Размерность Минковского. Вычисление размерности

Понятие размерности

Интуитивно мы понимаем термин *размерность* как число координат, необходимых для задания положения точки внутри фигуры. Так, любая линия (например, окружность или прямая) одномерна – достаточно всего одной координаты, чтобы точно указать точку, а плоскость и поверхность шара двумерны. Но в математике такое «определение» не всегда работает хорошо: его трудно применить к очень большому числу разнообразных фигур и множеств, в том числе и к фракталам.
Поэтому *фрактальную размерность* определяют по-другому.

Допустим, что фигура F, размерность которой мы хотим найти, расположена на плоскости. А плоскость, в свою очередь, покрыта сеткой из квадратиков со стороной ε. Через N_ε обозначим число квадратиков, которые пересекаются с фигурой F (объединение всех таких квадратиков содержит в себе F). Ясно, что это число зависит от размера квадратиков: чем они меньше, тем больше их нужно, чтобы покрыть фигуру. Если эта зависимость выражается степенным законом: число N_ε пропорционально некоторой степени $(1/\varepsilon)^D$, то будем считать, что фигура F имеет размерность D (вполне может случится, что число D не целое).

Размерность Минковского

Определение, данное на прошлом слайде, и является определением фрактальной размерности по Минковскому. Для «хороших» фигур оно дает тот же результат, что и интуитивное представление о размерности.

В более общем случае размерность Минковского или грубая размерность ограниченного множества в метрическом пространстве равна

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N_\varepsilon}{-\ln \varepsilon},$$

где N_ε – минимальное число множеств диаметра ε, которыми можно покрыть наше множество.

Если предел не существует, то можно рассматривать верхний и нижний предел и говорить соответственно о верхней и нижней размерности Минковского.

Близким к размерности Минковского понятием является размерность Хаусдорфа. Во многих случаях эти размерности совпадают, хотя существуют множества для которых они различны.

Примеры

- Размерность отрезка равна 1, так как необходимо $[a/\varepsilon]$ отрезков длины ε, чтобы покрыть отрезок длины a. Таким образом

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln N_\varepsilon}{-\ln\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln a-\ln\varepsilon}{-\ln\varepsilon}=1.$$

- Размерность квадрата равна 2, так как число квадратиков с диагональю $1/n$, необходимых, чтобы покрыть квадрат со стороной a, ведет себя примерно как a^2n^2.
- Размерность кривой Коха равна $\ln 4/\ln 3$.

Свойства

- Размерность Минковского конечного объединения множеств равна максимуму из их размерностей. В отличие от размерности Хаусдорфа, это неверно для счётного объединения.
- Нижняя размерность Минковского любого множества больше либо равна его размерности Хаусдорфа.
- Размерность Минковского любого множества равна размерности Минковского его замыкания. Поэтому имеет смысл говорить лишь о размерностях Минковского замкнутых множеств.

Графическое изображение размерности Минковского