Системы счисления

1. Введение
2. Двоичная система
3. Восьмеричная система
4. Шестнадцатеричная система
5. Другие системы счисления

Системы счисления

Тема 1. Введение

Определения

Система счисления – это способ записи **чисел** с помощью специальных знаков – **цифр**.

Числа:

123, 45678, 1010011, CXL

Цифры:

0, 1, 2, …   I, V, X, L, …

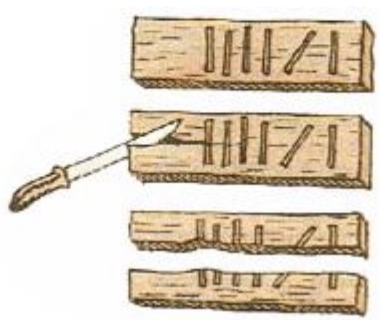
Алфавит – это набор **цифр**. {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Типы систем счисления:

- **непозиционные** – значение цифры не зависит от ее места *(позиции)* в записи числа;
- **позиционные** – зависит…

Непозиционные системы

Унарная – одна цифра обозначает единицу (1 день, 1 камень, 1 баран, …)



Римская:

I – 1 (палец), **V** – 5 (раскрытая ладонь, 5 пальцев),
X – 10 (две ладони), **L** – 50,
C – 100 (*Centum*), **D** – 500 (*Demimille*),
M – 1000 (*Mille*)

Римская система счисления

Правила:

- (обычно) не ставят больше **трех** одинаковых цифр подряд
- если **младшая** цифра (только **одна**!) стоит **слева** от старшей, она вычитается из суммы (*частично* непозиционная!)

Примеры:

MDC**X**L**I**V = 1000 + 500 + 100 **– 10** + 50 **– 1** + 5 = 1644

2389 = 2000 + 300 + 80 + 9

M M **CCC** **LXXX** **IX**

2389 = M M C C C L X X X I X

Примеры:

3768 =

2983 =

1452 =

1999 =

Римская система счисления

Недостатки:

- для записи **больших чисел** (>3999) надо вводить новые знаки-цифры (**V̲**, **X̲**, **L̲**, **C̲**, **D̲**, **M̲**)
- как записать дробные числа?
- как выполнять арифметические действия:

  CCCLIX + CLXXIV =?

Где используется:

- номера глав в книгах:

ГЛАВА V.

Изслѣдованіе истоковъ Желтой рѣки. (прод.).

Свѣдѣнія о тангутахъ камъ и голыкъ. — Нашъ обратный путь. — Охота за горными баранами. — Опасная случайность. — Вновь на тибетскомъ плато. — Мѣстность по р. Джагынъ-голъ. — Развѣдочныя

- обозначение веков: «***Пираты XX века***»
- циферблат часов

Славянская система счисления

алфавитная система счисления (непозиционная)

Позиционные системы

Позиционная система: значение цифры определяется ее позицией в записи числа.

Десятичная система:

первоначально – счет на пальцах

изобретена в Индии, заимствована арабами, завезена в Европу

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Основание (количество цифр): **10**

сотни **десятки** **единицы**

2 1 0 **разряды**

$$\mathbf{3\;7\;8} = 3\cdot10^2 + 7\cdot10^1 + 8\cdot10^0$$

300 **70** **8**

Другие позиционные системы:

- **двоичная**, восьмеричная, **шестнадцатеричная** (информатика)
- двенадцатеричная (1 фут = 12 дюймов, 1 шиллинг = 12 пенсов)
- двадцатеричная (1 франк = 20 су)
- шестидесятеричная (1 минута = 60 секунд, 1 час = 60 минут)

