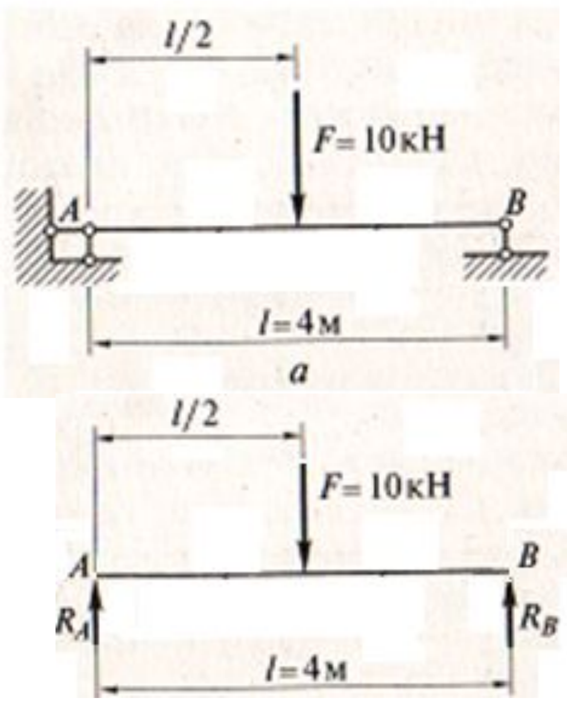


Рис. 5.1 · К примеру 5.1

Решение:

1. Определяем опорные реакции. Поскольку балка имеет ось симметрии относительно опор, то очевидно, что опорные реакции:

$$R_A=R_B=F/2=5кН$$

2. Разбиваем балку на два участка (□ и □□)

3. Определяем поперечные силы Q_x на каждом участке.

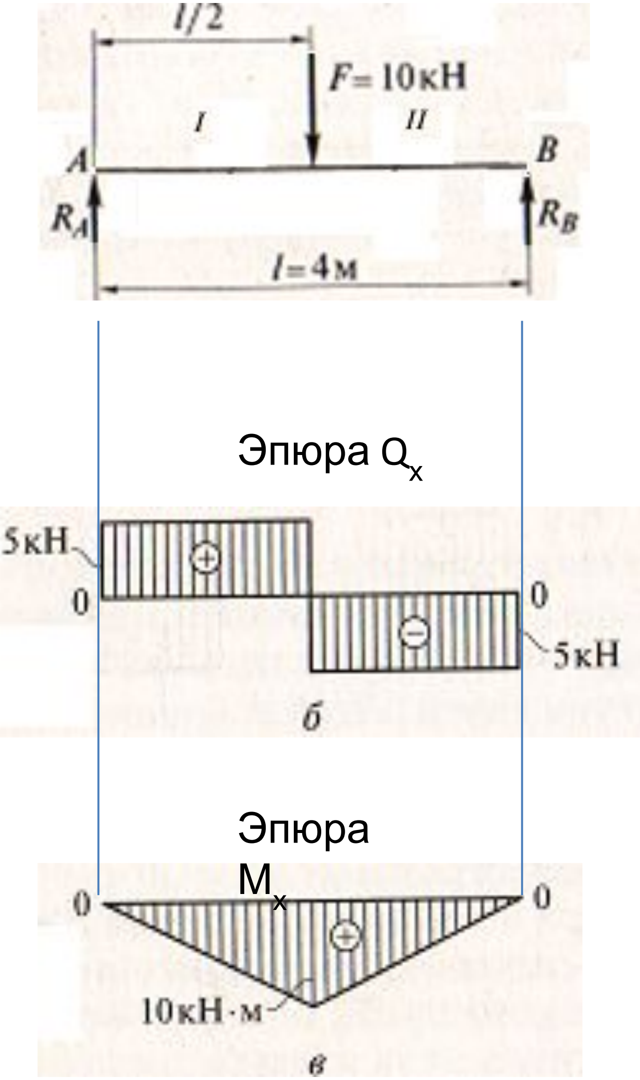


Рис. 5.1 · К примеру 5.1

Участок □ $(0 \le x_1 \le \mathbf{l}/2)$

$Q_{x1} = R_A = F/2 = 5кН$

Участок □□ $(\mathbf{l}/2 \le x_2 \le \mathbf{l})$

$Q_{x2} = R_A - F = F/2 - F = 5кН$

По найденным значениям строим эпюру Q_x (рис.5.1, б).

