# Свойства пределов

**Лемма 3.2 (свойства конечных пределов)**

1. Функция $f(x)$ имеет конечный предел $a$ в точке $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде $f(x) = a + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция в точке $x_0$.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда

2. $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\big(\lambda f(x)\big) = \lambda \lim\limits_{x\to x_0} f(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}$;
4. $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;
5. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$, если $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) \neq 0$.

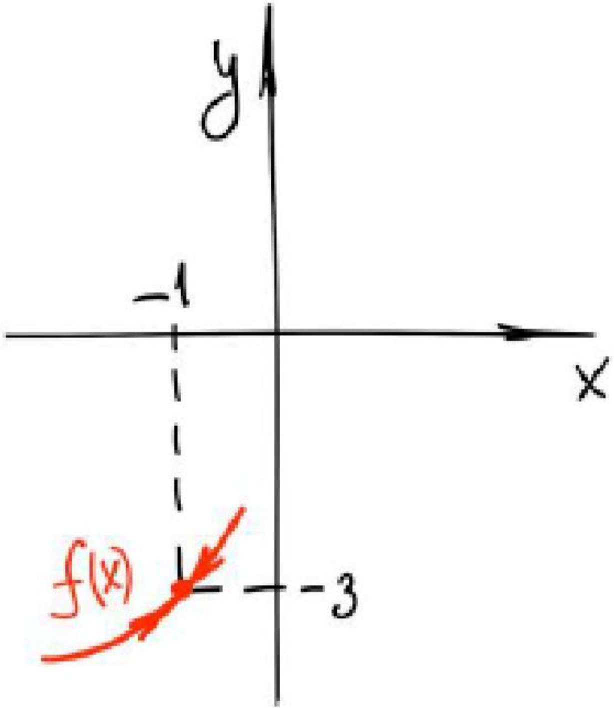
**Задача.** Найти предел функции $f(x)$ в точке $x_0$, используя график функции, свойства конечных пределов, бесконечно малых и бесконечно больших функций. Дать графическое и словесное описание предельного поведения функции.

1. $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+x+1}$, $x_0=-1$

$\to 1$

Графическое описание:

$$\lim_{x\to -1}\frac{\overset{\to -3}{3x}}{\underbrace{(x^2+x+1)}_{\to 1}}=\frac{-3}{1}=-3$$

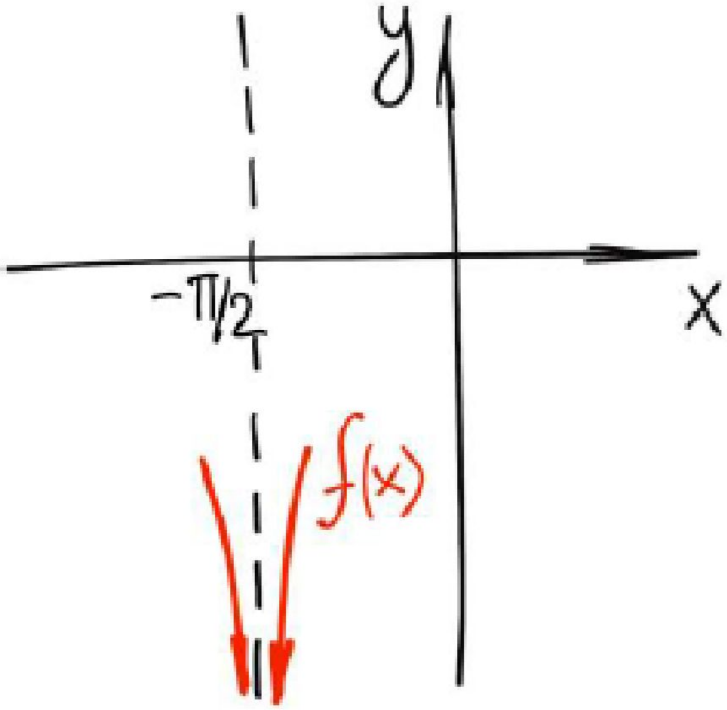



Словесное описание: значения $\dfrac{3x}{x^2+x+1}$ сколь угодно близки к -3, если $x$ достаточно близки к -1.

