

# Из истории комбинаторики

С комбинаторными задачами люди столкнулись в глубокой древности. В Древнем Китае увлекались составлением магических квадратов. В Древней Греции занимались теорией фигурных чисел.

Комбинаторные задачи возникли и в связи с такими играми, как шашки, шахматы, домино, карты, кости и т.д. Комбинаторика становится наукой лишь в 18 в. – в период, когда возникла теория вероятности.



**Комбинаторика** — это раздел математики, в котором изучаются различные соединения (комбинации) элементов конечных множеств.

Выбором объектов и расположением их в том или ином порядке приходится заниматься чуть ли не во всех областях человеческой деятельности, например конструктору, разрабатывающему новую модель механизма, ученому-агроному, планирующему распределение с/х культур на нескольких полях, химику, изучающему строение органических молекул, имеющих данный атомный состав.



# Элементарные комбинаторные конфигурации:

- сочетания,
- размещения,
- перестановки.

Для подсчета числа этих конфигураций используются правила суммы и произведения

## Правило сложения

Если некоторый объект  $a$  можно выбрать  $n_1$  способами, а объект  $b$  можно выбрать  $n_2$  способами, причем первые и вторые способы не пересекаются, то любой из объектов ( $a$  или  $b$ ) можно выбрать  $n_1 + n_2$  способами.



**Пример 1.** Имеется 8 шаров: в 1 ящик положили 5 шт., а во 2 ящик - 3 шт. Сколькими способами можно вытащить 1 шар?

**Решение:**

из 1 ящика шар можно вытащить 5-ю способами, а из второго 3-мя. Значит, всего  $5+3=8$  способов

## Правило умножения

Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент  $a$ ) можно выбрать  $n_1$  способами, а второй объект (элемент  $b$ ) -  $n_2$  способами, то оба объекта ( $a$  и  $b$ ) можно выбрать  $n_1 \cdot n_2$  способами.



**Пример 2.** На входной двери дома установлен домофон, на котором нанесены цифры 0,1,2,...9. Каждая квартира получает кодовый замок из двух цифр типа 0-2, 3-7 и т.п. Хватит ли кодовых замков для всех квартир, если в доме 96 квартир? (код 0-0 не существует)

**Решение:**

Выбор 1-й цифры – 10 вариантов, 2-й – 10 вариантов.

Всего  $10 \times 10 - 1 = 99$  вариантов

**Ответ: хватит.**

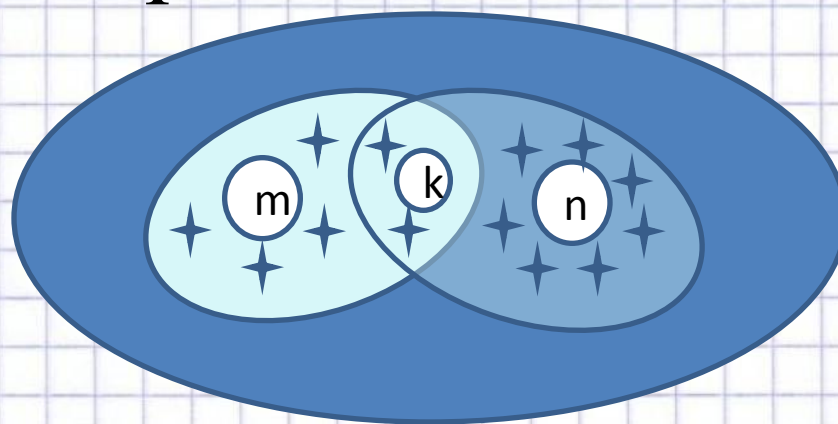




## Правило включения-исключения

Пусть у множества  $A$  и  $B$  общая часть насчитывает  $k$  элементов

Тогда в объединении множеств  $A$  и  $B$  число элементов равно  $m+n-k$ , т. е.



