

# Векторное произведение векторов

Выполнил студент:

Группы Зи1-17

Леонтьев Артём

# Что называется векторным произведением?

**Векторным произведением** вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c}$ , удовлетворяющий следующим требованиям:

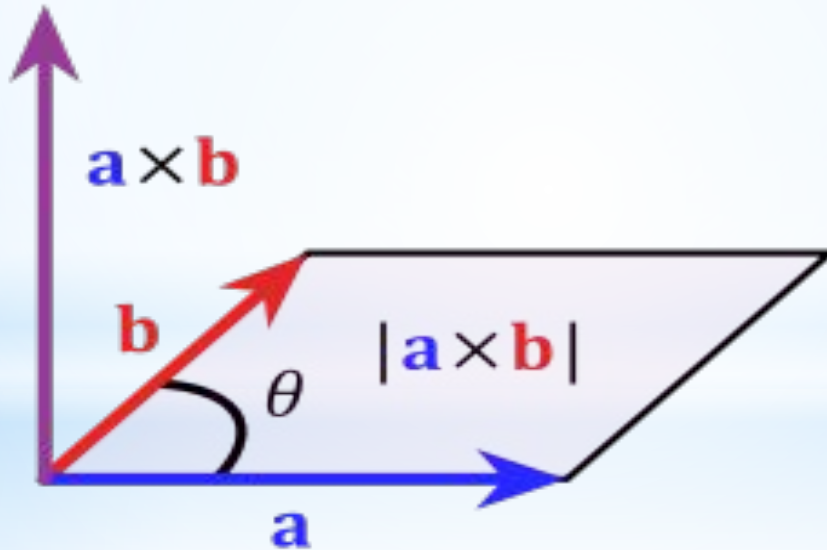
- длина вектора  $\vec{c}$  равна произведению длин векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  на синус угла  $\varphi$  между ними

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$$

1. Вектор  $\vec{c}$  ортогонален каждому из векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$
2. Вектор  $\vec{c}$  направлен так, что тройка векторов  $\vec{a}$   $\vec{b}$   $\vec{c}$  является правой.

Обозначение:  $\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}] = [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}$

Геометрически векторное произведение  $\vec{a} \times \vec{b}$  есть ориентированная площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}, \vec{b}$ , представленная псевдовектором, ортогональным этому параллелограмму.



# Свойства векторного произведения:

1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак (антикоммутативность), т. е.  $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
2. Векторное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя, то есть  $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$
3. Векторное произведение обладает распределительным свойством:  $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

Векторное произведение вычисляется по формуле:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

# Пример:

Найти векторное произведение векторов, заданных своими координатами:  
а (2;1;-3) и б (0;-1;1)

$$\begin{aligned} \left[ \begin{matrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{matrix} \right] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \cdot 1 \cdot 1 + \vec{j} \cdot (-3) \cdot 0 + \vec{k} \cdot 2 \cdot (-1) - \vec{k} \cdot 1 \cdot 0 - \vec{j} \cdot 2 \cdot 1 - \vec{i} \cdot (-3) \cdot (-1) = \\ &= -2 \cdot \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} - 2 \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

# С помощью векторов можно найти S треугольника, но как? Сейчас покажу

Есть формула для вычисления площади треугольника:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |AB| \cdot |AC| \cdot \sin(\angle A)$$

И, о чудо, видим произведение длин двух отрезков (что то же самое, что произведение длин двух векторов) на синус угла между ними. Что равно длине вектора-результата векторного произведения векторов  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$

# Пример:

Даны три точки:  $A(-1; 2; -1)$ ,  $B(0; 4; 1)$ ,  $C(4; 3; -3)$  Найти площадь треугольника ABC.

Найдем координаты этих векторов:

$$\overline{AB} = (0 - (-1); 4 - 2; 1 - (-1)) = (1; 2; 2)$$

$$\overline{AC} = (4 - (-1); 3 - 2; -3 - (-1)) = (5; 1; -2)$$

И вычислим площадь:

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} |\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}| \cdot \sin(\angle A) = \frac{1}{2} |[\overline{AB}; \overline{AC}]| = \\ &= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| i \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \right| = \\ &= \frac{1}{2} | i(-4-2) - j(-2-10) + k(1-10) | = \frac{1}{2} |-6i + 12j - 9k| = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(-6)^2 + 12^2 + (-9)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 144 + 81} = \frac{1}{2} \sqrt{261} \end{aligned}$$

Площадь треугольника равна:

$$\frac{1}{2} \sqrt{261}$$

Так же можно найти площадь параллелограмма:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 z_1 \\ y_2 z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 z_1 \\ x_2 z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{vmatrix} \vec{k} = \\ & (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k} \\ S &= |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \end{aligned}$$

Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах  $a=(1;-2;5)$  и  $b(0;-2;1)$ .

*Решение.* Модуль векторного произведения двух векторов равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах.

По формуле находим:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} = 8 \vec{i} + \vec{j} - 2 \vec{k}$$

$$\text{Так как: } |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{8^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{69}$$

$$\text{то искомая площадь: } S = \sqrt{69}$$



Всё легко и просто,  
учитесь ребята!!!

# \* Некоторые положения векторного произведения

## Установление коллинеарности векторов

Если  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , то  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$  (и наоборот), т. е.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{0} \iff \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \iff \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

## Нахождение площади параллелограмма и треугольника

Согласно определению векторного произведения векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$   $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha$ , т. е.

$S_{\text{пар}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$ . И, значит,  $DS = 1/2 |\vec{a} \times \vec{b}|$

## Определение момента силы относительно точки

Пусть в точке А приложена сила ... и пусть О – некоторая точка пространства. (рис.20)

Из физики известно, что *моментом силы*  $\vec{F}$  относительно точки О называется вектор  $\vec{M}$ , который проходит через точку О и:

- 1) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки О, А, В;
- 2) численно равен произведению силы на плечо;

$$|\vec{M}| = |\vec{F}| \cdot ON = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin \varphi = |\vec{F}| \cdot |\vec{OA}| \sin(\widehat{F, OA});$$

- 3) образует правую тройку с векторами ОА и АВ.

Стало быть,  $\vec{M} = \vec{OA} \times \vec{F}$

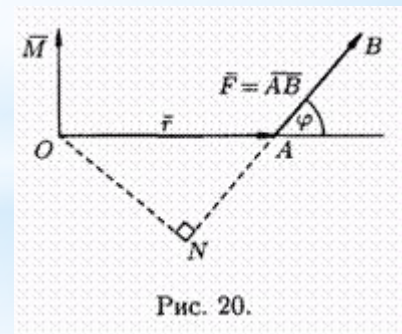


Рис. 20.

## Нахождение линейной скорости вращения

Скорость  $v$  точки  $M$  твердого тела, вращающегося с угловой скоростью  $\vec{\omega}$  вокруг неподвижной оси, определяется формулой Эйлера  $v = \vec{\omega} \times \vec{r}$ , где  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$   $O$  – некоторая неподвижная точка оси. (рис.21)

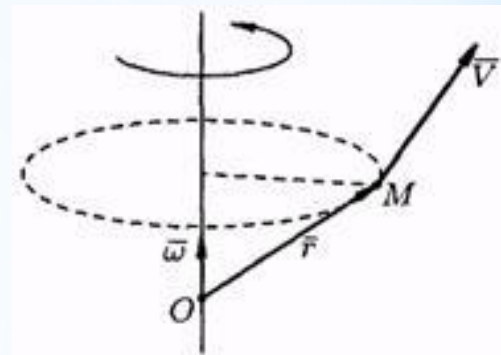


Рис. 21.