

Теорема Муавра-Лапласа

*Проводится n независимых испытаний,
в каждом из которых возможно 2 исхода:
успех или неудача.*

Вероятность успеха p , неудачи $q=q-p$

Пусть k – число успехов (Схема Бернулли)

Теорема Муавра-Лапласа

При большом числе испытаний n в схеме Бернулли число успехов k имеет приближенно нормальное распределение

$$N\left(np, \sqrt{npq}\right)$$

Теорему можно использовать для приближенного расчета вероятности того, что число успехов лежит в заданном диапазоне $P(k_1 \leq k \leq k_2)$

При ручном расчете

$$P(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

При расчете в Excel:

вычислить среднее число успехов $m=np$

вычислить среднеквадратичное отклонение $s = \sqrt{npq}$

вычислить искомую вероятность:

=НОРМРАСП(k_2 ; m ; s ; 1) - НОРМРАСП(k_1 ; m ; s ; 1)

Пример

При данном технологическом процессе 90% всей произведенной продукции является высшим сортом.

Произведено 4000 изделий.

- Какова вероятность, что число изделий высшего сорта лежит между 3580 и 3650?
- Какова вероятность, что число изделий высшего сорта не больше 3580 ?
- Какова вероятность, что число изделий высшего сорта не меньше 3650 ?

Решение:

Проводится $n=4000$ испытаний. Успех – изделие высшего сорта, $p=0,9$, $q=0,1$. По условию задачи, надо найти

$$\begin{aligned} P(3580 \leq k \leq 3650) &\approx \Phi\left(\frac{3650 - 4000 \cdot 0,9}{\sqrt{4000 \cdot 0,9 \cdot 0,1}}\right) - \Phi\left(\frac{3580 - 4000 \cdot 0,9}{\sqrt{4000 \cdot 0,9 \cdot 0,1}}\right) = \\ &= \Phi(2,64) - \Phi(-1,05) = \Phi(2,64) + \Phi(1,05) = 0,4958 + 0,3541 = 0,8499 \end{aligned}$$

Решение:

Проводится $n=4000$ испытаний. Успех – изделие высшего сорта, $p=0,9$, $q=0,1$. По условию задачи, надо найти

$$\begin{aligned} P(k \leq 3580) &= P(-\infty < k \leq 3580) \approx \Phi\left(\frac{3580 - 4000 \cdot 0,9}{\sqrt{4000 \cdot 0,9 \cdot 0,1}}\right) - \Phi(-\infty) = \\ &= \Phi(-1,05) + \Phi(+\infty) = -\Phi(1,05) + 0,5 = -0,3541 + 0,5 = 0,1459 \end{aligned}$$

Решение:

Проводится $n=4000$ испытаний. Успех – изделие высшего сорта, $p=0,9$, $q=0,1$. По условию задачи, надо найти

$$\begin{aligned} P(k \geq 3650) &= P(3650 \leq k \leq +\infty) \approx \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{3650 - 4000 \cdot 0,9}{\sqrt{4000 \cdot 0,9 \cdot 0,1}}\right) = \\ &= 0.5 - \Phi(2.64) = 0.5 - 0.4958 = 0.0042 \end{aligned}$$

Проводится $n=4000$ испытаний. Успех – изделие высшего сорта, $p=0,9$, $q=0,1$. По условию задачи, надо найти

В Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Число изделий n			4000				
2	Успех - изделие высшего сорта							
3	Вероятность успеха p			0,9				
4	Вероятность неудачи q			0,1				
5								
6	Математическое ожидание $m=np$					3600		
7	Среднеквадратичное отклонение $s=\sqrt{npq}$					18,97367		
8								
9	Вероятность, что число изделий высшего сорта от 3580 до 3650							0,84987573
10	Вероятность, что число изделий высшего сорта не меньше 3650							0,004203997
11	Вероятность, что число изделий высшего сорта не больше 3580							0,145920273
12								

=НОРМРАСП(3650;3600;18,97;1)-НОРМРАСП(3580;3600;18,97;1)

ПРИМЕР.

В институте обучается 1000 студентов. В столовой имеется 105 посадочных мест. Каждый студент отправляется в столовую на большой перемене с вероятностью 0,1.

Какова вероятность того, что в обычный учебный день:

а) столовая будет заполнена не более чем на две трети;

б) посадочных мест на всех не хватит.

в) сколько мест должно быть в столовой, чтобы с вероятностью 0.95 посадочных мест на всех пришедших хватило?