4. Определяем изгибающие моменты M_x на каждом участке.

Участок □ $(0 \le x_1 \le \mathbf{l}/2)$

$M_{x1} = R_A \cdot x_1 = F/2 \cdot x_1$

При $x_1 = 0 \rightarrow M_{x1} = 0$;
При $x_1 = \mathbf{l}/2 \rightarrow M_{x1} = F/2 \cdot \mathbf{l}/2 = F\mathbf{l}/4 = 10 \cdot 4/4 = 10кН \cdot м$

Участок □□ $(0 \le x_2 \le \mathbf{l}/2)$

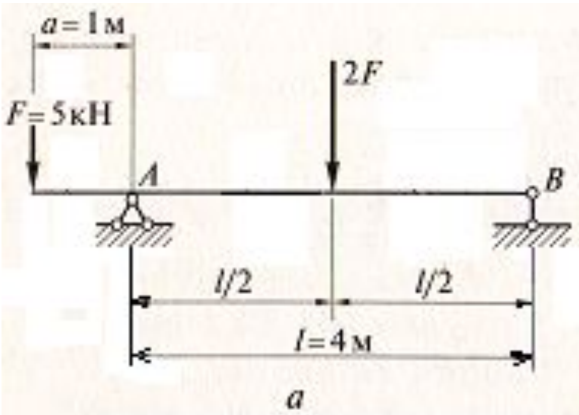
$M_{x2} = R_B \cdot x_2 = F/2 \cdot x_2$

При $x_2 = 0 \rightarrow M_{x2} = 0$;
При $x_2 = \mathbf{l}/2 \rightarrow M_{x2} = F/2 \cdot \mathbf{l}/2 = F\mathbf{l}/4 = 10 \cdot 4/4 = 10кН \cdot м$

По найденным значениям строим эпюру M_x (рис.5.1, в).

Пример 5.2 **Определить опорные реакции и построить эпюры Q_x и M_x для балки, приведенной на рисунке 5.2,а, если F=5кН, l=4м, a=1м**

Решение:



1. Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = 0, \text{ или } -Fa + 2Fl/2 - R_B l = 0,$$

$$\text{откуда } R_B = \frac{-Fa + 2Fl/2}{l} = \frac{-5\cdot1 + 2\cdot5\cdot2}{4} = \frac{15}{4} = 3{,}75 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0, \text{ или } -F(l+a) + R_A l - 2Fl/2 = 0,$$

$$\text{откуда } R_A = \frac{F(l+a) + 2Fl/2}{l} = \frac{5(4+1) + 2\cdot5\cdot2}{4} = \frac{45}{4} = 11{,}25 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum Y = 0; -F + R_A - 2F + R_B = 0; -5 + 11{,}25 - 2\cdot5 + 3{,}75 = 0;$$

0≡0. Опорные реакции найдены правильно

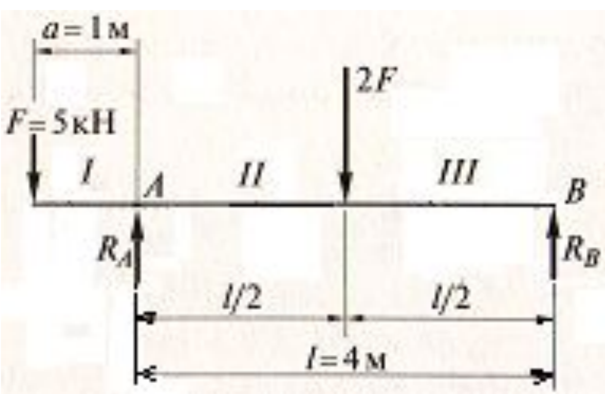


Рис. 5.2 К примеру 5.2

2. Разбиваем балку на три участка (□ - □□□). Для 3-го участка лучше рассматривать правую часть балки.

3. Определяем поперечные силы Q_x на каждом участке.

