Системы счисления

Система счисления – это способ представления чисел и правила действия над ними.

Существуют позиционные и непозиционные системы счисления.

В **непозиционных** системах счисления от положения цифры в записи числа не зависит величина, которую она обозначает. Примером непозиционной системы счисления является римская система, в которой в качестве цифр используются латинские буквы:

Например, VI = 5 + 1 = 6, а IX = 10 - 1 = 9.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

В **позиционных** системах счисления величина, обозначаемая цифрой в записи числа, зависит от ее позиции.

Количество используемых цифр называется **основанием** системы счисления. Место каждой цифры в числе называется **позицией.**

Совокупность цифр, которые можно использовать для записи числа, с установленным лексикографическим порядком называется **алфавитом системы счисления**.

В современной математике используется позиционная десятичная система счисления (0…9).

В позиционной системе счисления сравнение двух чисел происходит следующим образом:
в рассматриваемых числах слева направо сравниваются цифры, стоящие в одинаковых позициях.

В **позиционной** системе счисления большая цифра соответствует большему значению числа.
Например, для чисел **123 и 234**,
1 меньше 2, поэтому число 123 меньше, чем число 234.

В **непозиционной** системе счисления это правило не действует.
Например, для чисел **IX и VI**.
Несмотря на то, что I меньше, чем V, число IX больше, чем число VI.

Обозначение числа в системе счисления по основанию p:

$$x_p$$

Например, 555_7 -- число, записанное в семеричной системе счисления.

В нем могут встречаться цифры от 0 до 6.

Начиная с 11-тиричной системы счисления число 10 заменяется буквой английского алфавита A

Таким образом, в 16-тиричной системе счисления 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F

Запись произвольного числа X в P-ичной позиционной системе счисления основывается на представлении этого числа в виде многочлена:

$$X_p=a_n*p^n+a_{n-1}*p^{n-1}+ a_1*p^1+a_0*p^0,$$

где $a_n...a_0$ -- цифры в представлении данного числа.

Так, например,

$$1035_{10}=1*10^3+0*10^2+3*10^1+5*10^0;$$

$$1010_2 = 1*2^3+0*2^2+1*2^1+0*2^0$$

Перевод чисел из одной системы счисления в другую

Если необходимо перевести число из системы счисления по основанию p_1 в систему счисления по основанию p_2, то сначала переводим число в десятичную систему счисления, а потом в систему счисления по основанию p_2:

$$x_{p_1} \to y_{10} \to z_{p_2}$$

Перевод чисел в десятичную систему счисления

Любое десятичное число можно представить в виде

$$x = a_0*p^n + a_1*p^{n-1} + ... + a_{n-1}*p^1 + a_n*p^0,$$

где a_0 ... a_n -- это цифры данного числа в системе счисления с основанием p.

Пример

Переведем число $4A3F_{16}$ в десятичную систему.

По определению, $4A3F_{16} = 4*16^3+A*16^2+3*16+F$.

Заменив A на 10, а F на 15, получим $4*16^3+10*16^2+3*16+15= 19007$.

Перевод десятичных чисел в другие системы счисления

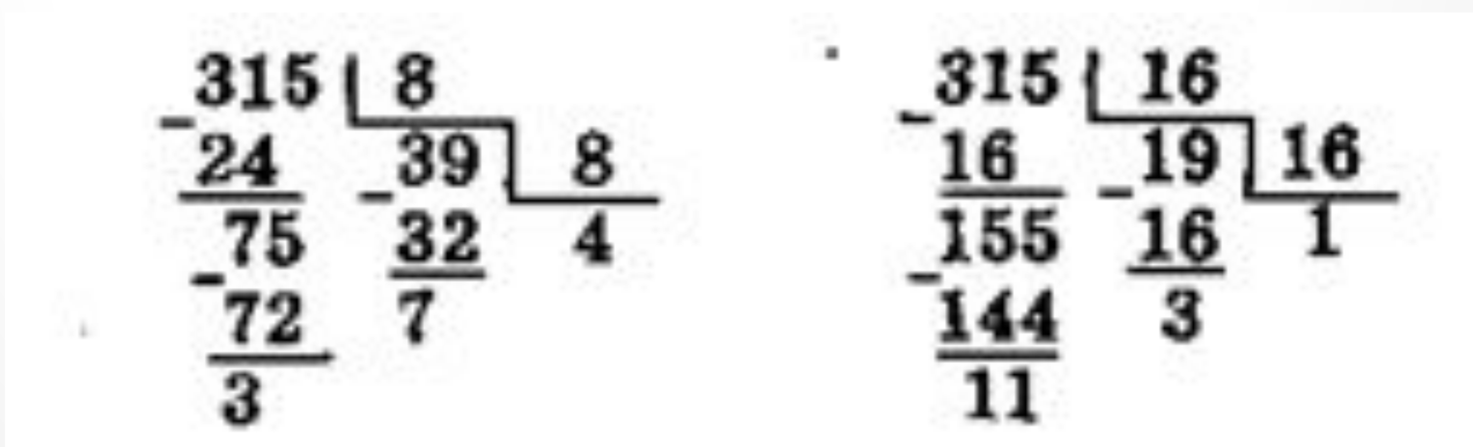
Перевод целых чисел.

1) последовательно выполнять деление данного числа и получаемых неполных частных на основание новой системы счисления до тех пор, пока не получим неполное частное, меньшее делителя;

2) полученные остатки, являющиеся цифрами числа в новой системе счисления, привести в соответствие с алфавитом новой системы счисления;

3) составить число в новой системе счисления, записывая его, начиная с последнего частного.

Пример. Перевести десятичное число 315 в восьмеричную и в шестнадцатеричную системы:



Отсюда следует: $315_{10} = 473_8 = 13B_{16}$. Напомним, что $11_{10} = B_{16}$.

Системы счисления, используемые в ЭВМ (с основанием 2^n)

Для того чтобы **целое двоичное число** записать в системе счисления с основанием $q = 2^n$ (4, 8, 16 и т.д.), нужно:

1) данное двоичное число разбить справа налево на группы по n цифр в каждой;
2) если в последней левой группе окажется меньше n разрядов, то ее надо дополнить слева нулями до нужного числа разрядов;
3) рассмотреть каждую группу как n-разрядное двоичное число и записать ее соответствующей цифрой в системе счисления с основанием $q = 2^n$

Таблицы перевода

$2 \leftrightarrow 4 = 2^2$	
00	0
01	1
10	2
11	3

$2 \leftrightarrow 8 = 2^3$	
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

$2 \leftrightarrow 16 = 2^4$	
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	A
1011	B
1100	C
1101	D
1110	E
1111	F

$$15FC_{16} = 1010111111100_2$$

Получается: 0001 0101 1111 1100

Для выполнения арифметических операций в системе счисления с основанием *P* необходимо иметь соответствующие таблицы сложения и умножения.

+	0	1
0	0	1
1	1	10

´	0	1
0	0	0
1	0	1

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

´	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61