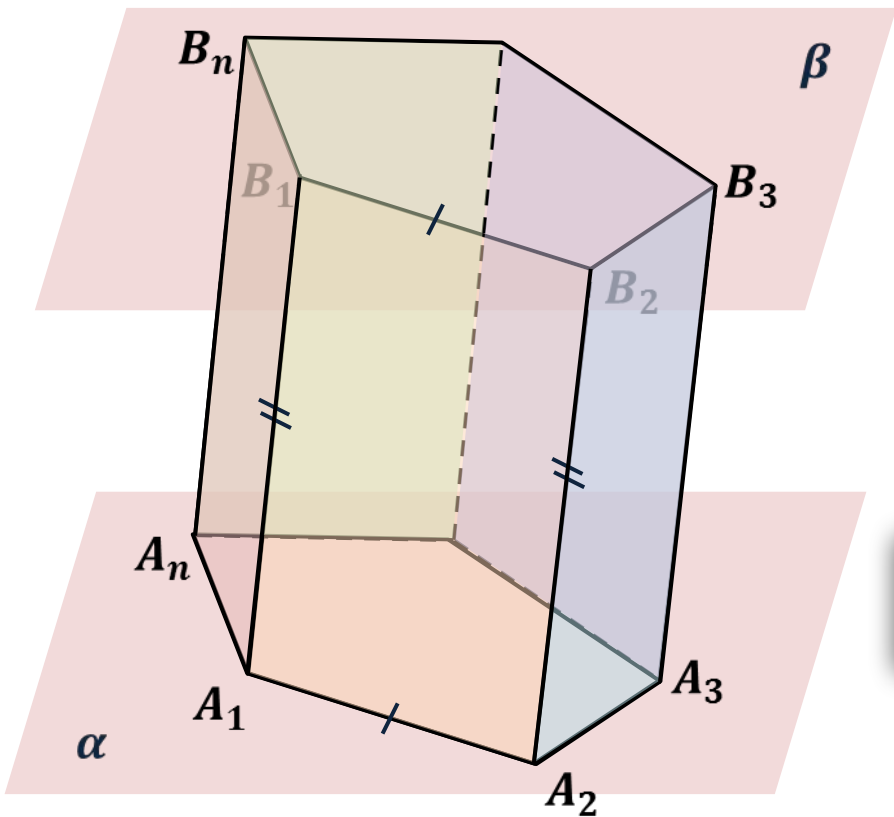




# Призма

$$\alpha \parallel \beta$$



$$A_1A_2 \parallel B_1B_2, A_2A_3 \parallel B_2B_3, \dots, A_nA_1 \parallel B_nB_1.$$

$$A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2, \dots, A_nA_1B_1B_n.$$

Рассмотрим  $A_1A_2B_2B_1$ .

$A_1A_2 = B_1B_2, A_1A_2 \parallel B_1B_2$  – по построению.

Следовательно,  $A_1B_1 = A_2B_2, A_1B_1 \parallel A_2B_2$ .

Значит,  $A_1A_2B_2B_1$  – параллелограмм.

$A_1A_2 \dots A_nB_1B_2 \dots B_n$  –  **$n$ -угольная призма.**

**Определение.** *n*-угольной призмой называется многогранник, у которого две грани – равные *n*-угольники, а остальные *n* граней – параллелограммы.

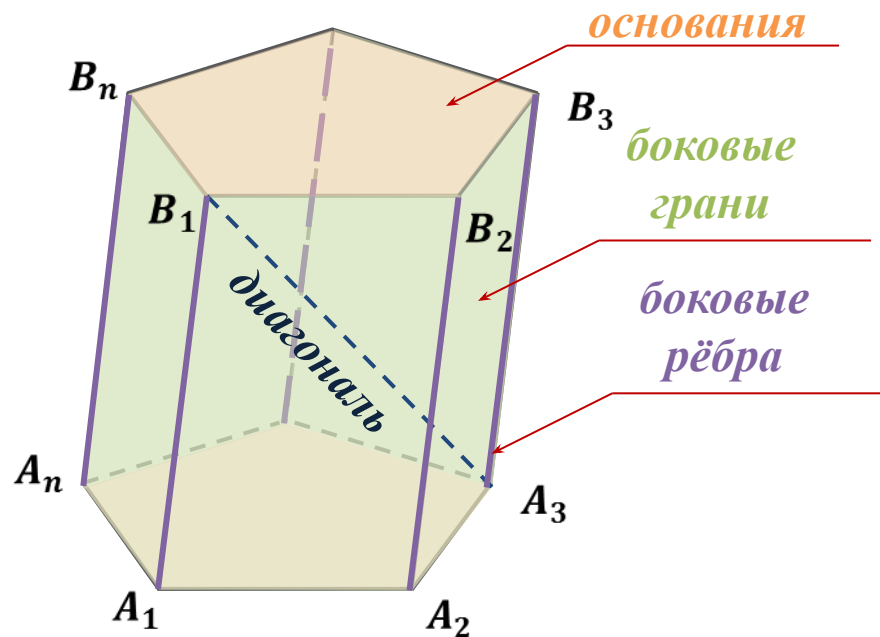
Равные *n*-угольники называются *основаниями* призмы.