Системы счисления

Тема 2. Двоичная система счисления

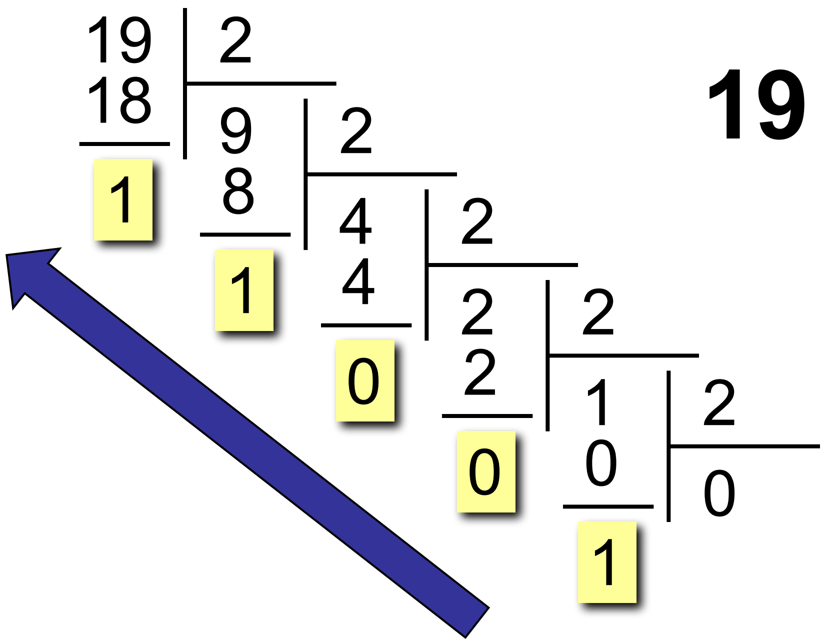
Перевод целых чисел

Двоичная система:

Алфавит: 0, 1

Основание (количество цифр): **2**

10 → 2



$$\mathbf{19 = 10011_2}$$

система счисления

2 → 10

4 3 2 1 0 **разряды**

$$\mathbf{10011_2 = 1\cdot 2^4 + \cancel{0}\cdot 2^3 + \cancel{0}\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0}$$

$$\mathbf{= 16 + 2 + 1 = 19}$$

Примеры:

131 = **79 =**

Примеры:

$$101011_2 =$$

$$110110_2 =$$

Когда двоичное число четное? делится на 8?

Метод подбора

75 **10 → 2**

наибольшая степень двойки, которая меньше или равна заданному числу

$$\overset{2^6}{64} \le 75 < \overset{2^7}{128}$$

разряды

6543210

$75 = 64 + 13$

$13 = 8 + 5$

$5 = 4 + 1$

$1 = 1$

$64 = 2^6 = 1000000_2$

$8 = 2^3 = 1000_2$

\+

$4 = 2^2 = 100_2$

$1 = 2^0 = 1_2$

$$75 = 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = 1001101_2$$

$$75 = 1001101_2$$

Перевод дробных чисел

10 → 2

$$0{,}375 = 0{,}011_2$$

$$\begin{array}{r} 0{,}375 \\ \times\ \ 2 \\ \hline \boxed{0},750 \\ 0{,}75 \\ \times\ \ 2 \\ \hline \boxed{1},50 \\ 0{,}5 \\ \times\ \ 2 \\ \hline \boxed{1},0 \end{array}$$

$0{,}7 = ?$

$0{,}7 = 0{,}101100110\ldots$

$= 0{,}1(0110)_2$

Многие дробные числа нельзя представить в виде **конечных** двоичных дробей.

Для их точного хранения требуется **бесконечное** число разрядов.

Большинство дробных чисел хранится в памяти с ошибкой.

2 → 10

2 1 0 -1 -2 -3 **разряды**

$$101{,}011_2 = 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^0 + 1\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^{-3}$$

$$= 4 + 1 + 0{,}25 + 0{,}125 = 5{,}375$$

$$2^{-2} = {}^1\!/_{2^2} = 0{,}25$$

Примеры:

$0{,}625 =$

$3{,}875 =$

Арифметические операции

сложение

$0+0=0 \quad 0+1=1$

$1+0=1 \quad 1+1=\mathbf{1}0_2$

$1+1+1=\mathbf{1}1_2$

перенос

$$
\begin{array}{r}
10110_2 \\
+\ 111011_2 \\
\hline
1010001_2
\end{array}
$$

вычитание

$0-0=0 \quad 1-1=0$

$1-0=1 \quad \mathbf{1}0_2-1=1$

заем

$0 \quad 1 \quad 1 \quad 10_2 \quad 0 \quad 10_2$

$$
\begin{array}{r}
1000101_2 \\
-\ 11011_2 \\
\hline
0101010_2
\end{array}
$$

Примеры:

