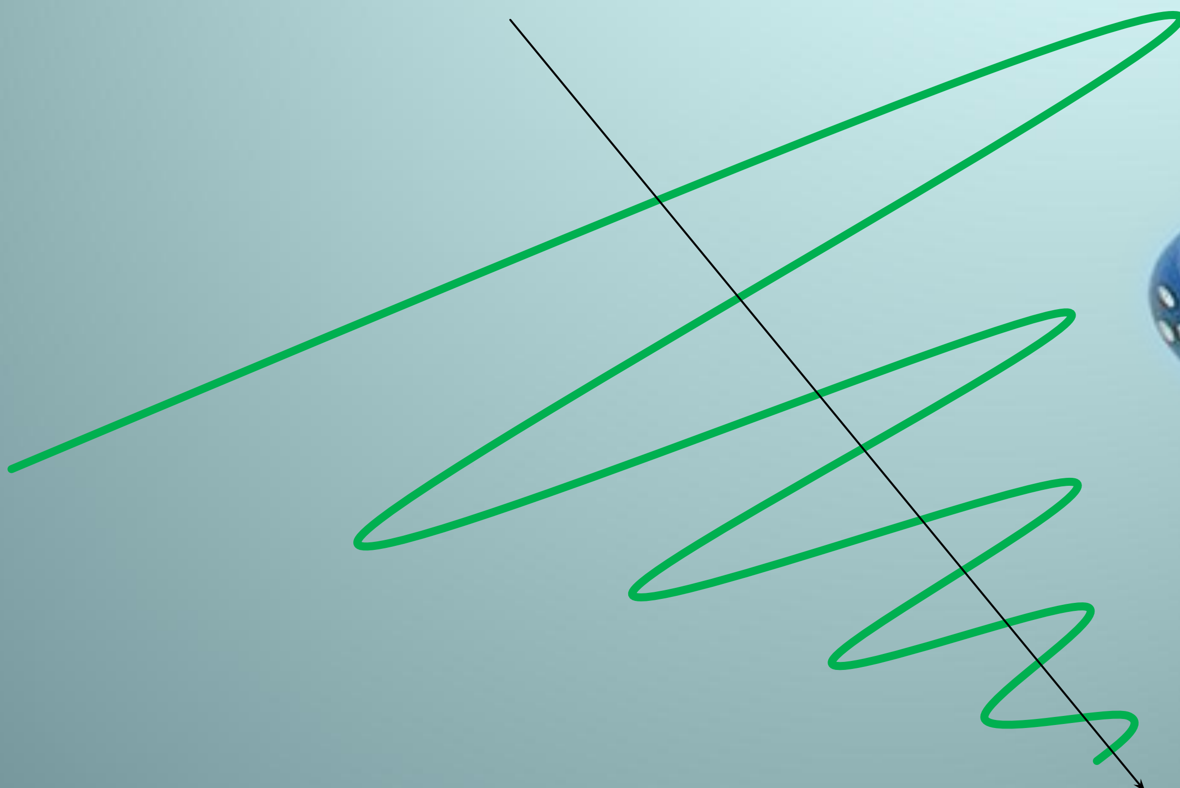


Из истории комбинаторики

С комбинаторными задачами люди столкнулись в глубокой древности. В Древнем Китае увлекались составлением магических квадратов. В Древней Греции занимались теорией фигурных чисел.

Комбинаторные задачи возникли и в связи с такими играми, как шашки, шахматы, домино, карты, кости и т.д. Комбинаторика становится наукой лишь в 18 в. – в период, когда возникла теория вероятности.

Комбинаторика – это раздел математики, в котором изучаются различные соединения (комбинации) элементов конечных множеств.

Выбором объектов и расположением их в том или ином порядке приходится заниматься чуть ли не во всех областях человеческой деятельности, например конструктору, разрабатывающему новую модель механизма, ученому-агроному, планирующему распределение с/х культур на нескольких полях, химику, изучающему строение органических молекул, имеющих данный атомный состав.

Элементарные комбинаторные конфигурации:

- сочетания,
- размещения,
- перестановки.

Для подсчета числа этих конфигураций используются **правила суммы и произведения**

Правило сложения

Если некоторый объект a можно выбрать n_1 способами, а объект $в$ можно выбрать n_2 способами, причем первые и вторые способы не пересекаются, то любой из объектов (a или $в$) можно выбрать $n_1 + n_2$ способами.