Участок □ $(0 \le x_1 \le a)$

$Q_{x1} = -F = -5$кН-на всем участке

Участок □□ $(a \le x_2 \le a + l/2)$

$Q_{x2} = -F + R_A = -5 + 11{,}25 = 6{,}25$кН

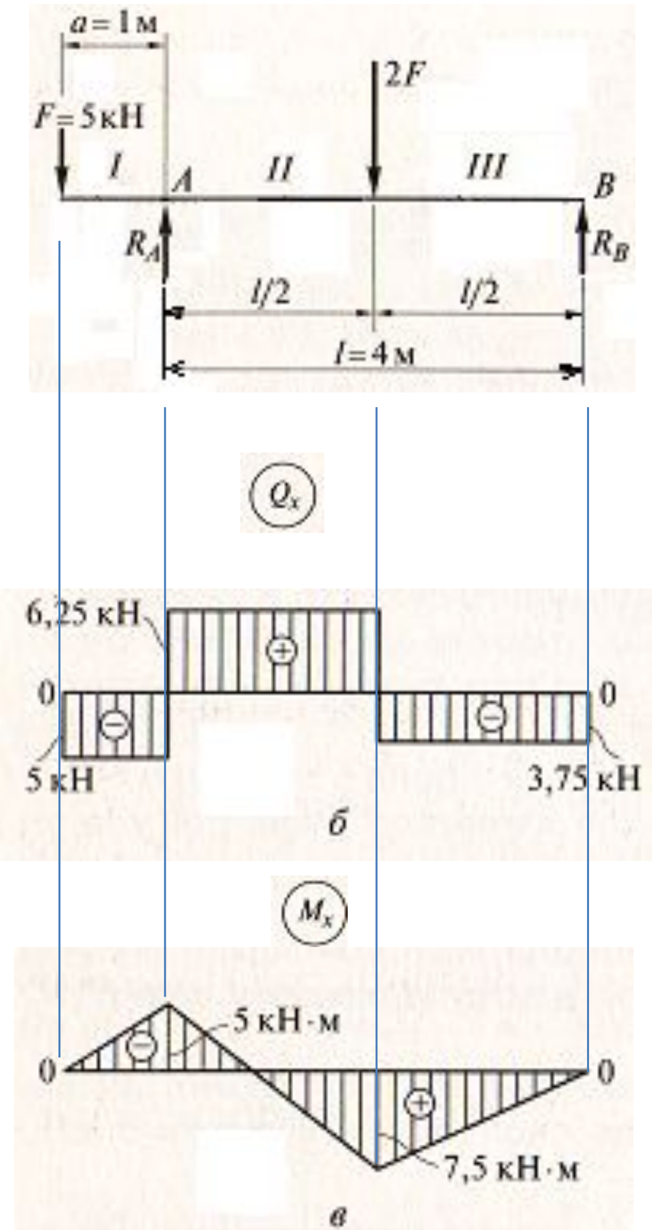


Рис. 5.2 К примеру 5.2

Участок □□□ $(0 \le x_2 \le$ **l**/2)

$Q_{x3} = - R_B = - 3{,}75$кН

По найденным значениям строим эпюру Q_x (рис.5.2, б).

4. Определяем изгибающие моменты M_x на каждом участке.

Участок □ $(0 \le x_1 \le$ a)

$M_{x1} = -F \cdot x_1$

При $x_1 = 0 \rightarrow M_{x1} = 0$;
При $x_1 = a \rightarrow M_{x1} = -F \cdot a = -5 \cdot 1 = \mathbf{-5}$кН·м

Участок □□ $(a \le x_2 \le a +$ **l**/2)

$M_{x2} = -Fx_2 + R_A(x_2 - a)$

При $x_2 = a \rightarrow M_{x2} = -F \cdot a + R_A(a-a) = -5 \cdot 1 + 11{,}25 \cdot 0 = -5$кН·м;
При $x_2 = a + \mathbf{l}/2 \rightarrow M_{x2} = -F(a+\mathbf{l}/2) + R_A \cdot \mathbf{l}/2 = -5(1+2) + 11{,}25 \cdot 2 = -15 + 22{,}5 = 7{,}5$кН·м

Участок □□□ $(0 \le x_3 \le$ **l**/2)