2. $f(x) = (x-\pi)\operatorname{tg}^2 x$, $x_0 = -\dfrac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to-\pi/2} \overbrace{\underbrace{(x-\pi)}_{\to -3\pi/2}}^{\text{отд. от } 0} \underbrace{\operatorname{tg}^2 x}_{\to+\infty} = -\infty$$

2. $f(x)=(x-\pi)\operatorname{tg}^2 x\,,\quad x_0=-\dfrac{\pi}{2}$




$$\lim_{x\to-\pi/2}\overbrace{\underbrace{(x-\pi)}_{\to-3\pi/2}}^{\text{отд. от }0}\underbrace{\operatorname{tg}^2 x}_{\to+\infty}=-\infty$$

График функции имеет вертикальную асимптоту $x=-\pi/2$.

Словесное описание: функция $f(x)=(x-\pi)\operatorname{tg}^2 x$ принимает сколь угодно большие отрицательные значения, если $x$ достаточно близки к $-\pi/2$.

3. $f(x) = \cos\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}$, $x_0 = \infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to 0}(\cos t - \sin t) = \lim_{t\to 0}\cos t - \lim_{t\to 0}\sin t = 1 - 0 = 1$$

3. $f(x) = \cos\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}$, $x_0 = \infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to 0}(\cos t - \sin t) = \lim_{t\to 0}\cos t - \lim_{t\to 0}\sin t = 1 - 0 = 1$$

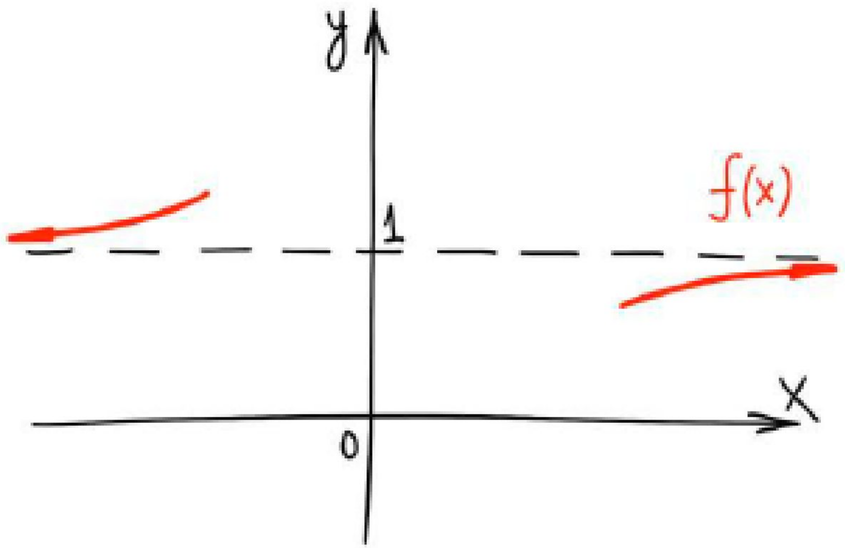



График функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$.

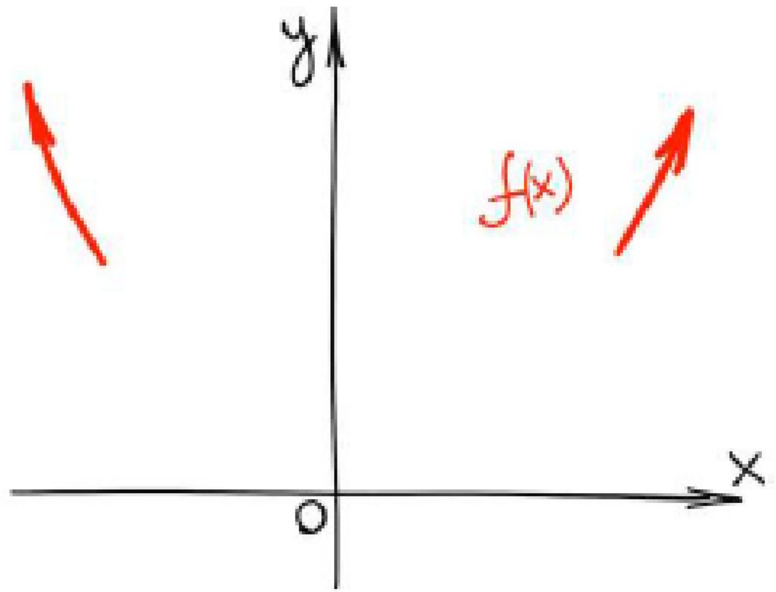
Словесное описание: значения функции $f(x) = \cos\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}$ сколь угодно близки к 1 при достаточно больших $x$.

