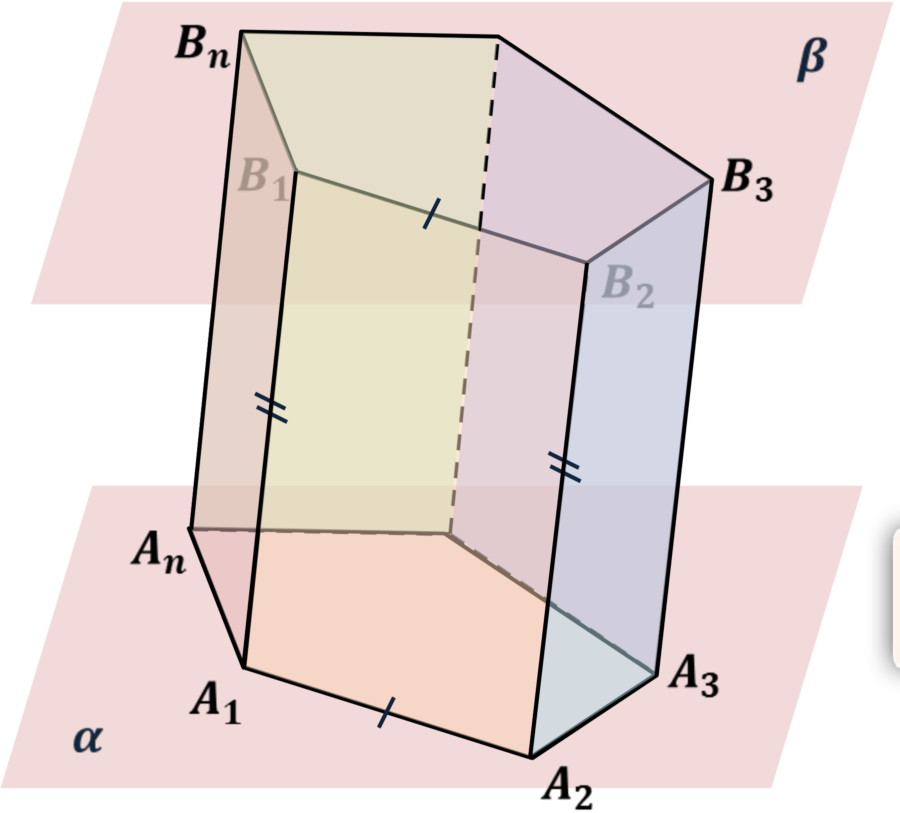
Призма

$\alpha \parallel \beta$



$A_1A_2 \parallel B_1B_2,\ A_2A_3 \parallel B_2B_3, \dots, A_nA_1 \parallel B_nB_1.$

$A_1A_2B_2B_1,\ A_2A_3B_3B_2, \dots, A_nA_1B_1B_n.$

Рассмотрим $A_1A_2B_2B_1$.

$A_1A_2 = B_1B_2$, $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ – по построению.

Следовательно, $A_1B_1 = A_2B_2$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

Значит, $A_1A_2B_2B_1$ – параллелограмм.

$A_1A_2 \dots A_nB_1B_2 \dots B_n$ – ***n*-угольная призма**.

Определение. ***n*-угольной призмой** называется многогранник, у которого две грани – равные n-угольники, а остальные n граней – параллелограммы.