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

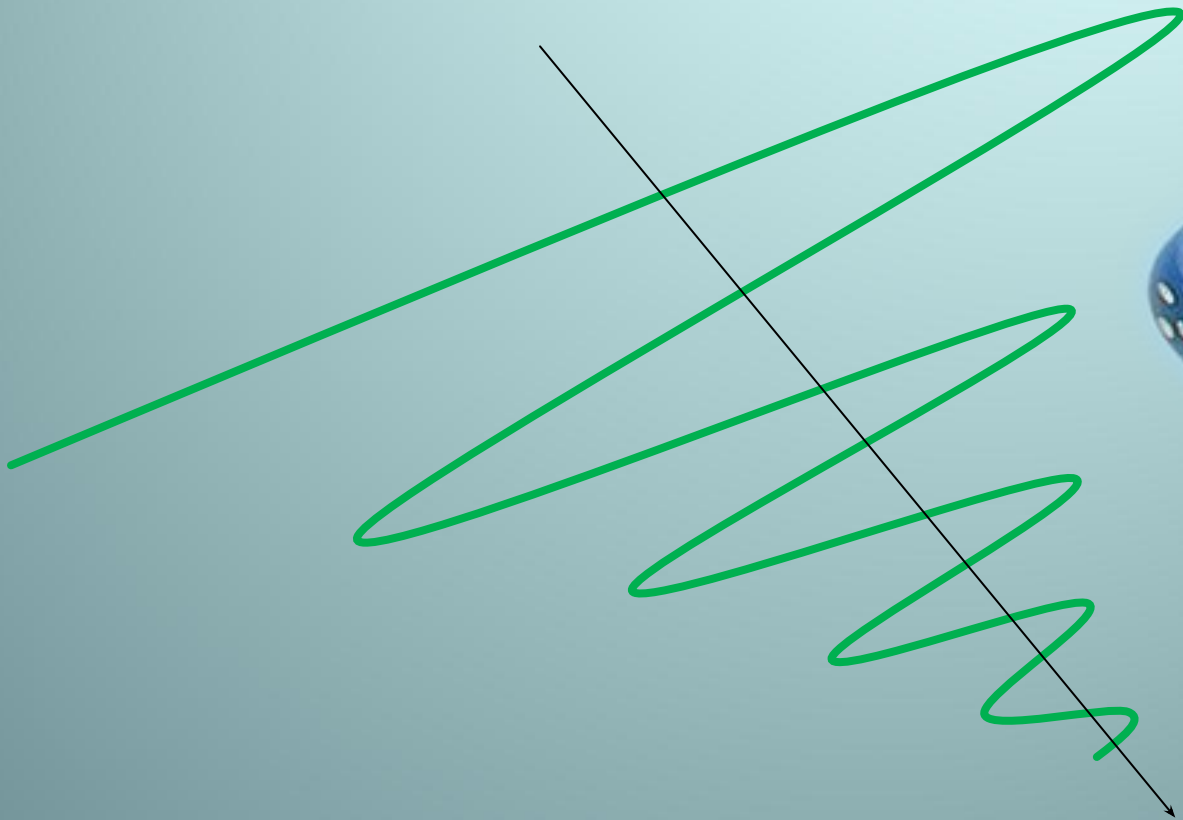
**Пример3.** В группе каждый студент занимается в спортивной секции. При этом 20 студентов занимаются волейболом, 12 – баскетболом, а 7 студентов посещают обе секции. Сколько студентов в группе?

**Решение:**

если сложить количество студентов, посещающих обе секции, мы учтем всех студентов и тех которые посещают обе секции, применив правило включения-исключения получим  $20+12-7=25$ .

**Ответ: в группе 25 студентов**





Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент  $a$ ) можно выбрать  $n_1$  способами, а второй объект (элемент  $b$ ) -  $n_2$  способами, то оба объекта ( $a$  и  $b$ ) можно выбрать  $n_1 \cdot n_2$  способами.

## Обозначение:

Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент  $a$ ) можно выбрать  $n_1$  способами, а второй объект (элемент  $b$ ) -  $n_2$  способами, то оба объекта ( $a$  и  $b$ ) можно выбрать  $n_1 \cdot n_2$  способами.

— читают «А из эн по к»



## **Задача 1**

Сколько различных двузначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4 при условии, что в каждой записи нет одинаковых цифр?