Параллелограммы – *боковыми гранями* призмы.

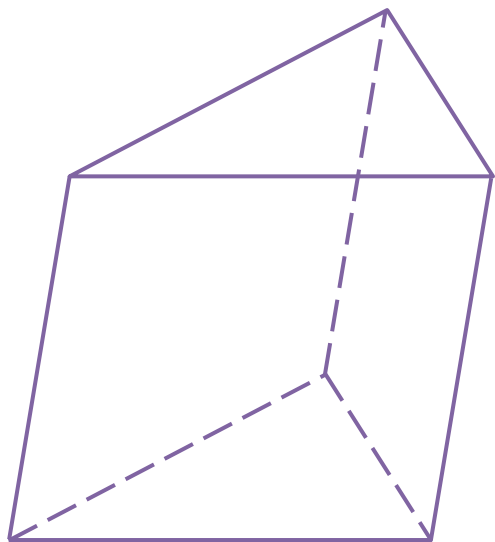
А *стороны боковых граней, не являющиеся сторонами оснований* призмы, называются *боковыми рёбрами* призмы.

Отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани, называется *диагональю* призмы.

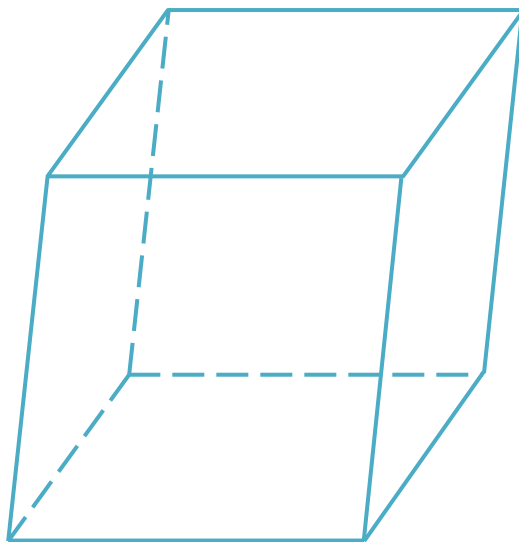
$A_1A_2 \dots A_n B_1B_2 \dots B_n$  – *n*-угольная призма.



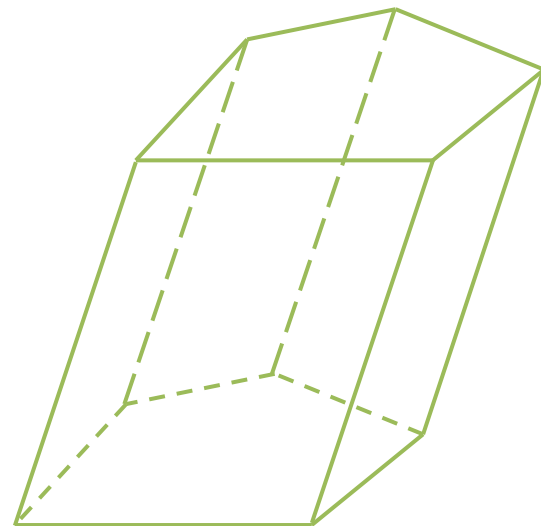
*Призма в зависимости от того, какой многоугольник лежит в основании, имеет свое название.*