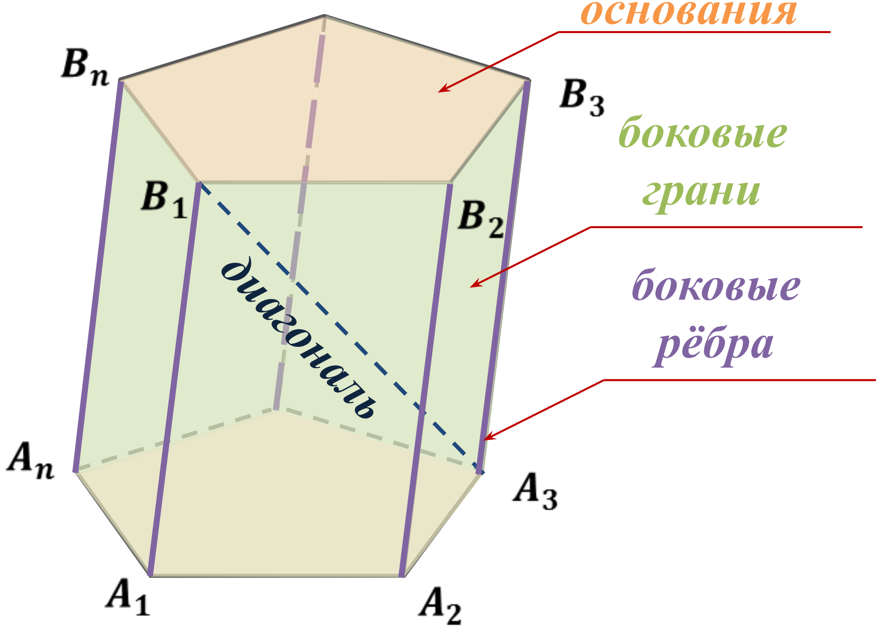
$A_1A_2 \dots A_nB_1B_2 \dots B_n$ – ***n*-угольная призма**.

Равные n-угольники называются ***основаниями*** призмы.

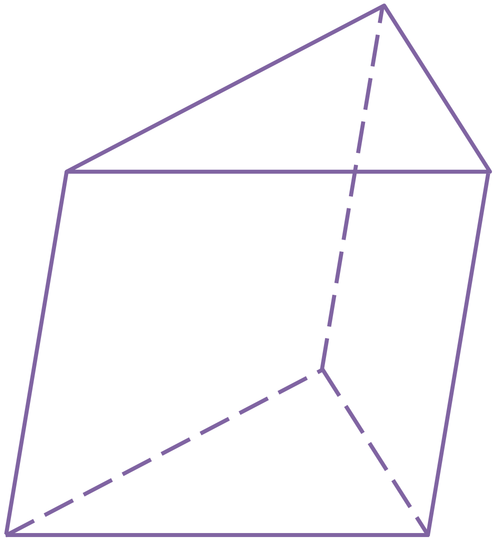
Параллелограммы – ***боковыми гранями*** призмы.

А *стороны боковых граней*, <u>не являющиеся сторонами оснований</u> призмы, называются ***боковыми рёбрами*** призмы.

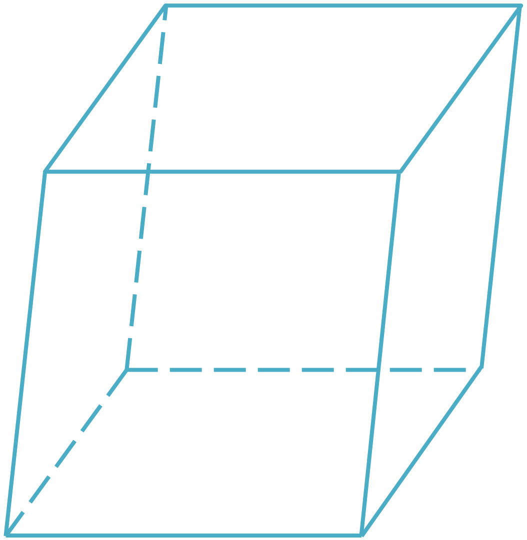
Отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани, называется ***диагональю*** призмы.