12, 13, 14,  
21, 23, 24,  
31, 32, 34,  
41, 42, 43.

Из задачи видно, что любые два соединения отличаются либо составом элементов (12 и 24), либо порядком их расположения (12 и 21). Такие соединения называют **размещениями**.

Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент  $a$ ) можно выбрать  $n_1$  способами, а второй объект (элемент  $b$ ) -  $n_2$  способами, то оба объекта ( $a$  и  $b$ ) можно выбрать  $n_1 \cdot n_2$  способами.

Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент  $a$ ) можно выбрать  $n_1$  способами, а второй объект (элемент  $b$ ) -  $n_2$  способами, то оба объекта ( $a$  и  $b$ )

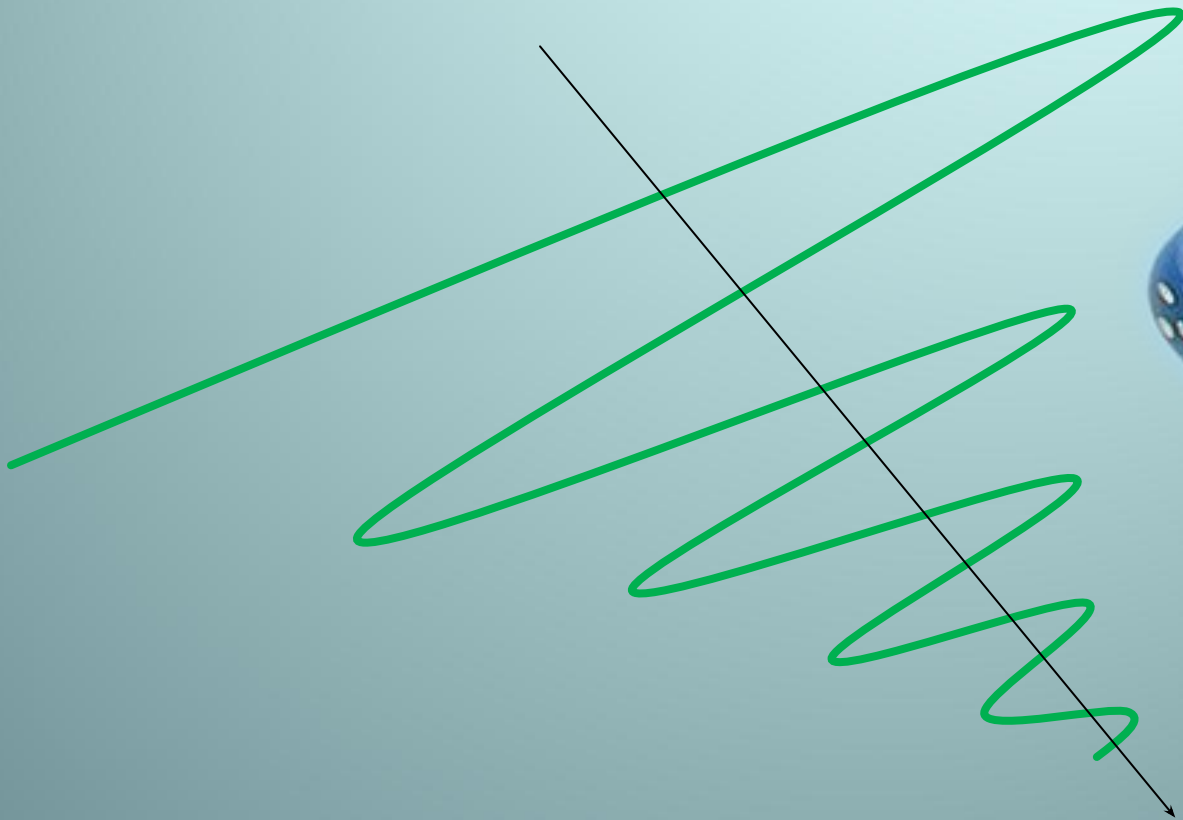
Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент  $a$ ) можно выбрать  $n_1$  способами, а второй объект (элемент  $b$ ) -  $n_2$  способами, то оба объекта ( $a$  и  $b$ ) можно выбрать  $n_1 \cdot n_2$  способами.