Решение:

Проводится $n=1000$ испытаний. Успех – поход в столовую $p=0,1$, $q=0,9$. По условию задачи, надо найти

$$\begin{aligned} P(0 \leq k \leq 70) &\approx \Phi\left(\frac{70 - 1000 \cdot 0,1}{\sqrt{1000 \cdot 0,1 \cdot 0,9}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 1000 \cdot 0,1}{\sqrt{1000 \cdot 0,1 \cdot 0,9}}\right) = \\ &= \Phi(-3,16) - \Phi(-10,54) = -\Phi(3,16) + \Phi(10,54) = -0,4992 + 0,5 = 0,008 \end{aligned}$$

ПРИМЕР.

***В институте обучается 1000 студентов.
В столовой имеется 105 посадочных мест.
Каждый студент отправляется в столовую
на большой перемене с вероятностью 0,1.***

***Какова вероятность того, что в обычный
учебный день:***

- а) посадочных мест на всех хватит.***
- б) сколько мест должно быть в столовой,
чтобы с вероятностью 0.95 посадочных мест
на всех пришедших хватило?***

Решение:

Проводится $n=1000$ испытаний. Успех – поход в столовую $p=0,1$, $q=0,9$. По условию задачи, надо найти

$$\begin{aligned} P(0 \leq k \leq 105) &\approx \Phi\left(\frac{105 - 1000 \cdot 0,1}{\sqrt{1000 \cdot 0,1 \cdot 0,9}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 1000 \cdot 0,1}{\sqrt{1000 \cdot 0,1 \cdot 0,9}}\right) = \\ &= \Phi(0,527) - \Phi(-10,54) = 0,2 + \Phi(10,54) = 0,2 + 0,5 = 0,7 \end{aligned}$$

Решение в Excel

Число мест в столовой	105		
Число студентов	1000		
Успех - поход в столовую			
Вероятность успеха p	0,1		
Вероятность неудачи q	0,9		
Математическое ожидание $m=np$		100	
Среднеквадратичное отклонение $s=\sqrt{npq}$		9,486833	
Вероятность, что число студентов, отправившихся в столовую не больше 105			0,700919

=НОРМРАСП(105;100;9.487;1)

ПРИМЕР.

В институте обучается 1000 студентов. В столовой имеется 105 посадочных мест. Каждый студент отправляется в столовую на большой перемене с вероятностью 0,1.

Какова вероятность того, что в обычный учебный день:

б) сколько мест должно быть в столовой, чтобы с вероятностью 0.95 посадочных мест на всех пришедших хватило?

Решение:

Пусть в столовой M мест. По условию задачи,

$$P(k \leq M) = 0.95$$

$$\begin{aligned} P(k \leq M) &= P(0 \leq k \leq M) \approx \Phi\left(\frac{M - 1000 \cdot 0,1}{\sqrt{1000 \cdot 0,1 \cdot 0,9}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 1000 \cdot 0,1}{\sqrt{1000 \cdot 0,1 \cdot 0,9}}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{M - 1000 \cdot 0,1}{\sqrt{1000 \cdot 0,1 \cdot 0,9}}\right) - \Phi(-10,54) = \Phi\left(\frac{M - 1000 \cdot 0,1}{\sqrt{1000 \cdot 0,1 \cdot 0,9}}\right) + \Phi(10,54) = \\ &= \Phi\left(\frac{M - 1000 \cdot 0,1}{\sqrt{1000 \cdot 0,1 \cdot 0,9}}\right) + 0.5 = 0.95 \end{aligned}$$

$$\Phi\left(\frac{M - 1000 \cdot 0,1}{\sqrt{1000 \cdot 0,1 \cdot 0,9}}\right) + 0,5 = 0,95$$

$$\Phi\left(\frac{M - 1000 \cdot 0,1}{\sqrt{1000 \cdot 0,1 \cdot 0,9}}\right) = 0,45$$

$$\frac{M - 1000 \cdot 0,1}{\sqrt{1000 \cdot 0,1 \cdot 0,9}} = 1,65$$

Находим по таблице
Лапласа

$$\frac{M - 100}{9,487} = 1,65$$

$$M = 1,65 \cdot 9,487 + 100 = 115,66$$

116 мест

Решение в Excel

Пусть в столовой M мест. По условию задачи,

$$P(k \leq M) = 0.95$$

Математическое ожидание $m=np$	100
Среднеквадратичное отклонение $s=\sqrt{npq}$	9,486833

Найдем M с помощью функции `=НОРМОБР(0,95;100;9,487)`

27	Число мест в столовой, необходимых чтобы с вероятностью	
28	0,95 все пришедшие могли пообедать	115,6045
29		116 мест
30		