4. $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$, $x_0=\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\to+\infty}+\underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{\to+\infty}\right)=+\infty$$

4. $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$, $x_0=\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\to+\infty}+\underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{\to+\infty}\right)=+\infty$$




Словесное описание: значения функции $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$ сколь угодно большие положительные при достаточно больших $x$.

5. $f(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{\ln x}, \quad x_0=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{\sin x+\cos x}^{\text{огр.}}}{\underset{\to+\infty}{\ln x}}=0$$

5. $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\ln x}$, $x_0 = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{\sin x + \cos x}^{\text{огр.}}}{\underbrace{\ln x}_{\to +\infty}} = 0$$

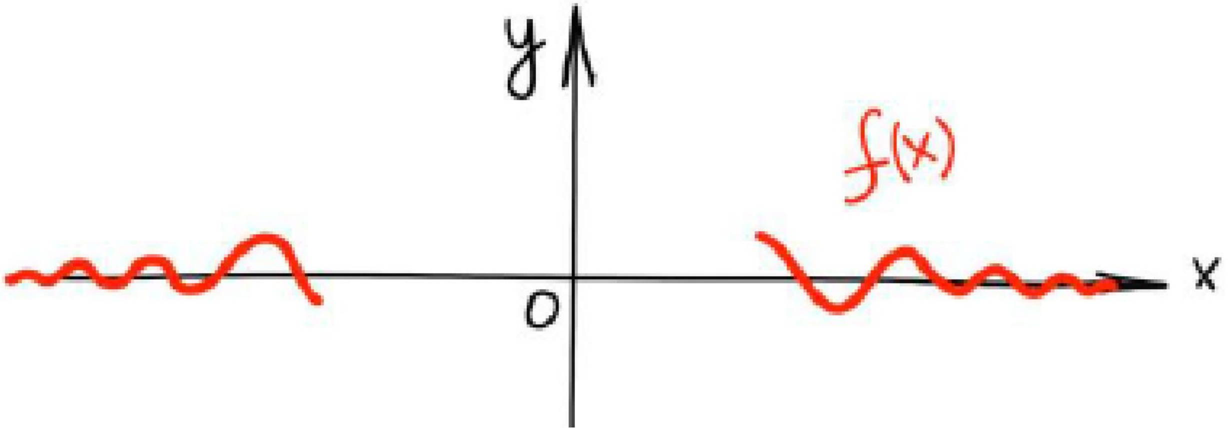



График функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$.

Словесное описание: значения $\dfrac{\sin x + \cos x}{\ln x}$ сколь угодно малы при достаточно больших положительных $x$.

6. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-4},\quad x_0=4$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\overset{\substack{\text{отд. от } 0\\ \to 9}}{2x+1}}{\underset{\to 0}{x-4}}=\infty$$

Уточним значения односторонних пределов:

$$x\to 4+0 \;\Rightarrow\; x-4\to +0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 4+0}\frac{\overset{>0}{2x+1}}{\underset{\to +0}{x-4}}=+\infty\,;$$

$$x\to 4-0 \;\Rightarrow\; x-4\to -0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 4-0}\frac{\overset{>0}{2x+1}}{\underset{\to -0}{x-4}}=-\infty\,.$$

6. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-4},\quad x_0=4$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\overset{\text{отд. от } 0}{\overset{\to 9}{2x+1}}}{\underset{\to 0}{x-4}}=\infty$$

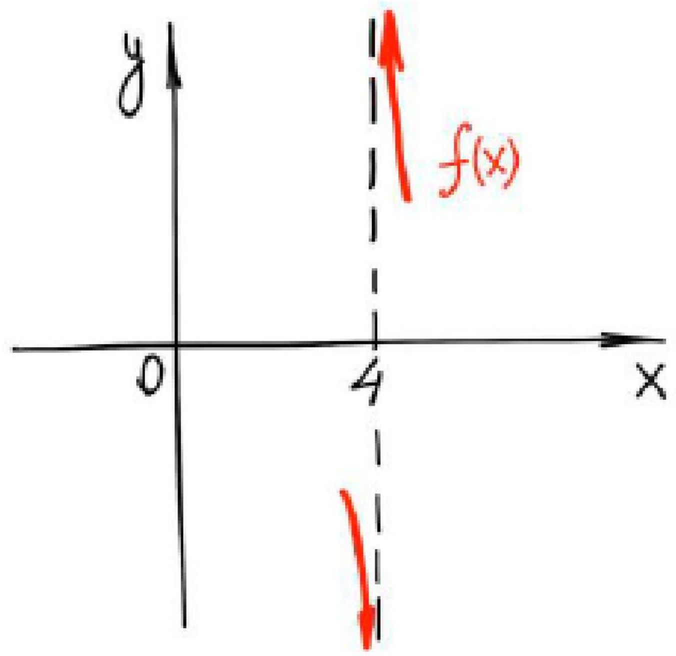



График функции имеет вертикальную асимптоту $x=4$.