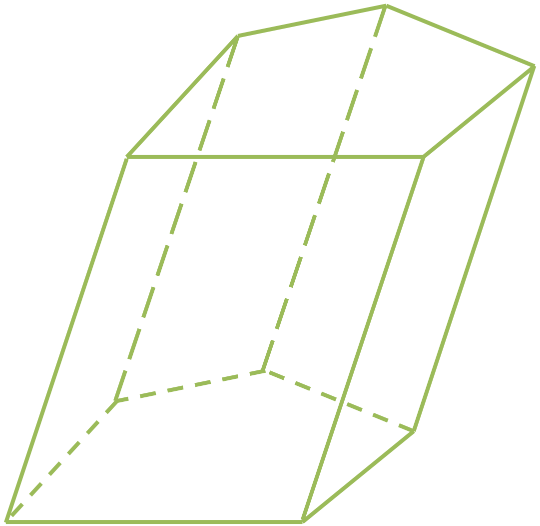
Призма в зависимости от того, какой многоугольник лежит в основании, имеет свое название.



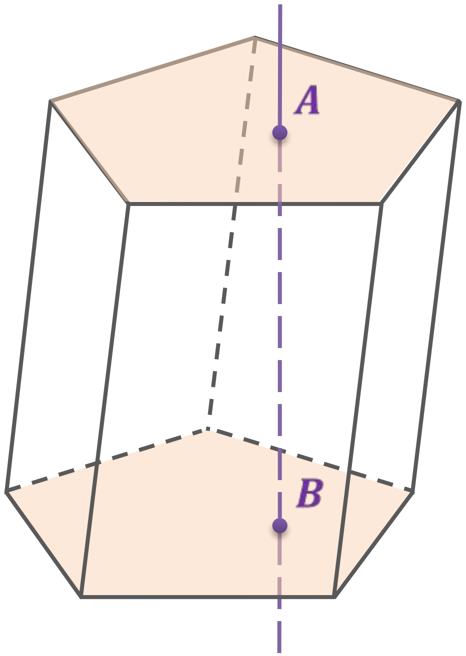
Треугольная призма



Четырехугольная призма



n-угольная призма



AB – ***высота*** призмы.

Определение. Высота призмы – это перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания.