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ +\quad 11111_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10111_2 \\ +\quad 101110_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111011_2 \\ +\quad 11011_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111011_2 \\ +\quad 10011_2 \\ \hline \end{array}$$

Примеры:

$$
\begin{array}{r}
101101_2 \\
-\quad 11111_2 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
11011_2 \\
-\quad 110101_2 \\
\hline
\end{array}
$$

Арифметические операции

умножение

$$
\begin{array}{r}
10101_2 \\
\times \quad 10 \\
\hline
{}^{1_2}10101_2 \\
+\,10101_2 \quad\; \\
\hline
\boxed{1101001_2}
\end{array}
$$

деление

$$
\begin{array}{r|l}
10101_2 & 111_2 \\
\cline{2-2}
-\;111_2 \quad & \boxed{11_2} \\
\hline
111_2 & \\
-\,111_2 & \\
\hline
0 \quad &
\end{array}
$$

Плюсы и минусы двоичной системы

- нужны технические устройства только с **двумя устойчивыми состояниями** (есть ток — нет тока, намагничен — не намагничен и т.п.);
- **надежность** и помехоустойчивость двоичных кодов;
- выполнение операций с двоичными числами для компьютера намного проще, чем с десятичными.

- простые десятичные числа записываются в виде **бесконечных** двоичных дробей;
- двоичные числа имеют **много разрядов;**
- запись числа в двоичной системе **однородна**, то есть содержит только нули и единицы; поэтому человеку сложно ее воспринимать.

Двоично-десятичная система

BCD = *binary coded decimals* (десятичные цифры в двоичном коде)

10 → BCD

$$9024{,}19 = 1001\ 0000\ 0010\ 0100,\ 0001\ 1001_{BCD}$$

9 0 2 4 , 1 9

BCD → 10

$$1\ \ 0101\ \ 0011,\ \ 0111\ \ 1_{BCD} =$$

$$0001\ 0101\ 0011,\ 0111\ 1000_{BCD} = 153{,}78$$

Запись числа в BCD не совпадает с двоичной!

$$10101{,}1_{BCD} = 15{,}8$$

$$10101{,}1_{2} = 16 + 4 + 1 + 0{,}5 = 21{,}5$$

Системы счисления

Тема 3. Восьмеричная система счисления

Восьмеричная система

Основание (количество цифр): **8**

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

10 → 8

$$\begin{array}{r|l} 100 & 8 \\ \hline 96 & 12 \\ 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 8 \\ \hline 8 & 1 \\ 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1 & 8 \\ \hline 0 & 0 \\ 1 & \end{array}$$

$$100 = 144_8$$

система счисления

8 → 10

2 1 0 **разряды**

$$144_8 = 1\cdot 8^2 + 4\cdot 8^1 + 4\cdot 8^0$$

$$= 64 + 32 + 4 = 100$$

Примеры:

$134 =$

$75 =$

$134_8 =$

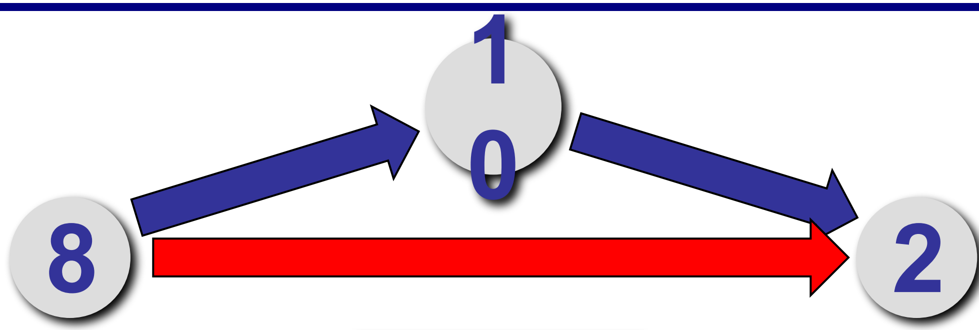
$75_8 =$

Таблица восьмеричных чисел

X_{10}	X_8	X_2
0	0	000
1	1	001
2	2	010
3	3	011

X_{10}	X_8	X_2
4	4	100
5	5	101
6	6	110
7	7	111

Перевод в двоичную и обратно



- трудоемко
- 2 действия

$$8 = 2^3$$

! Каждая восьмеричная цифра может быть записана как три двоичных (*триада*)!