$M_{x3} = R_B \cdot x_3$

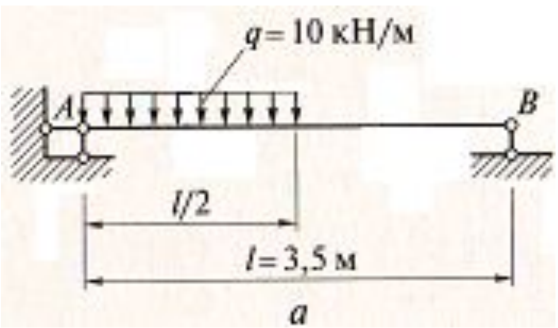
При $x_3 = 0 \rightarrow M_{x3} = 0$;
При $x_3 = \mathbf{l}/2 \rightarrow M_{x3} = R_B \cdot \mathbf{l}/2 = 3{,}75 \cdot 2 = 7{,}5$кН·м

По найденным значениям строим эпюру M_x (рис.5.2, в).

Пример 5.3 **Определить опорные реакции и построить эпюры Q_x и M_x для балки, приведенной на рисунке 5.3,а, если q=10кН/м, l=3,5м.**

Решение:

1. Определяем опорные реакции:



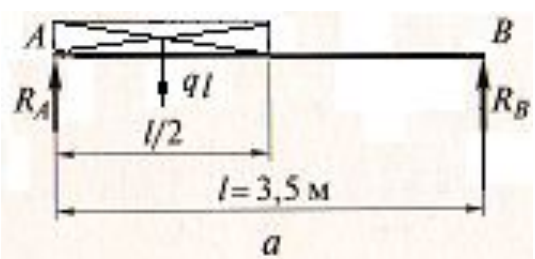


Рис. 5.3 К примеру 5.3

При определении опорных реакций удобнее заменить распределенную нагрузку сосредоточенной, величина которой равна произведению интенсивности нагрузки на длину участка ее приложения (l/2). Составляем уравнения равновесия (рис.5.3,а):

$$\sum M_A = 0, \text{ или } q\frac{l}{2}\frac{l}{4} - R_B l = 0,$$

$$\text{откуда } R_B = \frac{q\frac{l}{2}\frac{l}{4}}{l} = \frac{ql}{8} = \frac{10\cdot 3{,}5}{8} = 4{,}375 \text{ кН} \approx 4{,}38 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0, \text{ или } -q\frac{l}{2}\left(\frac{l}{2} + \frac{l}{4}\right) + R_A l = 0,$$

$$\text{откуда } R_A = \frac{q\frac{l}{2}\left(\frac{l}{2} + \frac{l}{4}\right)}{l} = \frac{q\frac{l}{2}\frac{3}{4}l}{l} = \frac{3ql}{8} = \frac{3\cdot 10\cdot 3{,}5}{8} = 13{,}125 \text{ кН} = 13{,}12 \text{ кН}.$$

Проверка:

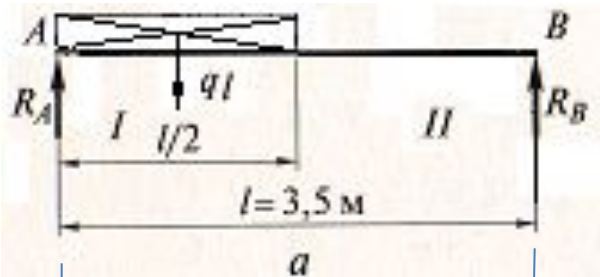
$$\sum Y = 0. \quad R_A - q\frac{l}{2} + R_B = 0.$$

$$13{,}12 - 10\cdot 1{,}75 + 4{,}38 = 0, \; 17{,}5 - 17{,}5 = 0, \quad 0 \equiv 0.$$

0≡0. Опорные реакции найдены правильно

2. Разбиваем балку на три участка (□ - □□)

3. Определяем поперечные силы Q_x на каждом участке.



Участок □ $(0 \le x_1 \le \mathbf{l}/2)$

$Q_{x1} = R_A - q \cdot x_1$

При $x_1 = 0 \rightarrow Q_{x1} = R_A = 13{,}12$кН;
При $x_1 = \mathbf{l}/2 \rightarrow Q_{x1} = R_A - q\mathbf{l}/2 = 13{,}12 - 10 \cdot 1{,}75 = -4{,}38$ кН

Участок □□ $(0 \le x_2 \le \mathbf{l}/2)$

$Q_{x2} = -R_B = -4{,}38$кН-на всем участке

По найденным значениям строим эпюру Q_x (рис.5.3, б).