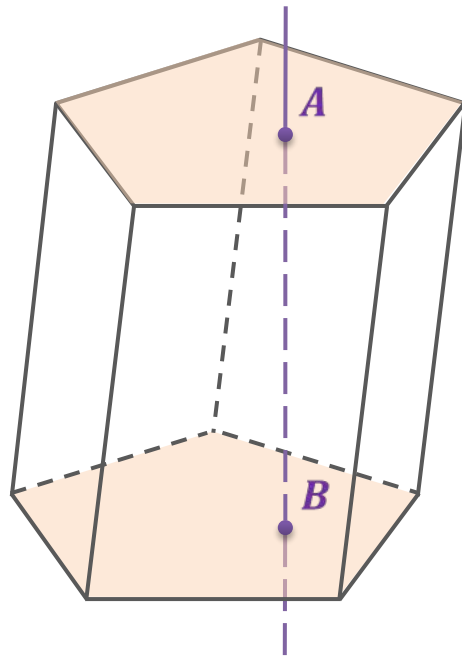
**Треугольная призма**



**Четырехугольная призма**



**n-угольная призма**



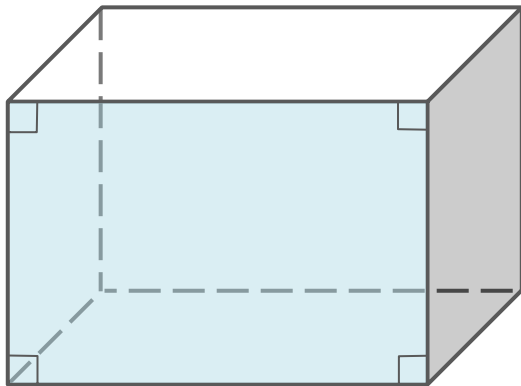
*AB* – *высота* призмы.

**Определение.** **Высота** призмы – это перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания.

# Призмы

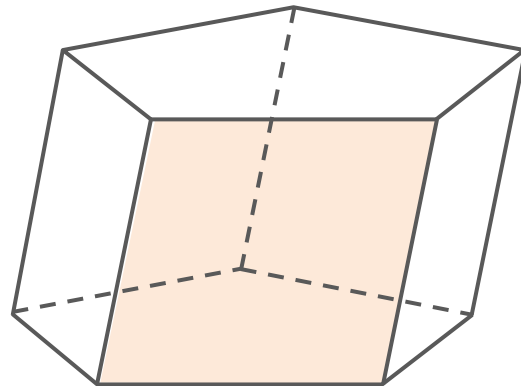
## Прямые

*если все боковые ребра призмы перпендикулярны к плоскостям ее оснований.*



## Наклонные

*если боковые ребра призмы не перпендикулярны основанию.*

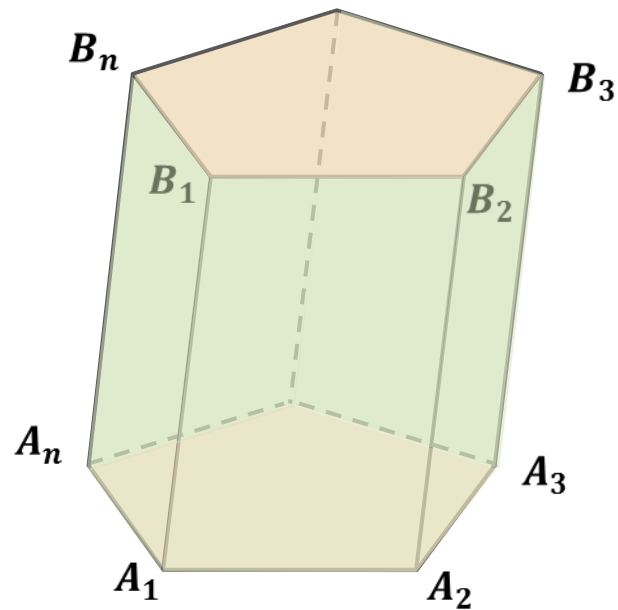


Объединение боковых граней называется *боковой поверхностью* призмы.

$$S_{\text{бок.пов.}} = S_{A_1B_1B_2A_2} + S_{A_2B_3B_3A_2} + \dots + S_{A_nB_nB_1A_1}$$

А объединение всех граней называется *полной поверхностью* призмы.

