Векторное произведение векторов

Выполнил студент:

Группы 3и1-17
Леонтьев Артём

Что называется векторным произведением?

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим требованиям:

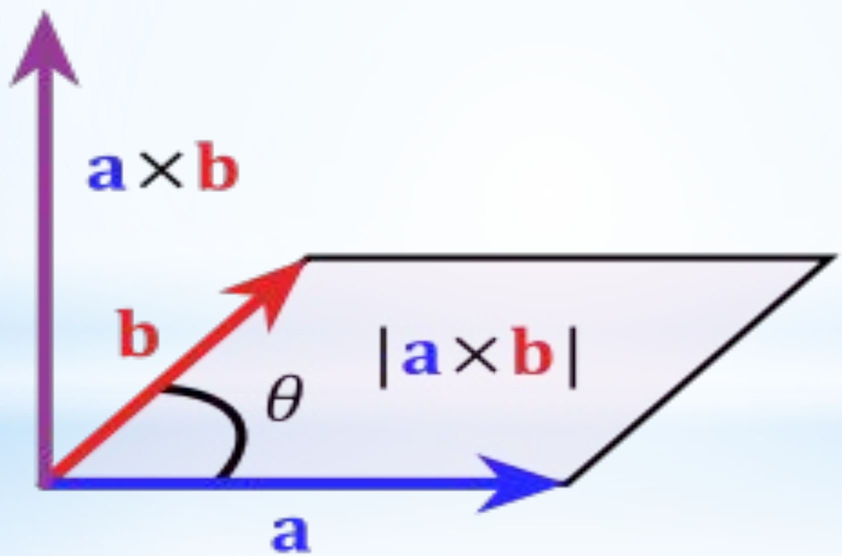
•длина вектора $\vec{c}$ равна произведению длин векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус угла φ между ними

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin\varphi$$

1. Вектор $\vec{c}$ ортогонален каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$
2. Вектор $\vec{c}$ направлен так, что тройка векторов $\vec{a}\,\overrightarrow{b}\,\vec{c}$ является правой.

Обозначение: $\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}] = [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}$

Геометрически векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ есть ориентированная **площадь** параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}$,представленная псевдовектором, ортогональным этому параллелограмму.



Свойства векторного произведения:

1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак (антикоммутативность), т. е $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
2. Векторное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя, то есть $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$
3. Векторное произведение обладает распределительным свойством: $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

Векторное произведение вычисляется по формуле:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Пример:

Найти векторное произведение векторов, заданных своими координатами:
a (2;1;-3) и b (0;-1;1)

$$\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -3\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\cdot 1\cdot 1+\vec{j}\cdot(-3)\cdot 0+\vec{k}\cdot 2\cdot(-1)-\vec{k}\cdot 1\cdot 0-\vec{j}\cdot 2\cdot 1-\vec{i}\cdot(-3)\cdot(-1)=$$

$$=-2\cdot\vec{i}-2\cdot\vec{j}-2\cdot\vec{k}$$

С помощью векторов можно найти S треугольника, но как?
Сейчас покажу

Есть формула для вычисления площади треугольника:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |AC| \cdot \sin(\angle A)$$

И, о чудо, видим произведение длин двух отрезков (что то же самое, что произведение длин двух векторов) на синус угла между ними. Что равно длине вектора-результата векторного произведения векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$

Пример:

Даны три точки: $A(-1;2;-1),\ B(0;4;1),\ C(4;3;-3)$ Найти площадь треугольника ABC.

Найдем координаты этих векторов:

$$\overline{AB}=\left(0-(-1);4-2;1-(-1)\right)=(1;2;2)$$
$$\overline{AC}=\left(4-(-1);3-2;-3-(-1)\right)=(5;1;-2)$$

И вычислим площадь:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|AC|\cdot\sin(\angle A)=\frac{1}{2}\left|[AB;AC]\right|=$$
$$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\ i\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}\ \right|=$$
$$=\frac{1}{2}\left|\ i(-4-2)-j(-2-10)+k(1-10)\ \right|=\frac{1}{2}\left|-6i+12j-9k\right|=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+12^2+(-9)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{36+144+81}=\frac{1}{2}\sqrt{261}$$

Площадь треугольника равна:

$$\frac{1}{2}\sqrt{261}$$

Так же можно найти площадь параллелограмма:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{z} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \overline{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \overline{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \overline{k} =$$

$$(y_1 z_2 - z_1 y_2)\overline{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\overline{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\overline{k}$$

$$S = |\overline{a} \times \overline{b}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах a=(1;-2;5) и b(0;-2;1).
Решение. Модуль векторного произведения двух векторов равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах.

По формуле находим:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \overline{i} - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \overline{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \overline{k} = 8\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$$

Так как: $|\overline{a} \times \overline{b}| = \sqrt{8^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{69}$

то искомая площадь: $S = \sqrt{69}$

Всё легко и просто, учитесь ребята!!!

*Некоторые положения векторного произведения

Установление коллинеарности векторов

Если $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$ (и наоборот), т. е.

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \bar{0} \iff \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \iff \bar{a} \parallel \bar{b}.$$

Нахождение площади параллелограмма и треугольника

Согласно определению векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $|\vec{a} \times \vec{b}|$ = $|\vec{a}|$ * $|\vec{b}|$ sing , т. е. S пар = $|\vec{a} \times \vec{b}|$. И, значит, DS =1/2$|\vec{a} \times \vec{b}|$

Определение момента силы относительно точки

Пусть в точке А приложена сила … и пусть О — некоторая точка пространства.(рис.20)

Из физики известно, что *моментом силы* F относительно точки О называется вектор М, который проходит через точку О и:

1) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки О, А, В;

2) численно равен произведению силы на плечо;

$$|\vec{M}| = |\vec{F}| \cdot ON = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin\varphi = |\vec{F}| \cdot |\overline{OA}| \sin(\widehat{\vec{F}, \overline{OA}});$$

3) образует правую тройку с векторами ОА и АВ.

Стало быть, $\vec{M} = \overline{OA} \times \vec{F}$

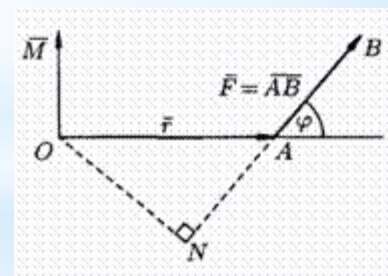


Рис. 20.

Нахождение линейной скорости вращения

Скорость v точки М твердого тела, вращающегося с угловой скоростью $\vec{w}$ вокруг неподвижной оси, определяется формулой Эйлера $v = \vec{w} \times \vec{r}$, где где $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ 0 — некоторая неподвижная точка оси.(рис.21)

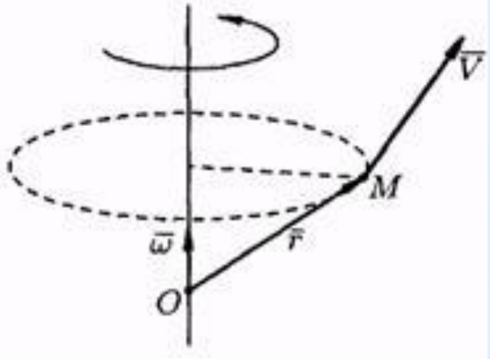


Рис. 21.