$$1725_8 = \underbrace{001}_{1}\ \underbrace{111}_{7}\ \underbrace{010}_{2}\ \underbrace{101}_{5}{}_2$$

Примеры:

$3467_8 =$

$2\cancel{1}\cancel{4}8_8 =$

$7352_8 =$

$1231_8 =$

Перевод из двоичной системы

$$1001011101111_2$$

Шаг 1. Разбить на триады, начиная справа:

$$001\ 001\ 011\ 101\ 111_2$$

Шаг 2. Каждую триаду записать одной восьмеричной цифрой:

$$001\ 001\ 011\ 101\ 111_2$$

1	1	3	5	7

Ответ: $1001011101111_2 = 11357_8$

Примеры:

$101101010010_2 =$

$11111101011_2 =$

$1101011010_2 =$

Арифметические операции

сложение

$$\begin{array}{r} 156_8 \\ +\ 662_8 \\ \hline 1040_8 \end{array}$$

1 в перенос

$6 + 2 = 8 = 8 + 0$ 1 в перенос

$5 + 6 + 1 = 12 = 8 + 4$

$1 + 6 + 1 = 8 = 8 + 0$

1 в перенос

Пример

$$\begin{array}{r} 353_8 \\ +\ 736_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1353_8 \\ +\ 777_8 \\ \hline \end{array}$$

Арифметические операции

вычитание

· ·

$$
\begin{array}{r}
456_8 \\
-\ 277_8 \\
\hline
157_8
\end{array}
$$

заем

$(6 + 8) – 7 = 7$

заем

$(5 – 1 + 8) – 7 = 5$

$(4 – 1) – 2 = 1$

Примеры

$$
\begin{array}{r}
156_8 \\
-\ \ 662_8 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
1156_8 \\
-\ \ 662_8 \\
\hline
\end{array}
$$

Системы счисления

Тема 4. Шестнадцатеричная системы счисления

Шестнадцатеричная система

Основание (количество цифр): **16**

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**

A	B	C	D	E	F
10	11	12	13	14	15

10 → 16

$$\begin{array}{r|l} 107 & 16 \\ \underline{96} & \\ 11 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6 & 16 \\ \underline{0} & 0 \\ 6 & \end{array}$$

11 → B

$$107 = 6B_{16}$$

система счисления

16 → 10

2 1 0 разряды

C

$$1C5_{16} = 1 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0$$

$$= 256 + 192 + 5 = 453$$

Примеры:

$171 =$

$1BC_{16} =$

$206 =$

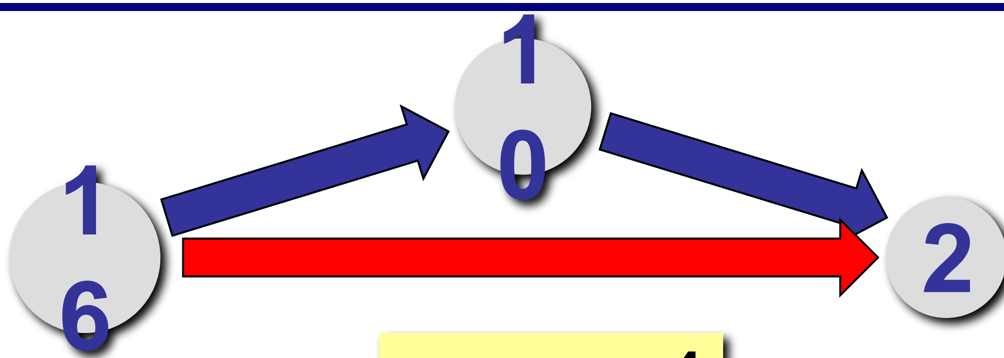
$22B_{16} =$

Таблица шестнадцатеричных чисел

X_{10}	X_{16}	X_2
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111

X_{10}	X_{16}	X_2
8	8	1000
9	9	1001
10	A	1010
11	B	1011
12	C	1100
13	D	1101
14	E	1110
15	F	1111

Перевод в двоичную систему



- трудоемко
- 2 действия

$$16 = 2^4$$

! Каждая шестнадцатеричная цифра может быть записана как четыре двоичных (*тетрада*)!