Сколькими способами можно обозначить данный вектор, используя буквы A, B, C, D?

Действительно, это наборы  
(AB),(BA),(AC),(CA),(AD),(DA),(BC),(CB),(BD),(DB),(CD),(DC).

Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент  $a$ ) можно выбрать  $n_1$  способами, а второй объект (элемент  $b$ ) -  $n_2$  способами, то оба объекта ( $a$  и  $b$ ) можно выбрать  $n_1 \cdot n_2$  способами.





**Перестановками** из  $n$  элементов называются соединения (комбинации), которые состоят из одних и тех же  $n$  элементов и отличаются одно от другого только порядком их расположения.

Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент  $a$ ) можно выбрать  $n_1$  способами, а второй объект (элемент  $b$ ) -  $n_2$  способами, то оба объекта ( $a$  и  $b$ ) можно выбрать  $n_1 \cdot n_2$  способами.

**Задача 1:** Сколькими способами можно поставить рядом на полке 4 различные книги?

Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент  $a$ ) можно выбрать  $n_1$  способами, а второй объект (элемент  $b$ ) -  $n_2$  способами, то оба объекта ( $a$  и  $b$ )



**Задача 2.** Даны цифр: 1,2,3,4,5,6,7. Сколько различных семизначных чисел можно составить из этих цифр? Каждое число является перестановкой из 7 элементов.

Примеры: 1234567, 2354167, 7546321.

**Перестановка-упорядоченное множество.**

Число перестановок из  $n$  элементов вычисляют по формуле .

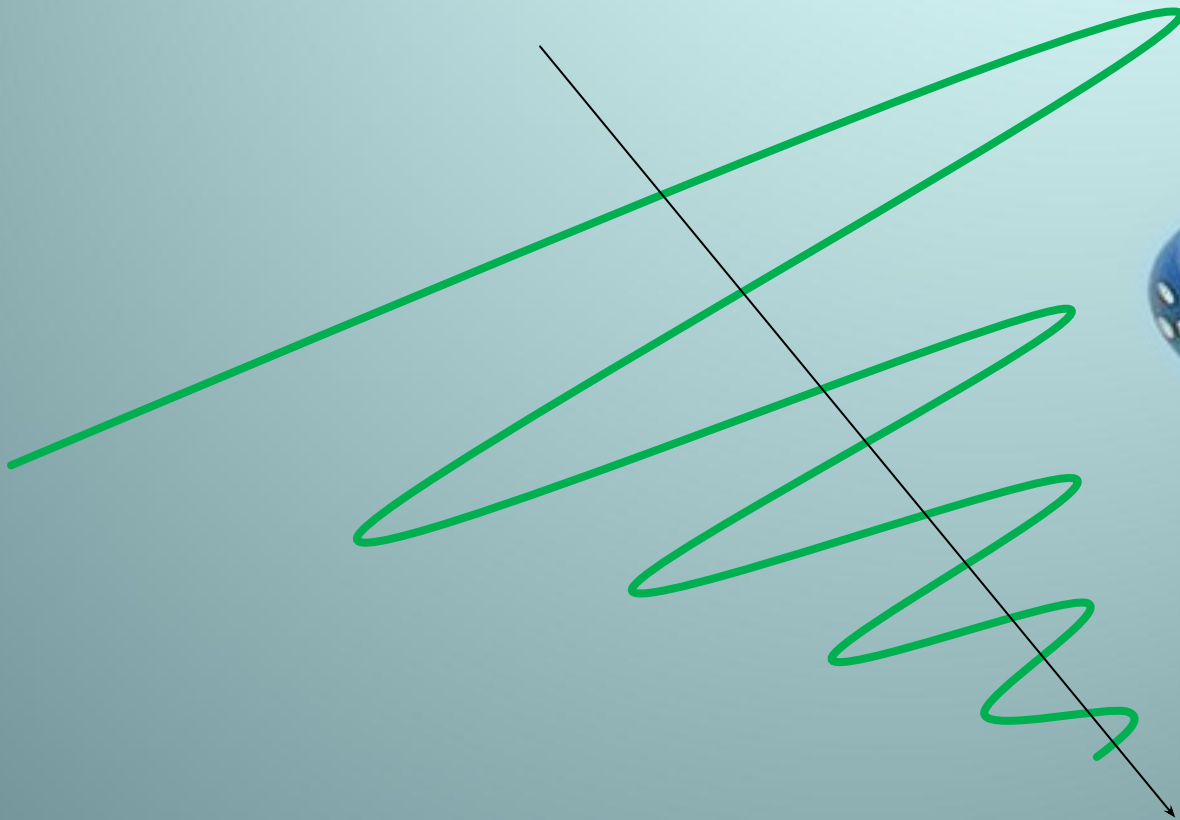
Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент  $a$ ) можно выбрать  $n_1$  способами, а второй объект (элемент  $b$ ) -  $n_2$  способами, то оба объекта ( $a$  и  $b$ ) можно выбрать  $n_1 \cdot n_2$  способами.