$$S_{\text{полн.пов.}} = S_{\text{бок.пов.}} + 2S_{\text{осн}}$$



**Теорема.** Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.

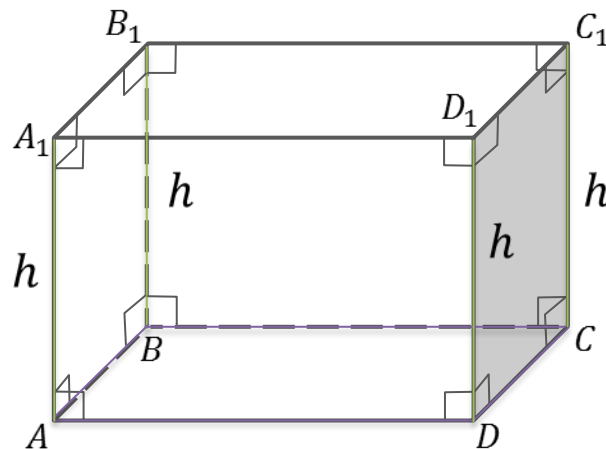
**Доказательство.**

$$S_{\text{бок.пов.}} = S_{ABB_1A_1} + S_{BB_1C_1C} + S_{CC_1DD_1} + S_{DD_1A_1A}$$

$$S_{\text{бок.пов.}} = AB \cdot h + BC \cdot h + CD \cdot h + AD \cdot h$$

$$S_{\text{бок.пов.}} = h \cdot \underbrace{(AB + BC + CD + AD)}_{P_{ABCD}}$$

$$S_{\text{бок.пов.}} = h \cdot P_{\text{основ.}}$$





**Задача.** Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция с основаниями, которые равны 21 см и 9 см. Высота призмы равна 8 см. Найти площадь боковой поверхности, если боковое ребро равно 10 см.

**Решение.**

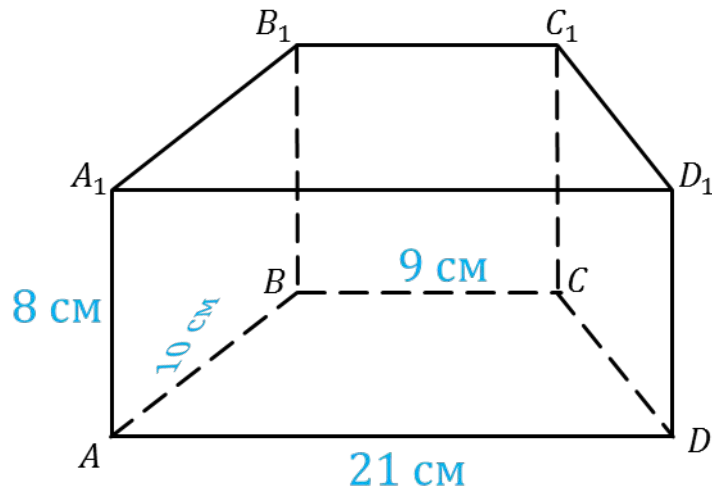
$$S_{\text{бок.пов.}} = h \cdot P_{\text{основ.}}$$

$$P_{\text{основ.}} = AB + BC + CD + AD$$

$$CD = AB = 10 \text{ см}$$

$$P_{\text{основ.}} = 10 + 9 + 10 + 21 = 50 \text{ (см)}$$

$$S_{\text{бок.пов.}} = 10 \cdot 50 = 500 \text{ (см}^2\text{)}$$



**Ответ:** 500 см<sup>2</sup>

**Задача.** В правильной треугольной призме сторона основания равна 10 см, а высота призмы равна 15 см. Вычислить площадь боковой и полной поверхности призмы.

**Решение.**

$$S_{\text{бок.пов.}} = h \cdot P_{\text{осн}}$$

$$\triangle ABC - \text{равносторонний} \Rightarrow P_{\text{осн}} = 3 \cdot BC = 3 \cdot 10 = 30 \text{ (см)}$$