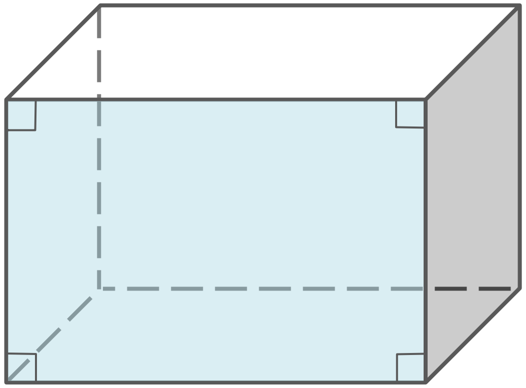
Призмы

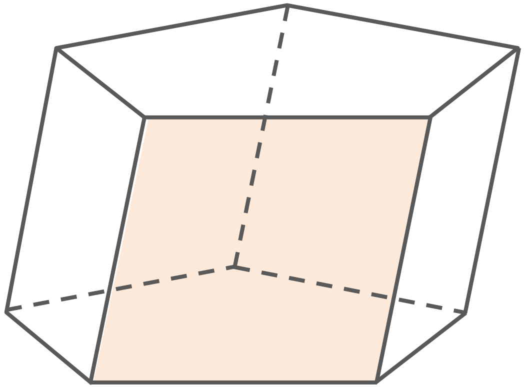
Прямые

если все боковые ребра призмы ***перпендикулярны*** *к плоскостям ее оснований.*

Наклонные

если боковые ребра призмы ***не перпендикулярны*** *основанию.*



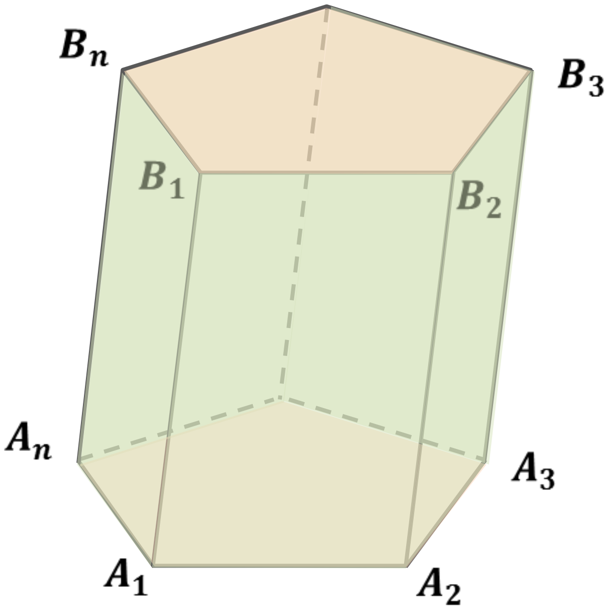


Объединение боковых граней называется ***боковой поверхностью*** призмы.

$$S_{\text{бок.пов.}} = S_{A_1B_1B_2A_2} + S_{A_2B_3B_3A_2} + \dots + S_{A_nB_nB_1A_1}$$

А объединение всех граней называется ***полной поверхностью*** призмы.

$$S_{\text{полн.пов.}} = S_{\text{бок.пов.}} + 2S_{\text{осн}}$$



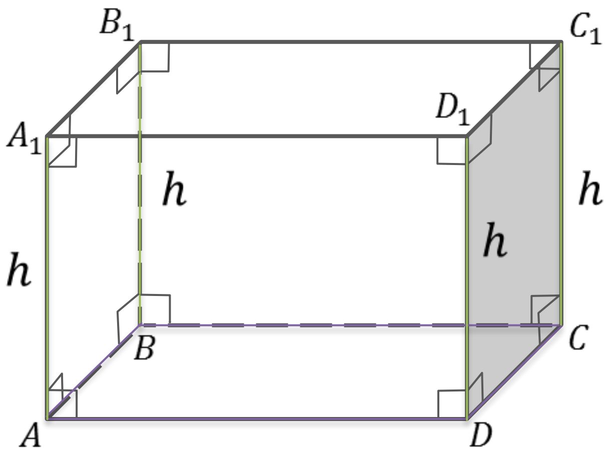
Теорема. Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.

Доказательство.

$$S_{\text{бок.пов.}} = S_{ABB_1A_1} + S_{BB_1C_1C} + S_{CC_1DD_1} + S_{DD_1A_1A}$$

$$S_{\text{бок.пов.}} = AB \cdot h + BC \cdot h + CD \cdot h + AD \cdot h$$

$$S_{\text{бок.пов.}} = h \cdot \underbrace{(AB + BC + CD + AD)}_{P_{ABCD}}$$



$$\boldsymbol{S_{\text{бок.пов.}} = h \cdot P_{\text{основ.}}}$$

Задача. Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция с основаниями, которые равны 21 см и 9 см. Высота призмы равна 8 см. Найти площадь боковой поверхности, если боковое ребро равно 10 см.

Решение.

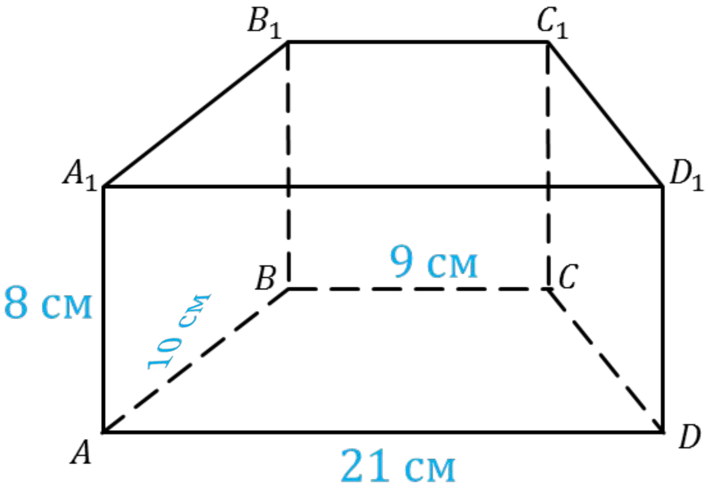
$S_{\text{бок.пов.}} = h \cdot P_{\text{основ.}}$