Эпюра Q_x

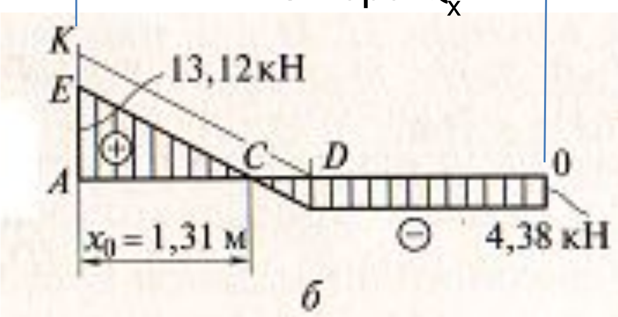


Рис. 5.3 К примеру 5.3

Эпюра пересекает нулевую линию в точке С, расстояние до которой от правой опоры находим из подобия треугольников АСЕ и АDК:

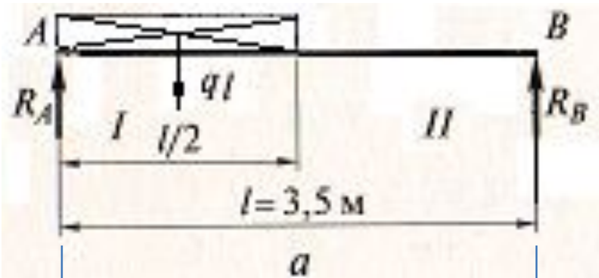
$$\frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AK},$$

где $AD = l/2 = 1{,}75$ м; $AE = 13{,}12$ кН; $AK = 13{,}12 + 4{,}38 = 17{,}5$ кН;

$$AC = \frac{AD \cdot AE}{AK} = \frac{1{,}75 \cdot 13{,}12}{17{,}5} = 1{,}312 \text{ м} = 1{,}31 \text{ м}.$$

Это расстояние принято обозначать x_0.

4. Определяем изгибающие моменты M_x на каждом участке.



Эпюра M_x

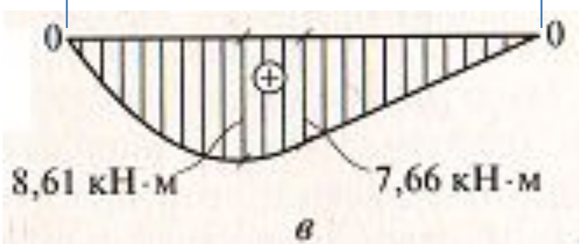


Рис. 5.3 К примеру 5.3

Участок □ $(0 \le x_1 \le l/2)$

$M_{x1} = R_A \cdot x_1 - q \cdot x_1^{\ 2}$

При $x_1 = 0 \rightarrow M_{x1} = 0$;
При $x_1 = l/2 \rightarrow M_{x1} = R_A \cdot l/2 - q \cdot (l/2)^2/2 = 13{,}12 \cdot 1{,}75 - 10 \cdot 1{,}75^2/2 = 22{,}96 - 15{,}31 = 7{,}65$кН·м

При $x_1 = x_0 = 1{,}31$м $\rightarrow M_{x1} = R_A \cdot x_0 - q \cdot x_0^{\ 2}/2 = 13{,}12 \cdot 1{,}31 - 10 \cdot 1{,}31^2/2 = 17{,}19 - 8{,}58 = 8{,}61$кН·м;

Участок □□ $(0 \le x_2 \le l/2)$

$M_{x2} =$

При $x_2 = 0 \rightarrow M_{x2} = 0$;
При $x_2 = l/2 \rightarrow M_{x2} = R_B \cdot l/2 = 4{,}38 \cdot 1{,}75 = 7{,}66$кН·м

По найденным значениям строим эпюру M_x (рис.5.3, в).

Суммы моментов всех сил слева и справа получились примерно одинаковыми – 7,65 и 7,66кН·м. Незначительное расхождение произошло из-за округления значений опорных реакций. Соединяем плавной кривой отложенные значения и получаем на участке AD параболу выпуклостью вниз (рис.5.3,в).