Пример1. Имеется 8 шаров: в 1 ящик положили 5 шт., а во 2 ящик - 3 шт. Сколькими способами можно вытащить 1 шар?

Решение:

из 1 ящика шар можно вытащить 5-ю способами, а из второго 3-мя. Значит, всего 5+3=8 способов

Правило умножения

Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент a) можно выбрать n_1 способами, а второй объект (элемент b) - n_2 способами, то оба объекта (a и b) можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

Пример 2. На входной двери дома установлен домофон, на котором нанесены цифры 0,1,2,…9. Каждая квартира получает кодовый замок из двух цифр типа 0-2, 3-7 и т.п. Хватит ли кодовых замков для всех квартир, если в доме 96 квартир? (код 0-0 не существует)

Решение:

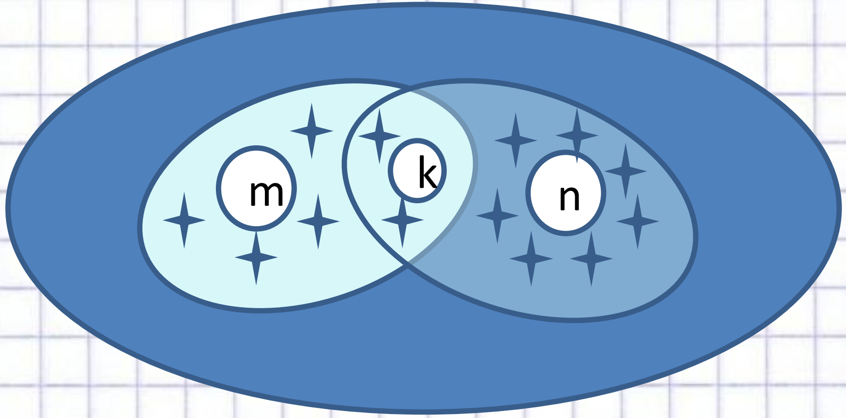
Выбор 1-й цифры – 10 вариантов, 2-й –10 вариантов.

Всего 10х10 – 1 = 99 вариантов

Ответ: хватит.

Правило включения-исключения

Пусть у множества A и B общая часть насчитывает k элементов Тогда в объединении множеств A и B число элементов равно $m+n-k$, т. е.



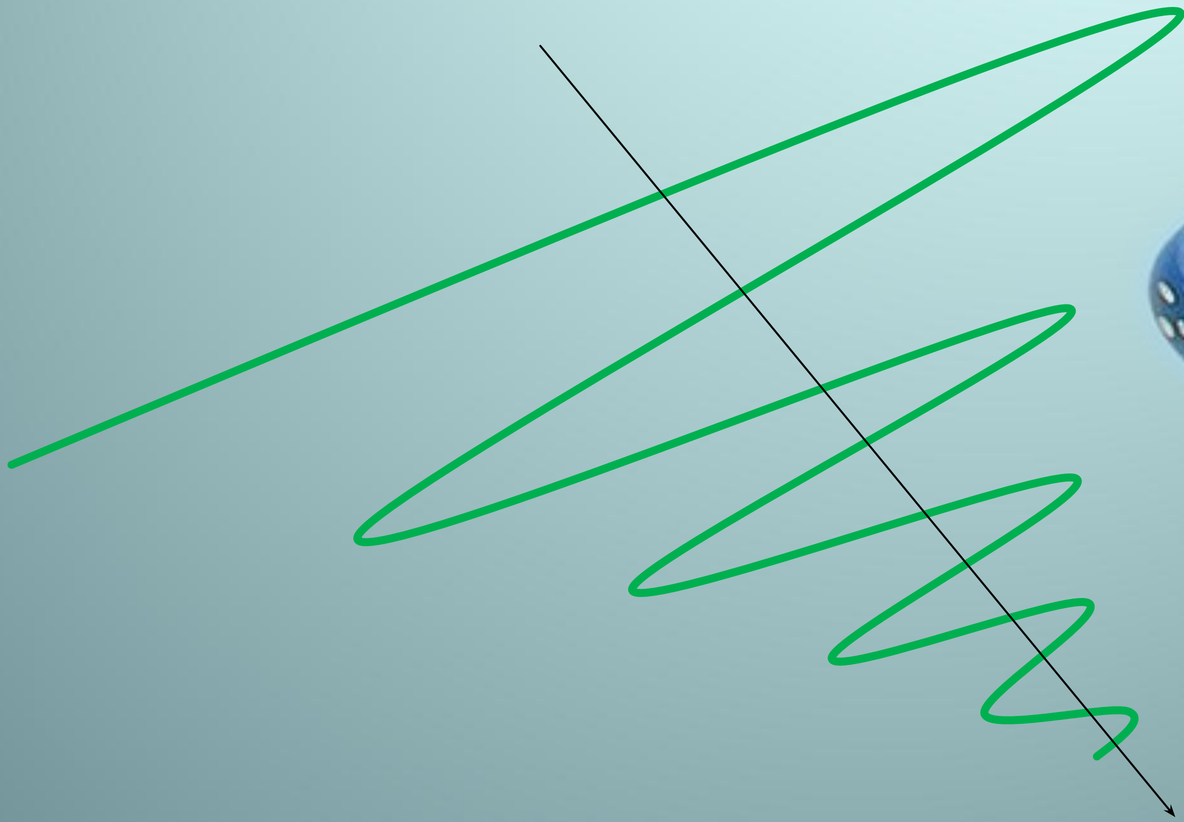
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Пример3. В группе каждый студент занимается в спортивной секции. При этом 20 студентов занимаются волейболом, 12 – баскетболом, а 7 студентов посещают обе секции. Сколько студентов в группе?