$P_{\text{основ.}} = AB + BC + CD + AD$

$CD = AB = 10$ см

$P_{\text{основ.}} = 10 + 9 + 10 + 21 = 50$ (см)

$S_{\text{бок.пов.}} = 10 \cdot 50 = 500$ (см^2)



Ответ: 500 см^2

Задача. В правильной треугольной призме сторона основания равна 10 см, а высота призмы равна 15 см. Вычислить площадь боковой и полной поверхности призмы.

Решение.

$S_{\text{бок.пов.}} = h \cdot P_{\text{осн}}$

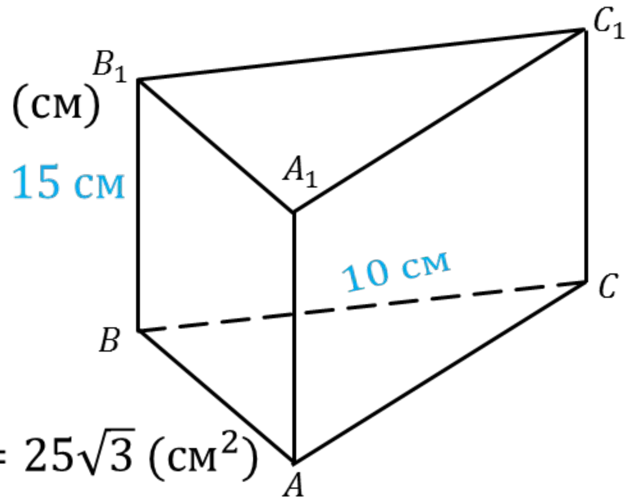
ΔABC – равносторонний $\Rightarrow P_{\text{осн}} = 3 \cdot BC = 3 \cdot 10 = 30$ (см)

$S_{\text{бок.пов.}} = 15 \cdot 30 = 450$ (см^2)

$S_{\text{полн.пов.}} = S_{\text{бок.пов.}} + 2S_{\text{осн}}$

$S_{\text{осн.}} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot sin\,\angle ABC$

$\angle ABC = 60° \Rightarrow sin\,\angle ABC = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{\text{осн.}} = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$ (см^2)



$S_{\text{полн.пов.}} = 450 + 2 \cdot 25\sqrt{3} = 450 + 50\sqrt{3}$ (см^2)

Ответ: 450 см^2, $450 + 50\sqrt{3}$ см^2.

Задача. Доказать, что площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро.

Доказательство.

$$\left.\begin{matrix} KL \perp BB_1 \\ AA_1 \parallel BB_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow KL \perp AA_1$$

Перпендикулярным сечением называется пересечение призмы и плоскости, перпендикулярной ее боковому ребру.

$$\left.\begin{matrix} KM \perp BB_1 \\ KL \perp BB_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow BB_1 \perp KLM$$