Словесное описание: функция $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-4}$ принимает сколь угодно большие значения, если $x$ достаточно близки к $4$.

7. $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}, \quad x_0 = 0$

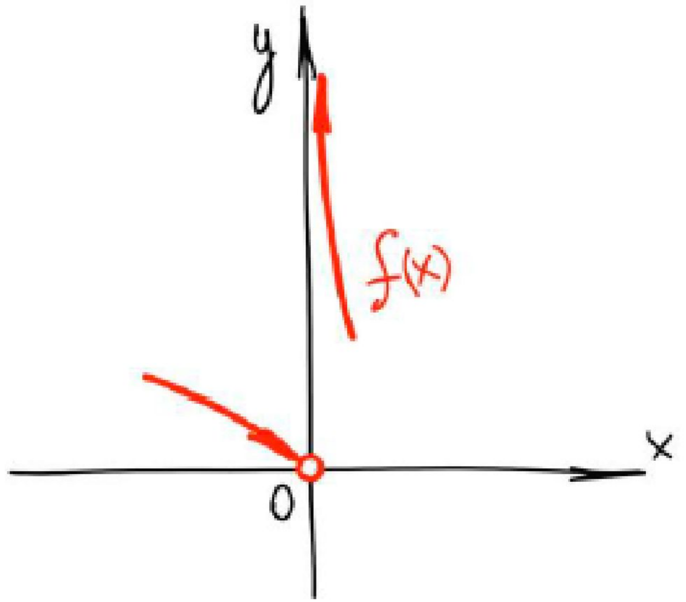
$$x \to +0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{x} \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to +0} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to +\infty} 2^t = +\infty \, ;$$

$$x \to -0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{x} \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to -0} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to -\infty} 2^t = 0 \, .$$

$$7.\quad f(x)=2^{\frac{1}{x}},\quad x_0=0$$

$$x\to+0\ \Rightarrow\ t=\frac{1}{x}\to+\infty\ \Rightarrow\ \lim_{x\to+0}2^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to+\infty}2^t=+\infty;$$

$$x\to-0\ \Rightarrow\ t=\frac{1}{x}\to-\infty\ \Rightarrow\ \lim_{x\to-0}2^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to-\infty}2^t=0.$$




Так как функция имеет разные односторонние пределы в точке $x_0=0$, то двустороннего предела в этой точке нет: $\lim\limits_{x\to0}2^{\frac{1}{x}}$ не существует.

График функции имеет вертикальную асимптоту $x=0$.

Словесное описание: значения $2^{\frac{1}{x}}$ сколь угодно большие положительные при достаточно малых положительных $x$; значения $2^{\frac{1}{x}}$ сколь угодно малы при достаточно малых отрицательных $x$.

# НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

<table>
<tr>
<td>$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\overset{\to\infty}{f(x)}}{\underset{\to\infty}{g(x)}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$</td>
<td>$\lim\limits_{x\to x_0}(\underset{\to 0}{f(x)}\cdot \underset{\to\infty}{g(x)})=[0\cdot\infty]$</td>
<td rowspan="2">$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\underset{\to 1}{f(x)}\right)^{\overset{\to\infty}{g(x)}}=\left[1^{\infty}\right]$<br>$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\underset{\to 0}{f(x)}\right)^{\overset{\to 0}{g(x)}}=\left[0^{0}\right]$<br>$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\underset{\to\infty}{f(x)}\right)^{\overset{\to 0}{g(x)}}=\left[\infty^{0}\right]$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\overset{\to 0}{f(x)}}{\underset{\to 0}{g(x)}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$</td>
<td>$\lim\limits_{x\to x_0}(\underset{\to +\infty}{f(x)}+\underset{\to -\infty}{g(x)})=[\infty-\infty]$</td>
</tr>
</table>