$$S_{\text{бок.пов.}} = 15 \cdot 30 = 450 \text{ (см}^2\text{)}$$

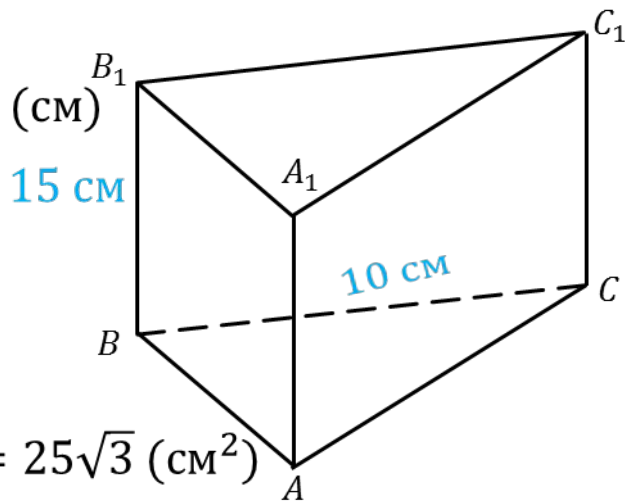
$$S_{\text{полн.пов.}} = S_{\text{бок.пов.}} + 2S_{\text{осн}}$$

$$S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC$$

$$\angle ABC = 60^\circ \Rightarrow \sin \angle ABC = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}$$

$$S_{\text{полн.пов.}} = 450 + 2 \cdot 25\sqrt{3} = 450 + 50\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}$$

**Ответ:**  $450 \text{ см}^2$ ,  $450 + 50\sqrt{3} \text{ см}^2$ .



**Задача.** Доказать, что площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро.

**Доказательство.**

$$\left. \begin{array}{l} KL \perp BB_1 \\ AA_1 \parallel BB_1 \end{array} \right\} \Rightarrow KL \perp AA_1$$

$$\left. \begin{array}{l} KM \perp BB_1 \\ KL \perp BB_1 \end{array} \right\} \Rightarrow BB_1 \perp KLM$$

Перпендикулярным сечением называется пересечение призмы и плоскости, перпендикулярной ее боковому ребру.

$KLM$  – перпендикулярное сечение призмы

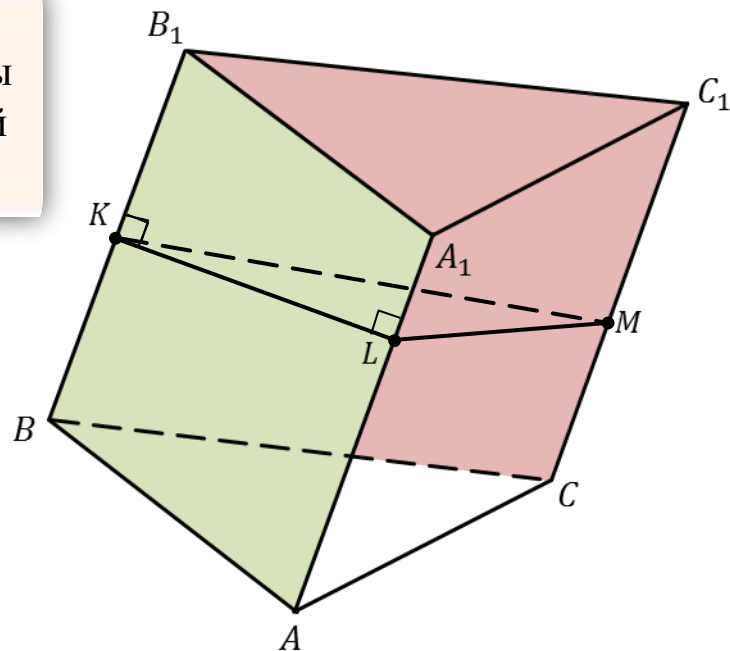
$$S_{\text{бок.пов.}} = P_{KLM} \cdot BB_1$$

$$S_{ABB_1A_1} = KL \cdot BB_1$$

$$S_{BCC_1B_1} = KM \cdot CC_1 = KM \cdot BB_1$$

$$S_{CAA_1C_1} = ML \cdot AA_1 = ML \cdot BB_1$$

$$S_{\text{бок.пов.}} = S_{ABB_1A_1} + S_{BCC_1B_1} + S_{CC_1A_1A} = KL \cdot BB_1 + KM \cdot BB_1 + ML \cdot BB_1 = \\ = BB_1(KL + KM + ML) = BB_1 \cdot P_{KLM}$$