KLM – перпендикулярное сечение призмы

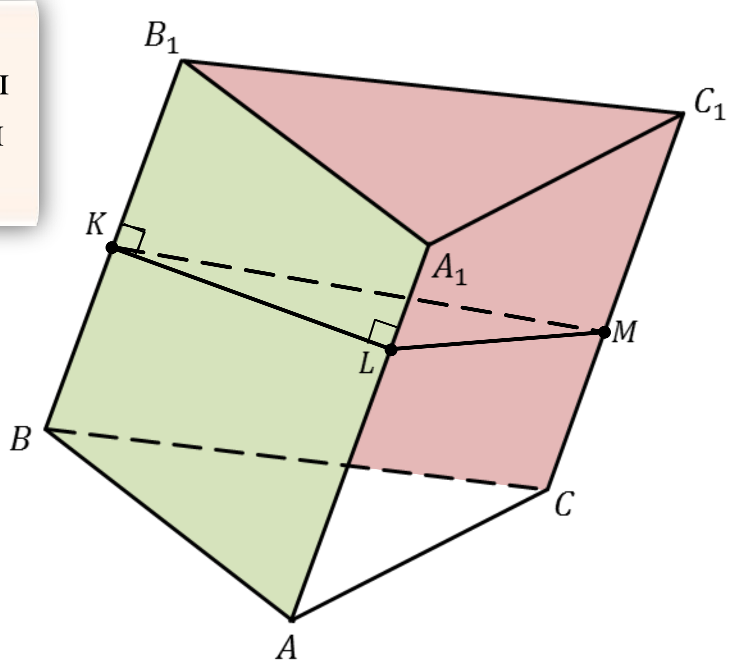
$$S_{\text{бок.пов.}} = P_{KLM} \cdot BB_1$$

$$S_{ABB_1A_1} = KL \cdot BB_1$$

$$S_{BCC_1B_1} = KM \cdot CC_1 = KM \cdot BB_1$$

$$S_{CAA_1C_1} = ML \cdot AA_1 = ML \cdot BB_1$$

$$S_{\text{бок.пов.}} = S_{ABB_1A_1} + S_{BB_1C_1C} + S_{CC_1A_1A} = KL \cdot BB_1 + KM \cdot BB_1 + ML \cdot BB_1 =$$
$$= BB_1(KL + KM + ML) = BB_1 \cdot P_{KLM}$$



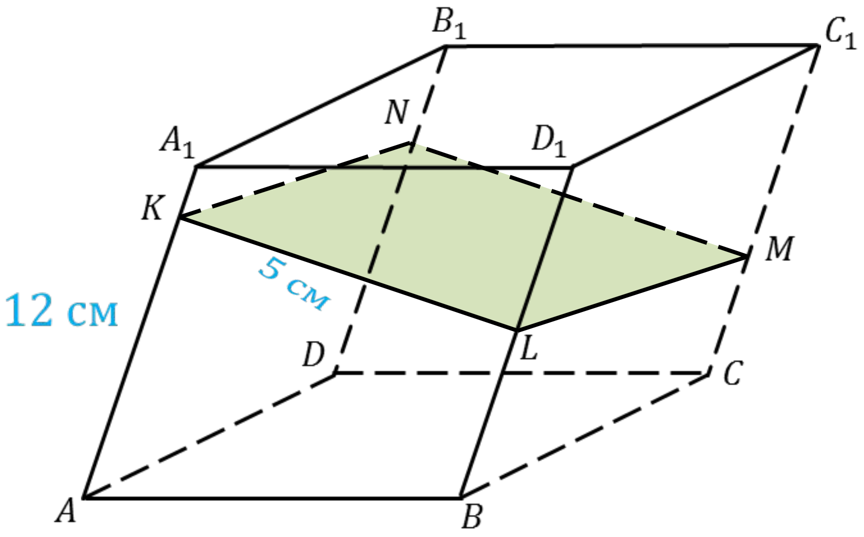
Задача. Боковое ребро наклонной четырехугольной призмы равно 12 см. Перпендикулярным сечением является ромб со стороной 5 см. Найти площадь боковой поверхности.

Решение.