По условию  $n=7$

Так из 7 цифр можно

Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент  $a$ ) можно выбрать  $n_1$  способами, а второй объект (элемент  $b$ ) -  $n_2$  способами, то оба объекта ( $a$  и  $b$ )

**различных чисел.**





Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент  $a$ ) можно выбрать  $n_1$  способами, а второй объект (элемент  $b$ ) -  $n_2$  способами, то оба объекта ( $a$  и  $b$ ) можно выбрать  $n_1 \cdot n_2$  способами.

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

**Пример 1.** Необходимо выбрать в подарок 4 из имеющихся 1- различных книг. Сколькими способами это можно сделать?

### Решение

Нам из 10 книг нужно выбрать 4, причем порядок выбора не имеет значения. Таким образом, нужно найти число сочетаний из 10 элементов по 4:

Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент  $a$ ) можно выбрать  $n_1$  способами, а второй объект (элемент  $b$ ) -  $n_2$  способами, то оба объекта ( $a$  и  $b$ ) можно выбрать  $n_1 \cdot n_2$  способами.

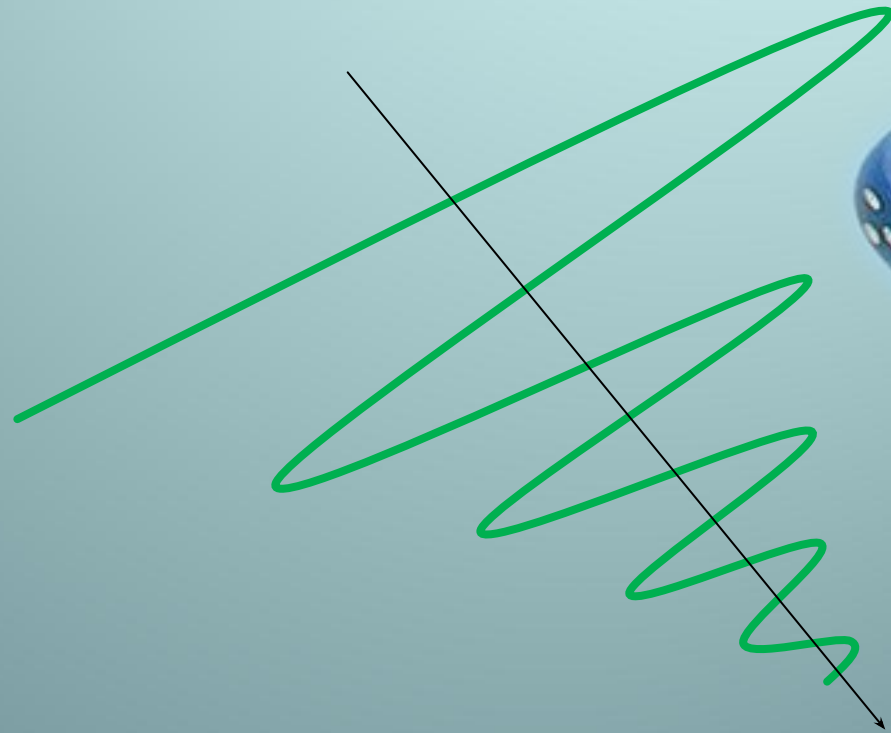


Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент  $a$ ) можно выбрать  $n_1$  способами, а второй объект (элемент  $b$ ) -  $n_2$  способами, то оба объекта ( $a$  и  $b$ ) можно выбрать  $n_1 \cdot n_2$  способами.