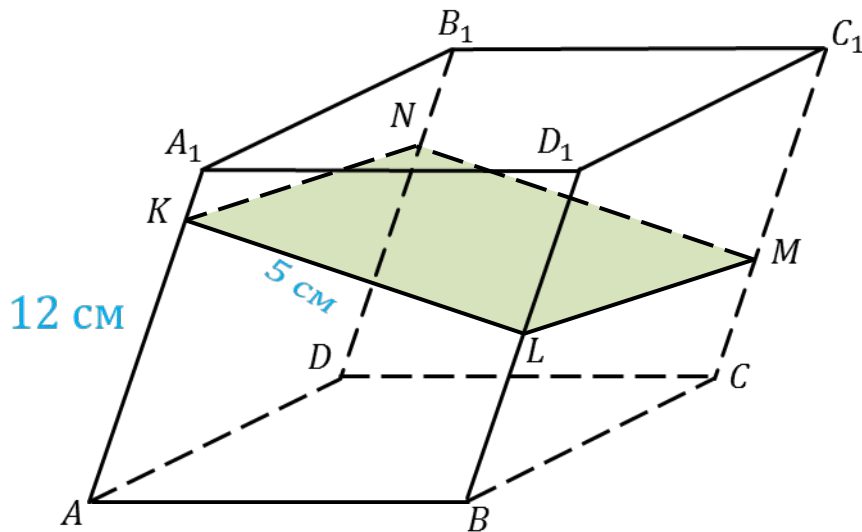
**Задача.** Боковое ребро наклонной четырехугольной призмы равно 12 см. Перпендикулярным сечением является ромб со стороной 5 см. Найти площадь боковой поверхности.

**Решение.**

$$S_{\text{бок.пов.}} = P_{KLMN} \cdot AA_1$$

$$P_{KLMN} = 4 \cdot 5 = 20 \text{ (см)}$$

$$S_{\text{бок.пов.}} = 20 \cdot 12 = 240 \text{ (см}^2\text{)}$$



**Ответ:** 240 см<sup>2</sup>.

**Задача.** Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция с основаниями 25 см, 9 см и высотой 8 см. Найти двугранные углы при боковых ребрах призмы.

**Решение.**

$$CC_1 \perp ABC \Rightarrow CC_1 \perp BC \text{ и } CC_1 \perp CD$$

$\angle DCB$  – линейный угол двугранного угла  $\angle C_1CBD$

$\angle BAD$  – линейный угол двугранного угла  $\angle A_1ABD$

$\angle ADC$  – линейный угол двугранного угла  $\angle D_1DAC$

$\angle ABC$  – линейный угол двугранного угла  $\angle B_1BAC$

$$HK = BC = 9 \text{ см}$$

$$AH = KD = \frac{AD - BC}{2} = \frac{25 - 9}{2} = 8 \text{ (см)}$$

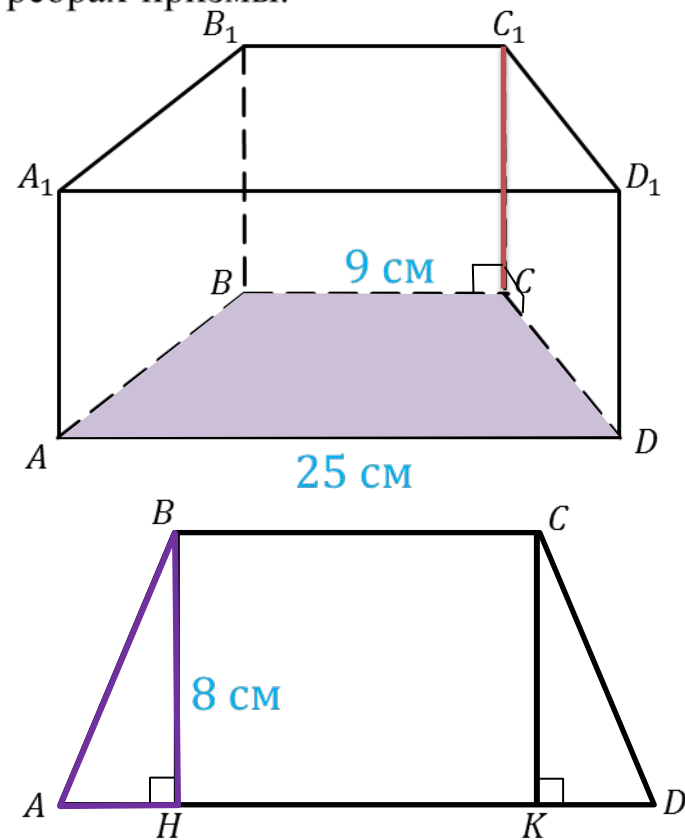
$AH = BH \Rightarrow \triangle ABH$  – равнобедренный