Решение:

если сложить количество студентов, посещающих обе секции, мы учтем всех студентов и тех которые посещают обе секции, применив правило включения-исключения получим 20+12-7=25.

Ответ: в группе 25 студентов



Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент a) можно выбрать n_1 способами, а второй объект (элемент b) - n_2 способами, то оба объекта (a и b) можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

Обозначение:

Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент a) можно выбрать n_1 способами, а второй объект (элемент b) - n_2 способами, то оба объекта (a и b) можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

—читают «А из эн по k»

Задача 1

Сколько различных двузначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4 при условии, что в каждой записи нет одинаковых цифр?

12, 13, 14,
21, 23, 24,
31, 32, 34,
41, 42, 43.

Из задачи видно, что любые два соединения отличаются либо составом элементов (12 и 24), либо порядком их расположения (12 и 21). Такие соединения называют размещениями.

Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент a) можно выбрать n_1 способами, а второй объект (элемент b) – n_2 способами, то оба объекта (a и b) можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

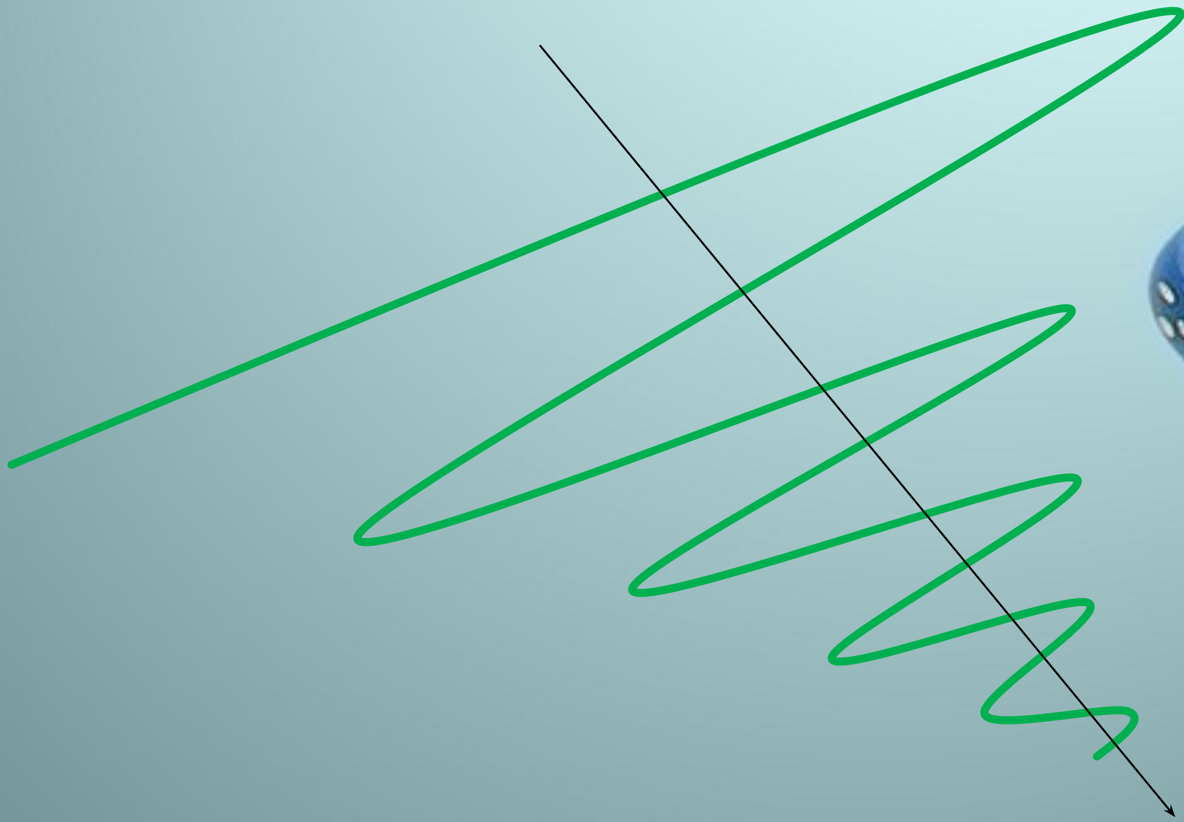
Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент a) можно выбрать n_1 способами, а второй объект (элемент b) – n_2 способами, то оба объекта (a и b)

Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент a) можно выбрать n_1 способами, а второй объект (элемент b) – n_2 способами, то оба объекта (a и b) можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

Сколькими способами можно обозначить данный вектор, используя буквы A, B, C, D?

Действительно, это наборы (AB),(BA),(AC),(CA),(AD),(DA),(BC),(CB),(BD),(DB),(CD),(DC).

Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент a) можно выбрать n_1 способами, а второй объект (элемент b) – n_2 способами, то оба объекта (a и b) можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.



Перестановками из n элементов называются соединения (комбинации), которые состоят из одних и тех же n элементов и отличаются одно от другого только порядком их расположения.

Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент a) можно выбрать n_1 способами, а второй объект (элемент b) – n_2 способами, то оба объекта (a и b) можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

Задача 1: **Сколькими способами можно поставить рядом на полке 4 различные книги?**

Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент a) можно выбрать n_1 способами, а второй объект (элемент b) – n_2 способами, то оба объекта (a и b,

Задача 2. Даны цифр: 1,2,3,4,5,6,7. Сколько различных семизначных чисел можно составить из этих цифр? Каждое число является перестановкой из 7 элементов.

Примеры: 1234567, 2354167, 7546321.