## **Различие между перестановками, размещениями, сочетаниями**

- **В случае перестановок берутся все элементы и изменяется только их местоположение.**
- **В случае размещений берётся только часть элементов и важно расположение элементов друг относительно друга.**
- **В случае сочетаний берётся только часть элементов и не имеет значения расположение элементов друг относительно друга.**





## Перестановки с повторениями.

Пусть в множестве из  $n$  элементов есть  $k$  различных типов элементов, при этом 1-й тип элементов повторяется  $n_1$  раз, 2-й –  $n_2$  раз, ...  $k$ -й –  $n_k$  раз, причем  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ . Тогда перестановки элементов данного множества представляют собой *перестановки с повторениями*. Число перестановок с повторениями (иногда говорят о числе разбиений множества) из  $n$  элементов обозначается символом  $\bar{P}_n(n_1, n_2, \dots, n_k)$  и вычисляется по формуле:

$$\bar{P}_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Сколько разных буквосочетаний можно сделать из букв слова «Миссисипи»?

Решение

Здесь 1 буква «м», 4 буквы «и», 3 буквы «с» и 1 буква «п», всего 9 букв. Следовательно, число перестановок с повторениями равно

$$\bar{P}_9(1, 4, 3, 1) = \frac{9!}{1! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 1!} = 2520.$$



**Задача.** Сколькими способами можно расставить белые фигуры (короля, ферзя, 2 ладьи, 2 слонов и 2 коней) на первой линии шахматной доски?

Всего мест на первой линии 8, фигур расставляется также 8, из них 2 одинаковых встречаются три раза. По формуле числа перестановок с повторениями получаем:

$$\overline{P}_8(1,1,2,2,2) = \frac{8!}{1!1!2!2!2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2^3} = 5040.$$

**Ответ:** 5040 способов.

## Размещения с повторениями.

Если при упорядоченной выборке  $k$  элементов из  $n$  элементов возвращаются обратно, то полученные выборки представляют собой размещения с повторениями. Число всех размещений с повторениями из  $n$  элементов по  $k$  обозначаются символом  $\overline{A}_n^k$  и вычисляются по формуле

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

*Задача. Шифр сейфа состоит только из 6 цифр, которые должны набираться последовательно и могут повторяться. Чему в этом случае равно общее число всех возможных комбинаций шифра?*

Первую цифру можно выбрать 10 способами, вторую – также 10 (цифры могут повторяться), и так далее для всех шести цифр шифра, то есть

$$N = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6.$$

В терминах комбинаторики это размещения с повторениями из 10 объектов по 6:

$$N = \overline{A}_{10}^6 = 10^6.$$

**Ответ:**  $10^6$ .



Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент  $a$ ) можно выбрать  $n_1$  способами, а второй объект (элемент  $b$ ) -  $n_2$  способами, то оба объекта ( $a$  и  $b$ ) можно выбрать  $n_1 \cdot n_2$  способами.

Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент  $a$ ) можно выбрать  $n_1$  способами, а второй объект (элемент  $b$ ) -  $n_2$  способами, то оба объекта ( $a$  и  $b$ ) можно выбрать  $n_1 \cdot n_2$  способами.

В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

Решение

Т.к. среди 7 пирожных могут быть пирожные одного сорта, то число способов, которыми можно купить 7 пирожных, определяется числом сочетаний с повторениями из 7 по 4.

$$\bar{C}_4^7 = C_{4+7-1}^7 = \frac{10!}{7!3!} = 120$$

**Вопросы ?**