

Системы счисления

Система счисления – это способ представления чисел и правила действия над ними.

Существуют позиционные и непозиционные системы счисления.

В **непозиционных** системах счисления от положения цифры в записи числа не зависит величина, которую она обозначает. Примером непозиционной системы счисления является римская система, в которой в качестве цифр используются латинские буквы:

Например, $VI = 5 + 1 = 6$, а $IX = 10 - 1 = 9$.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

В **позиционных** системах счисления величина, обозначаемая цифрой в записи числа, зависит от ее позиции.

Количество используемых цифр называется **основанием** системы счисления. Место каждой цифры в числе называется **позицией**.

Совокупность цифр, которые можно использовать для записи числа, с установленным лексикографическим порядком называется **алфавитом системы счисления**.

В современной математике используется позиционная десятичная система счисления $(0\dots 9)$.

В позиционной системе счисления сравнение двух чисел происходит следующим образом:
в рассматриваемых числах слева направо сравниваются цифры, стоящие в одинаковых позициях.

В **позиционной** системе счисления большая цифра соответствует большему значению числа.

Например, для чисел **123** и **234**,

1 меньше 2, поэтому число 123 меньше, чем число 234.

В **непозиционной** системе счисления это правило не действует.

Например, для чисел **IX** и **VI**.

Несмотря на то, что I меньше, чем V, число IX больше, чем число VI.

Обозначение числа в системе счисления по основанию p :

$$X_p$$

Например, 555_7 -- число, записанное в семеричной системе счисления.

В нем могут встречаться цифры от 0 до 6.

Начиная с 11-тиричной системы счисления число 10 заменяется буквой английского алфавита A

Таким образом, в 16-тиричной системе счисления 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F

Запись произвольного числа X в P -ичной позиционной системе счисления основывается на представлении этого числа в виде многочлена:

$$X_p = a_n * p^n + a_{n-1} * p^{n-1} + a_1 * p^1 + a_0 * p^0,$$

где $a_n \dots a_0$ -- цифры в представлении данного числа.

Так, например,

$$1035_{10} = 1 * 10^3 + 0 * 10^2 + 3 * 10^1 + 5 * 10^0;$$

$$1010_2 = 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 1 * 2^1 + 0 * 2^0$$

Перевод чисел из одной системы счисления в другую

Если необходимо перевести число из системы счисления по основанию p_1 в систему счисления по основанию p_2 , то сначала переводим число в десятичную систему счисления, а потом в систему счисления по основанию p_2 :

$$x_{p_1} \rightarrow y_{10} \rightarrow z_{p_2}$$

Перевод чисел в десятичную систему счисления

Любое десятичное число можно представить в виде

$$x = a_0 * p^n + a_1 * p^{n-1} + \dots + a_{n-1} * p^1 + a_n * p^0,$$

где $a_0 \dots a_n$ -- это цифры данного числа в системе счисления с основанием p .

Пример

Переведем число $4A3F_{16}$ в десятичную систему.

По определению, $4A3F_{16} = 4 * 16^3 + A * 16^2 + 3 * 16 + F$.

Заменив A на 10 , а F на 15 , получим $4 * 16^3 + 10 * 16^2 + 3 * 16 + 15 = 19007$.

Перевод десятичных чисел в другие системы счисления

Перевод целых чисел.

1) последовательно выполнять деление данного числа и получаемых неполных частных на основание новой системы счисления до тех пор, пока не получим неполное частное, меньшее делителя;

2) полученные остатки, являющиеся цифрами числа в новой системе счисления, привести в соответствие с алфавитом новой системы счисления;

3) составить число в новой системе счисления, записывая его, начиная с последнего частного.

Пример. Перевести десятичное число 315 в восьмеричную и в шестнадцатеричную системы:

$$\begin{array}{r} 315 \\ - 24 \\ \hline 75 \\ - 72 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ \hline 39 \\ - 32 \\ \hline 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 315 \\ - 16 \\ \hline 155 \\ - 144 \\ \hline 11 \end{array} \quad \begin{array}{r} 16 \\ \hline 19 \\ - 16 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 16 \\ \hline 1 \end{array}$$

- Отсюда следует: $315_{10} = 473_8 = 13B_{16}$. Напомним, что $11_{10} = B_{16}$. •

Системы счисления, используемые в ЭВМ (с основанием 2^n)

Для того чтобы **целое двоичное число** записать в системе счисления с основанием $q = 2^n$ (4, 8, 16 и т.д.), нужно:

- 1) данное двоичное число разбить справа налево на группы по n цифр в каждой;
- 2) если в последней левой группе окажется меньше n разрядов, то ее надо дополнить слева нулями до нужного числа разрядов;
- 3) рассмотреть каждую группу как n -разрядное двоичное число и записать ее соответствующей цифрой в системе счисления с основанием $q = 2^n$

Таблицы перевода

$2 \leftrightarrow 4 = 2^2$	
00	0
01	1
10	2
11	3

$2 \leftrightarrow 8 = 2^3$	
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

$2 \leftrightarrow 16 = 2^4$	
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	A
1011	B
1100	C
1101	D
1110	E
1111	F

$$15FC_{16} = 101011111100_2$$

Получается: 0001 0101 1111 1100

Для выполнения арифметических операций в системе счисления с основанием P необходимо иметь соответствующие таблицы сложения и умножения.

+	0	1
0	0	1
1	1	10

'	0	1
0	0	0
1	0	1

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

'	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61