$$7F1A_{16} = \underbrace{0111}_{7}\ \underbrace{1111}_{F}\ \underbrace{0001}_{1}\ \underbrace{1010}_{A}{}_2$$

Примеры:

$$C73B_{16} =$$

$$2FE1_{16} =$$

Перевод из двоичной системы

$$1001011101111_2$$

Шаг 1. Разбить на тетрады, начиная справа:

$$0001\ 0010\ 1110\ 1111_2$$

Шаг 2. Каждую тетраду записать одной шестнадцатеричной цифрой:

$$0001\ 0010\ 1110\ 1111_2$$

1	2	E	F

Ответ: $1001011101111_2 = 12EF_{16}$

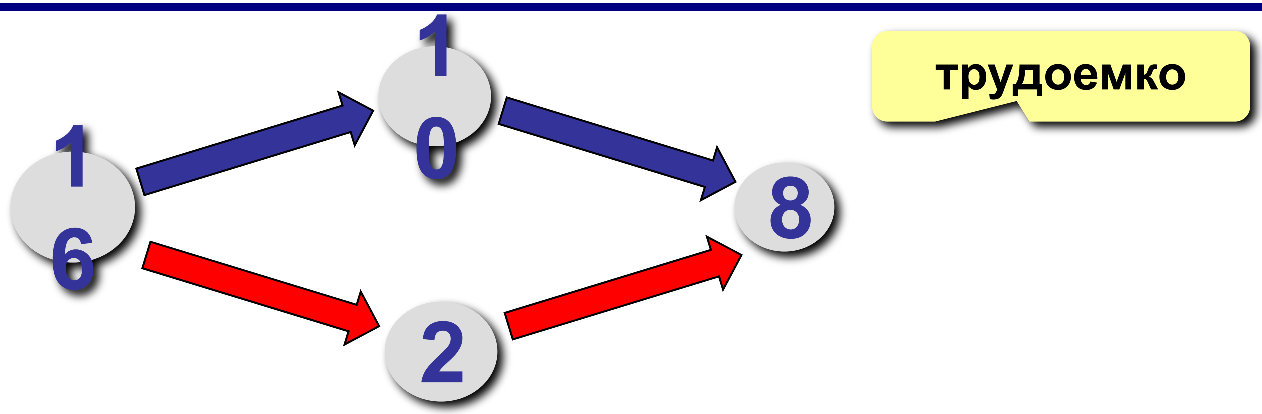
Примеры:

$1010101101010110_2 =$

$111100110111110101_2 =$

$110110110101111110_2 =$

Перевод в восьмеричную и обратно



Шаг 1. Перевести в двоичную систему:

$$3DEA_{16} = 11\ 1101\ 1110\ 1010_2$$

Шаг 2. Разбить на триады:

$$011\ 110\ 111\ 101\ 010_2$$

Шаг 3. Триада – одна восьмеричная цифра:

$$3DEA_{16} = 36752_8$$

Примеры:

$$A35_{16} =$$

$$765_8 =$$

Арифметические операции

сложение

$$
\begin{array}{r}
A\,5\,B_{16} \\
+\;C\,7\,E_{16} \\
\hline
1\,6\,D\,9_{16}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrr}
 & 10 & 5 & 11 \\
+ & 12 & 7 & 14 \\
\hline
1 & 6 & 13 & 9
\end{array}
$$

1 в перенос

$11+14=25=16+9$

$5+7+1=13=D_{16}$ 1 в перенос

$10+12=22=16+6$

Пример:

$$
\begin{array}{r}
C\,B\,A_{16} \\
+\quad A\,5\,9_{16} \\
\hline
\end{array}
$$

Арифметические операции

вычитание

$$\begin{array}{r} C\,5\,B_{16} \\ -\;A\,7\,E_{16} \\ \hline 1\,D\,D_{16} \end{array}$$