$S_{\text{бок.пов.}} = P_{KLMN} \cdot AA_1$

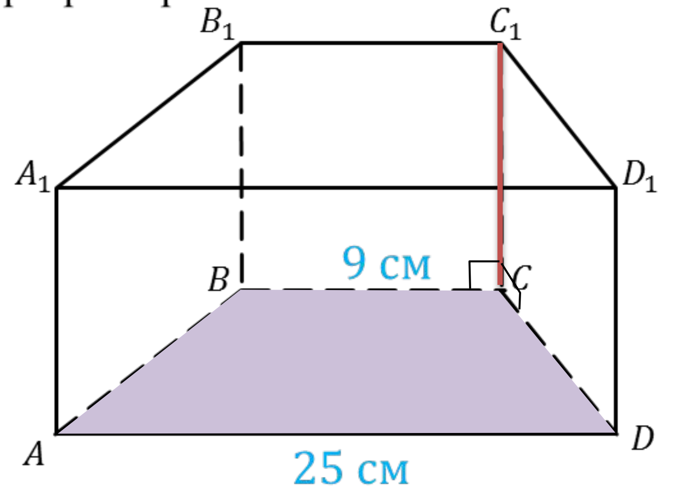
$P_{KLMN} = 4 \cdot 5 = 20$ (см)

$S_{\text{бок.пов.}} = 20 \cdot 12 = 240$ (см^2)



Ответ: 240 см^2.

Задача. Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция с основаниями 25 см, 9 см и высотой 8 см. Найти двугранные углы при боковых ребрах призмы.



Решение.

$CC_1 \perp ABC \Rightarrow CC_1 \perp BC$ и $CC_1 \perp CD$

$\angle DCB$ – линейный угол двугранного угла $\angle C_1CBD$

$\angle BAD$ – линейный угол двугранного угла $\angle A_1ABD$

$\angle ADC$ – линейный угол двугранного угла $\angle D_1DAC$

$\angle ABC$ – линейный угол двугранного угла $\angle B_1BAC$

$HK = BC = 9$ см

$AH = KD = \frac{AD-BC}{2} = \frac{25-9}{2} = 8$ (см)