$$\angle BAH = \angle ABH = 45^\circ$$

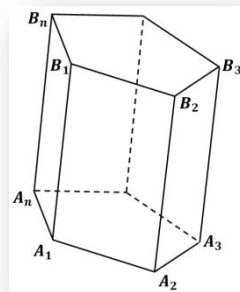
$$\angle BAD = \angle CDA \Rightarrow \angle CDA = 45^\circ$$

$$\angle ABC = \angle DCB = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

**Ответ:**  $45^\circ, 135^\circ$ .



# Призма



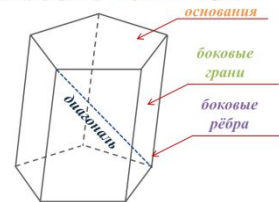
Равные  $n$ -угольники называются основаниями призмы.

Параллелограммы – боковыми гранями призмы.

А стороны боковых граней, не являющиеся сторонами оснований призмы, называются боковыми рёбрами призмы.

Отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани, называется диагональю призмы.

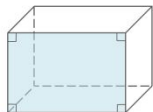
$A_1A_2 \dots A_n B_1 B_2 \dots B_n$  –  $n$ -угольная призма.



## Призмы

### Прямые

если все боковые ребра призмы перпендикулярны к плоскостям ее оснований.



### Наклонные

если боковые ребра призмы не перпендикулярны основанию.

**Задача.** В правильной треугольной призме сторона основания равна 10 см, а высота призмы равна 15 см. Вычислить площадь боковой и полной поверхности призмы.

**Решение.**

$$S_{\text{бок.пов.}} = h \cdot P_{\text{основ.}}$$

$$\Delta ABC - \text{равносторонний} \Rightarrow P_{\text{основ.}} = 3 \cdot BC = 3 \cdot 10 = 30 \text{ см}$$

$$S_{\text{бок.пов.}} = 15 \cdot 30 = 450 \text{ (см}^2\text{)}$$

$$S_{\text{полн.пов.}} = S_{\text{бок.пов.}} + 2S_{\text{осн.}}$$

$$S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC$$

$$\angle ABC = 60^\circ \Rightarrow \sin \angle ABC = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$$

$$S_{\text{полн.пов.}} = 450 + 2 \cdot 25\sqrt{3} = 450 + 50\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}$$

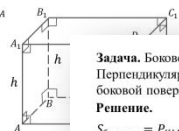
**Ответ:** 450 см<sup>2</sup>, 450 + 50√3 см<sup>2</sup>.

**Доказательство.**

$$S_{\text{бок.пов.}} = S_{ABB_1A_1} + S_{BB_1C_1C} + S_{CC_1D_1D_1} + S_{DD_1A_1A}$$

$$= AB \cdot BB_1 + BC \cdot CC_1 + CD \cdot DD_1 + DA \cdot AA_1$$

$$= (AB + BC + CD + DA) \cdot h$$



**Теорема.** Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.

**Задача.** Боковое ребро наклонной четырёхугольной призмы равно 12 см.

Перпендикулярным сечением является ромб со стороной 5 см. Найти площадь боковой поверхности.

**Решение.**

$$S_{\text{бок.пов.}} = P_{KLMN} \cdot AA_1$$

$$P_{KLMN} = 4 \cdot 5 = 20 \text{ (см)}$$

$$S_{\text{бок.пов.}} = 20 \cdot 12 = 240 \text{ (см}^2\text{)}$$

**Ответ:** 240 см<sup>2</sup>.

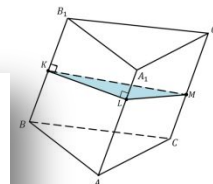
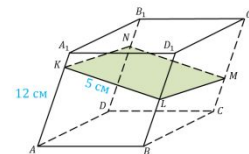
**Задача.** Доказать, что площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро.

**Доказательство.**

$$KL \perp BB_1 \Rightarrow KL \perp AA_1$$

$$AA_1 \parallel BB_1$$

$$KM \perp BB_1 \Rightarrow BB_1 \perp KLM$$



$$B_1 + KM \cdot BB_1 + ML \cdot BB_1 =$$