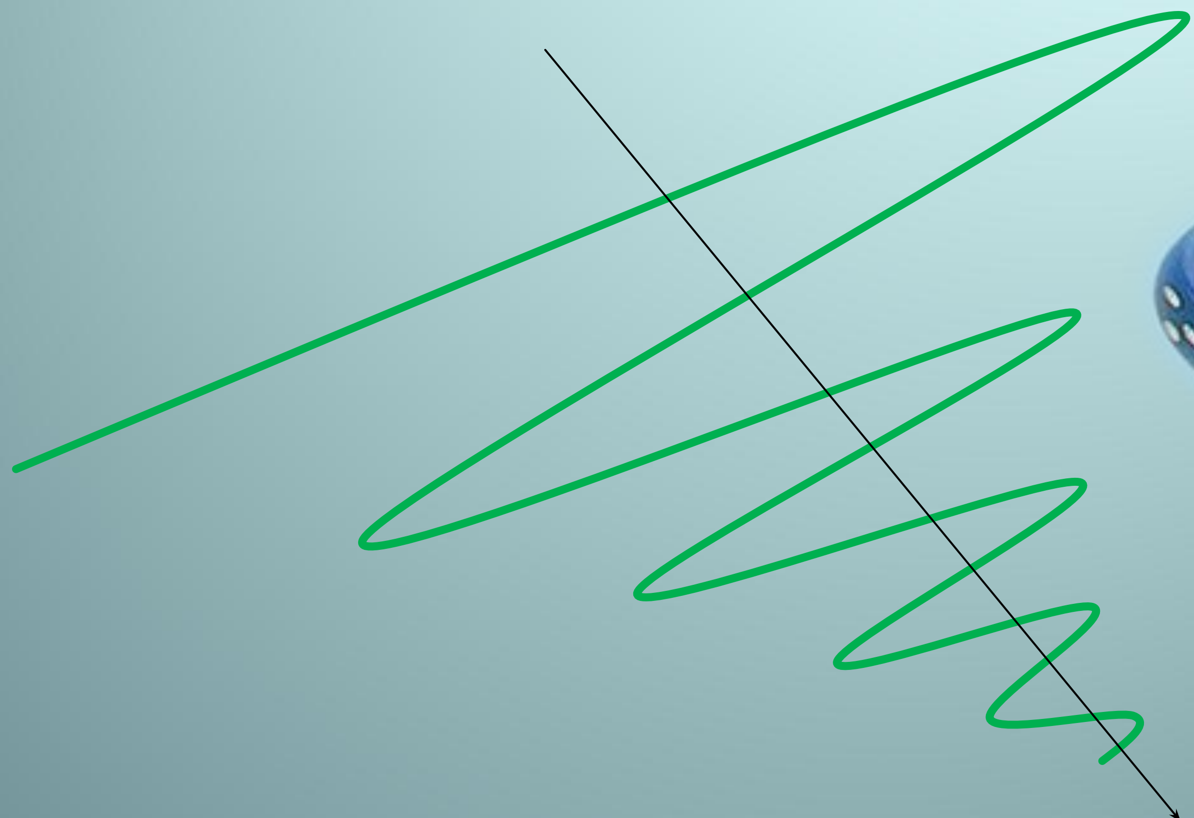
Перестановка-упорядоченное множество.

Число перестановок из ***n*** элементов вычисляют по формуле . Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент a) можно выбрать n_1 способами, а второй объект (элемент b) - n_2 способами, то оба объекта (a и b) можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

По условию ***n=7***

Так из 7 цифр можно

Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент a) можно выбрать n_1 способами, а второй объект (элемент b) - n_2 способами, то оба объекта (a и b) различных чисел.



Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент a) можно выбрать n_1 способами, а второй объект (элемент b) - n_2 способами, то оба объекта (a и b) можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Пример 1. Необходимо выбрать в подарок 4 из имеющихся 1- различных книг. Сколькими способами это можно сделать?

Решение

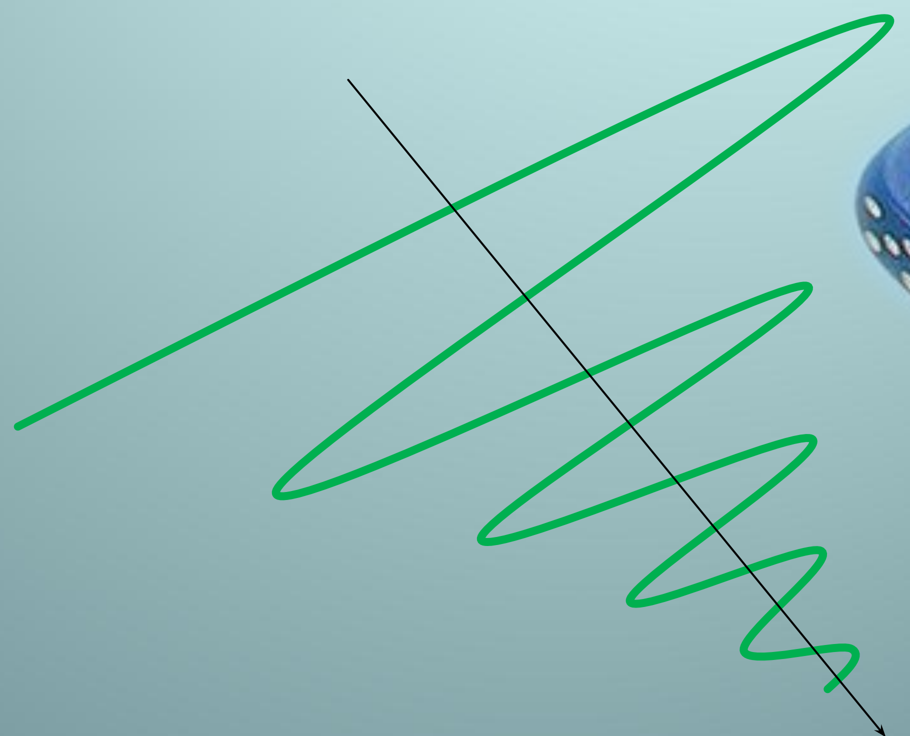
Нам из 10 книг нужно выбрать 4, причем порядок выбора не имеет значения. Таким образом, нужно найти число сочетаний из 10 элементов по 4:

Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент a) можно выбрать n_1 способами, а второй объект (элемент b) – n_2 способами, то оба объекта (a и b) можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент a) можно выбрать n_1 способами, а второй объект (элемент b) - n_2 способами, то оба объекта (a и b) можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

Различие между перестановками, размещениями, сочетаниями

- **В случае перестановок берутся <u>все элементы и изменяется только их местоположение.</u>**
- **В случае размещений берётся <u>только часть элементов и важно расположение элементов друг относительно друга</u>.**
- **В случае сочетаний берётся <u>только часть элементов и не имеет значения расположение элементов друг относительно друга.</u>**



Перестановки с повторениями.

Пусть в множестве из n элементов есть k различных типов элементов, при этом 1-й тип элементов повторяется n_1 раз, 2-й – n_2 раз, …k-й - n_k раз, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Тогда перестановки элементов данного множества представляют собой *перестановки с повторениями*. Число перестановок с повторениями (иногда говорят о числе разбиений множества) из n элементов обозначается символом $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ и вычисляется по формуле:

$$\overline{P}_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

Сколько разных буквосочетаний можно сделать из букв слова «Миссисипи»?

Решение

Здесь 1 буква «м», 4 буквы «и», 3 буквы «с» и 1 буква «п», всего 9 букв. Следовательно, число перестановок с повторениями равно

$$\overline{P}_9(1,4,3,1) = \frac{9!}{1!\cdot 4!\cdot 3!\cdot 1!} = 2520.$$

Задача. *Сколькими способами можно расставить белые фигуры (короля, ферзя, 2 ладьи, 2 слонов и 2 коней) на первой линии шахматной доски?*

Всего мест на первой линии 8, фигур расставляется также 8, из них 2 одинаковых встречаются три раза. По формуле числа перестановок с повторениями получаем:

$$\overline{P_8}(1,1,2,2,2)=\frac{8!}{1!1!2!2!2!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{2^3}=5040.$$

Ответ: 5040 способов.

Размещения с повторениями.

Если при упорядоченной выборке k элементов из n элементов возвращаются обратно, то полученные выборки представляют собой размещения с повторениями. Число всех размещений с повторениями из n элементов по k обозначаются символом $\overline{A}_n^k$ и вычисляются по формуле

$$\boxed{\overline{A}_n^k = n^k}$$

!

Задача. *Шифр сейфа состоит только из 6 цифр, которые должны набираться последовательно и могут повторяться. Чему в этом случае равно общее число всех возможных комбинаций шифра?*

Первую цифру можно выбрать 10 способами, вторую – также 10 (цифры могут повторяться), и так далее для всех шести цифр шифра, то есть

$N = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6$.

В терминах комбинаторики это размещения с повторениями из 10 объектов по 6:

$N = \overline{A}_{10}^6 = 10^6$.

Ответ: 10^6.

~~Если из некоторого~~ конечного множества первый объект (элемент a) можно выбрать n_1 способами, а второй объект (элемент b) - n_2 способами, то оба объекта (a и b) можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент a) можно выбрать n_1 способами, а второй объект (элемент b) - n_2 способами, то оба объекта (a и b) можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

$\overline{k}$ k

n n+k-1

В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

Решение

Т.к. среди 7 пирожных могут быть пирожные одного сорта, то число способов, которыми можно купить 7 пирожных, определяется числом сочетаний с повторениями из 7 по 4.

$$\overline{C}_4^7 = C_{4+7-1}^7 \frac{10!}{7!3!} = 120$$

Вопросы ?