Проанализировав эпюры Q_x и M_x с позиции их изменения по длине балки, можно сделать выводы

1. В местах приложения сосредоточенных сил F и опорных реакций R_A и R_B, которые в сущности являются сосредоточенными силами, на *эпюре* Q_x наблюдается вертикальный «скачок» на величину такой силы в направлении ее действия при движении по эпюре слева направо. В рассмотренных примерах силы F_1, F_2, ... направлены вниз, как это имеет место для нагрузки на балку, а опорные реакции R_A и R_B — вверх. В общем случае возможно и другое действие сил и реакций. При движении по эпюре справа налево направление скачков меняется на противоположное.

На *эпюре* M_x в указанных местах (сечениях балки) наблюдается перелом прямой линии, если слева и справа от точки приложения сосредоточенной силы нет распределенной нагрузки. Наклоны линий зависят от величин сил, расстояний между ними и могут быть установлены только с помощью вычислений.

2. В месте приложения внешнего сосредоточенного момента M на *эпюре* Q_x никаких изменений не происходит, т.е. момент на значения поперечных сил влияния не оказывает.

На *эпюре* M_x наблюдается скачок на величину момента. Направление скачка (вниз или вверх) зависит от знака момента: при рассмотрении левой части балки момент, действующий по часовой стрелке, дает скачок вниз, а при рассмотрении правой — наоборот.

3. Если на участке между двумя характерными точками нет распределенной нагрузки, *эпюра* Q_x представляет собой прямую линию, параллельную нулевой. Расстояние ее от нулевой линии зависит от величин сил и реакций. В частном случае эпюра Q_x может совпадать с нулевой линией на отдельных участках или по всей длине балки.

Эпюра M_x представляет собой прямую линию, наклонную к нулевой. Конкретное положение линии определяется с помощью вычислений.

4. Если на участке между двумя характерными точками действует равномерно распределенная нагрузка, *эпюра* Q_x представляет собой прямую линию, наклонную к оси (нулевой линии).

Эпюра M_x представляет собой кривую линию, точнее, квадратичную параболу, которая обращена выпуклостью в сторону действия нагрузки. Если балку заменить гибкой нитью, то она под действием нагрузки будет провисать. Преимущественно нагрузка направлена вниз, поэтому и парабола обращена выпуклостью вниз, т.е. в сторону действия нагрузки. При этом парабола на рассматриваемом участке может иметь экстремум (максимальное или минимальное значение, т.е. вершину) выпуклостью вверх или вниз, а может и не иметь.

В той точке балки, где эпюра $\hat{Q}_x$ пересекает нулевую линию, на эпюре M_x находится экстремальное значение, и такая эпюра строится по трем точкам. Если эпюра Q_x не пересекает нулевую линию, то эпюра M_x криволинейна, но не имеет экстремума и может быть построена по двум точкам.

Перечисленные зависимости между нагрузками и эпюрами Q_x и M_x можно использовать для проверки правильности построения эпюр способом «по участкам». Эти же зависимости можно использовать и для построения эпюр Q_x и M_x способом «по характерным точкам», который позволяет значительно сократить вычислительные операции.

Для самостоятельного решения !

Задача 3. **Определить опорные реакции и построить эпюры Q_x и M_x для балки, приведенной на рис. 5.4 при заданных M и l . Исходные данные взять из таблицы 1 по последней цифре зачетной книжки.**

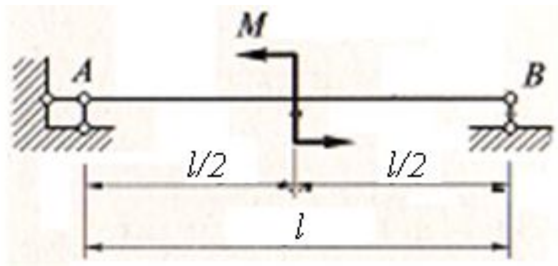


Рисунок 5.4

Таблица 1

Величины	Варианты									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
M (кН·м)	7	6	6	5	8	7	6	5	6	8
l (м)	3,5	4	3	4	5	4	3	4	3	5

Задача 4. **Определить опорные реакции и построить эпюры Q_x и M_x для балки, приведенной на рис.5.5 при заданных F и l. . Исходные данные взять из таблицы 2 по последней цифре зачетной книжки (см. следующий кадр).**