$AH = BH \Rightarrow \Delta ABH$ – равнобедренный

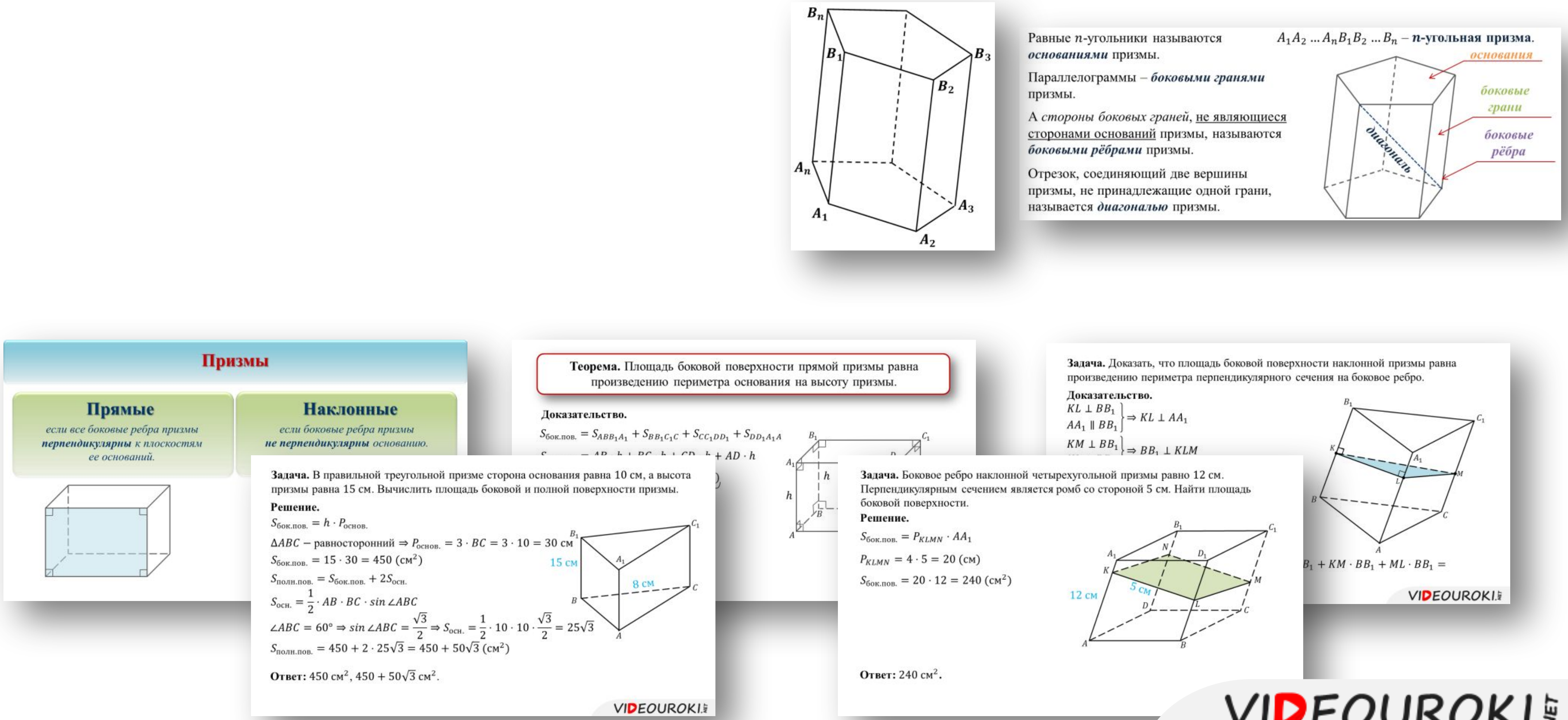
$\angle BAH = \angle ABH = 45°$

$\angle BAD = \angle CDA \Rightarrow \angle CDA = 45°$

$\angle ABC = \angle DCB = 180° - 45° = 135°$

Ответ: 45°, 135°.

Призма



Равные n-угольники называются основаниями призмы.
Параллелограммы – боковыми гранями призмы.
А стороны боковых граней, не являющиеся сторонами оснований призмы, называются боковыми рёбрами призмы.
Отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани, называется диагональю призмы.
A₁A₂ … AₙB₁B₂ … Bₙ – n-угольная призма.
основания
боковые грани
боковые рёбра
диагональ
Призмы
Прямые
если все боковые рёбра призмы перпендикулярны к плоскостям ее оснований.
Наклонные
если боковые рёбра призмы не перпендикулярны основанию.
Теорема. Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.
Доказательство.
Задача. Доказать, что площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро.
Доказательство.
Задача. В правильной треугольной призме сторона основания равна 10 см, а высота призмы равна 15 см. Вычислить площадь боковой и полной поверхности призмы.
Решение.
S бок.пов. = h · P основ.
ΔABC – равносторонний ⇒ P основ. = 3 · BC = 3 · 10 = 30 см
S бок.пов. = 15 · 30 = 450 (см²)
S полн.пов. = S бок.пов. + 2S осн.
S осн. = 1/2 · AB · BC · sin ∠ABC
∠ABC = 60° ⇒ sin ∠ABC = √3/2 ⇒ S осн. = 1/2 · 10 · 10 · √3/2 = 25√3
S полн.пов. = 450 + 2 · 25√3 = 450 + 50√3 (см²)
Ответ: 450 см², 450 + 50√3 см².
15 см
8 см
Задача. Боковое ребро наклонной четырехугольной призмы равно 12 см. Перпендикулярным сечением является ромб со стороной 5 см. Найти площадь боковой поверхности.
Решение.
S бок.пов. = P KLMN · AA₁
P KLMN = 4 · 5 = 20 (см)
S бок.пов. = 20 · 12 = 240 (см²)
Ответ: 240 см².
12 см
5 см
VIDEOUROKI.NET