заем

· ·

$$\begin{array}{rrr} 12 & 5 & 11 \\ -\;10 & 7 & 14 \\ \hline 1 & 13 & 13 \end{array}$$

заем

$(11+16)–14=13=D_{16}$

$(5 – 1)+16 – 7=13=D_{16}$

$(12 – 1) – 10 = 1$

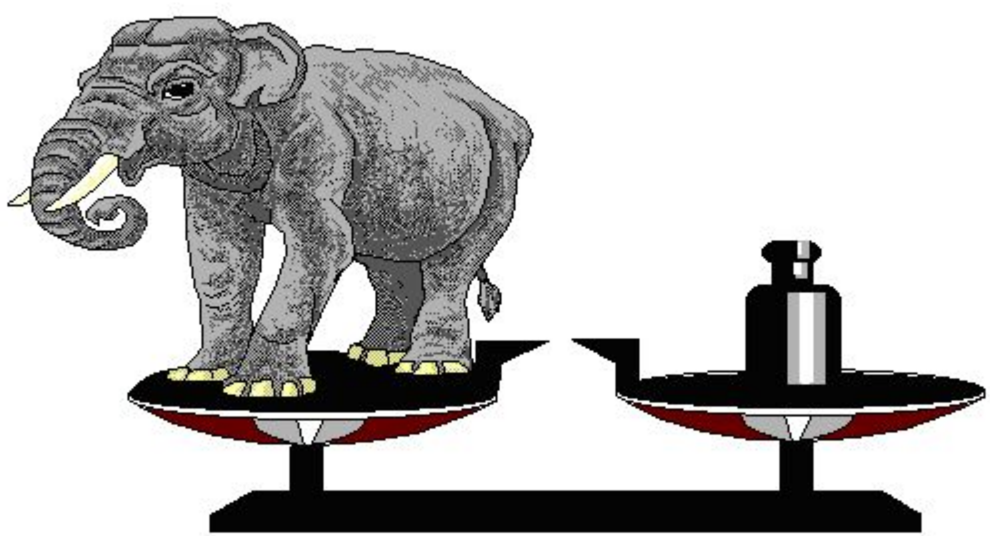
Пример:

$$
\begin{array}{r}
1\,B\,A_{16} \\
-\quad A\,5\,9_{16} \\
\hline
\end{array}
$$

Системы счисления

Тема 5. Другие системы счисления

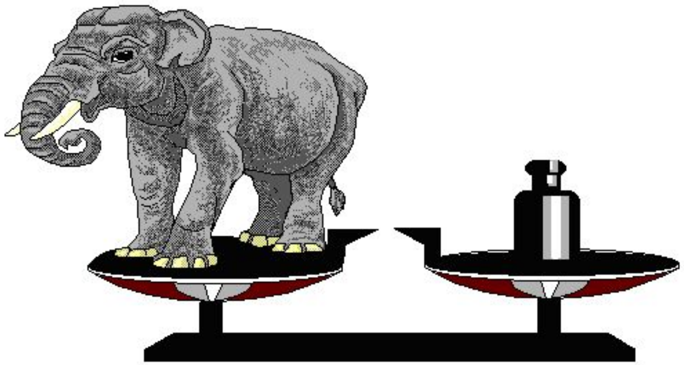
Троичная уравновешенная система



Задача Баше:

Найти такой набор из **4 гирь**, чтобы с их помощью на чашечках равноплечных весов можно было взвесить груз массой **от 1 до 40 кг** включительно. Гири можно располагать на любой чашке весов.

Троичная уравновешенная система



+ 1 гиря справа
0 гиря снята
– 1 гиря слева

Троичная система!

Веса гирь:

1 кг, 3 кг, 9 кг, 27 кг

Пример:

27 кг + 9 кг + 3 кг + 1 кг = 40 кг

$$1\quad 1\quad 1\quad 1_{3ур} = 40$$

Реализация:

ЭВМ «Сетунь», Н.П. Брусенцов (1958)

50 промышленных образцов