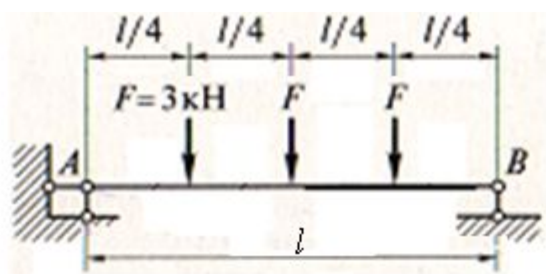


Рисунок 5.5

Таблица 2

Величины	Варианты									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
F (кН)	3	4	3	4	5	4	3	4	3	5
l *(м)*	6	8	9	7	8	6	6	5	6	8

5.2 Построение эпюр способом «по характерным точкам»

1. Определяют опорные реакции.
2. Обозначают характерные точки.
3. Определяют значения Q_x и M_x в характерных точках.
4. Точки, соответствующие полученным значениям, соединяют между собой. При этом необходимо учитывать следующее. В местах приложения сосредоточенных сил надо отыскивать два значения поперечной силы Q_x ($Q_{лев}$ и $Q_{прав}$), которые отличаются друг от друга на величину сосредоточенной силы. Аналогично при построении эпюры изгибающих моментов в точке, где приложен внешний сосредоточенный момент, необходимо находить два значения M_x ($M_{лев}$ и $M_{прав}$), которые отличаются друг от друга на величину внешнего момента.
5. Оба значения Q_x ($Q_{лев}$ и $Q_{прав}$) и M_x ($M_{лев}$ и $M_{прав}$) могут быть найдены при рассмотрении левой части балки, либо одно из значений находят, рассматривая левую часть балки, а второе – правую.

Для самостоятельного решения !

Задача 5. **Для балки, показанной на рис.5.8,а приведены «слепые» (без значений) эпюры Q_x (рис.5.8,б) и M_x (рис.5.8,в). Определите опорные реакции и проставьте значения поперечных сил и изгибающих моментов в характерных точках.**

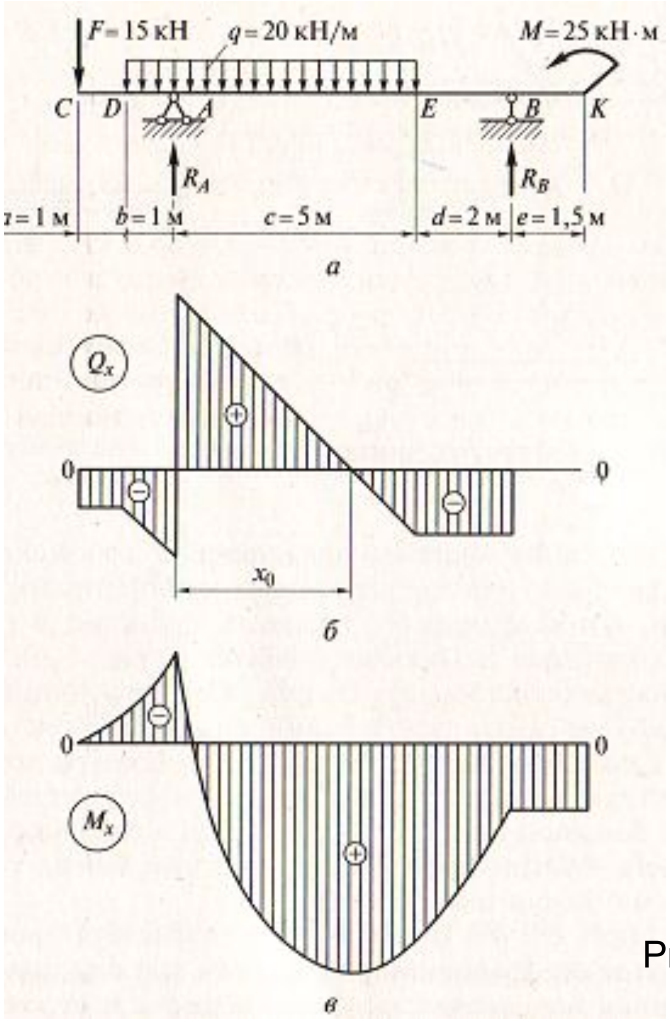


Рисунок 5.8