## 3.2 Предельный переход в неравенствах, замечательные пределы

**Лемма 3.3**

Пусть $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ и $f(x) \le g(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки $x_0$. Тогда если существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x_0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Замечания:

$$f(x) \ge \alpha \quad \forall x \in \breve{U}_\delta(x_0) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) \ge \alpha\,;$$

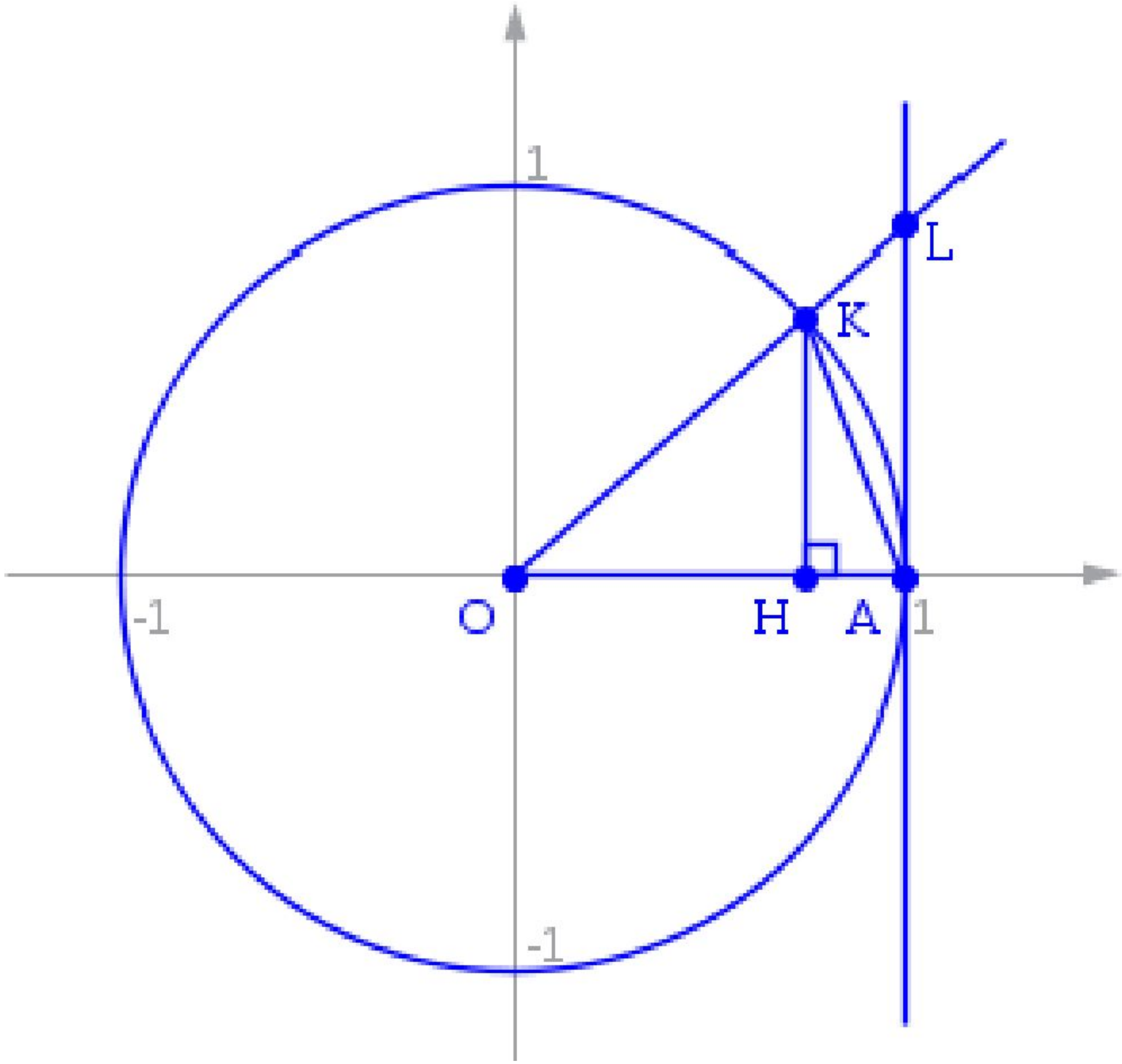
$$f(x) \le \beta \quad \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) \le \beta\,.$$

$$f(x) < g(x) \quad \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) \le \lim_{x \to x_0} g(x)$$

**Теорема 3.4**

I. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ – первый замечательный предел;

II. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ – второй замечательный предел.

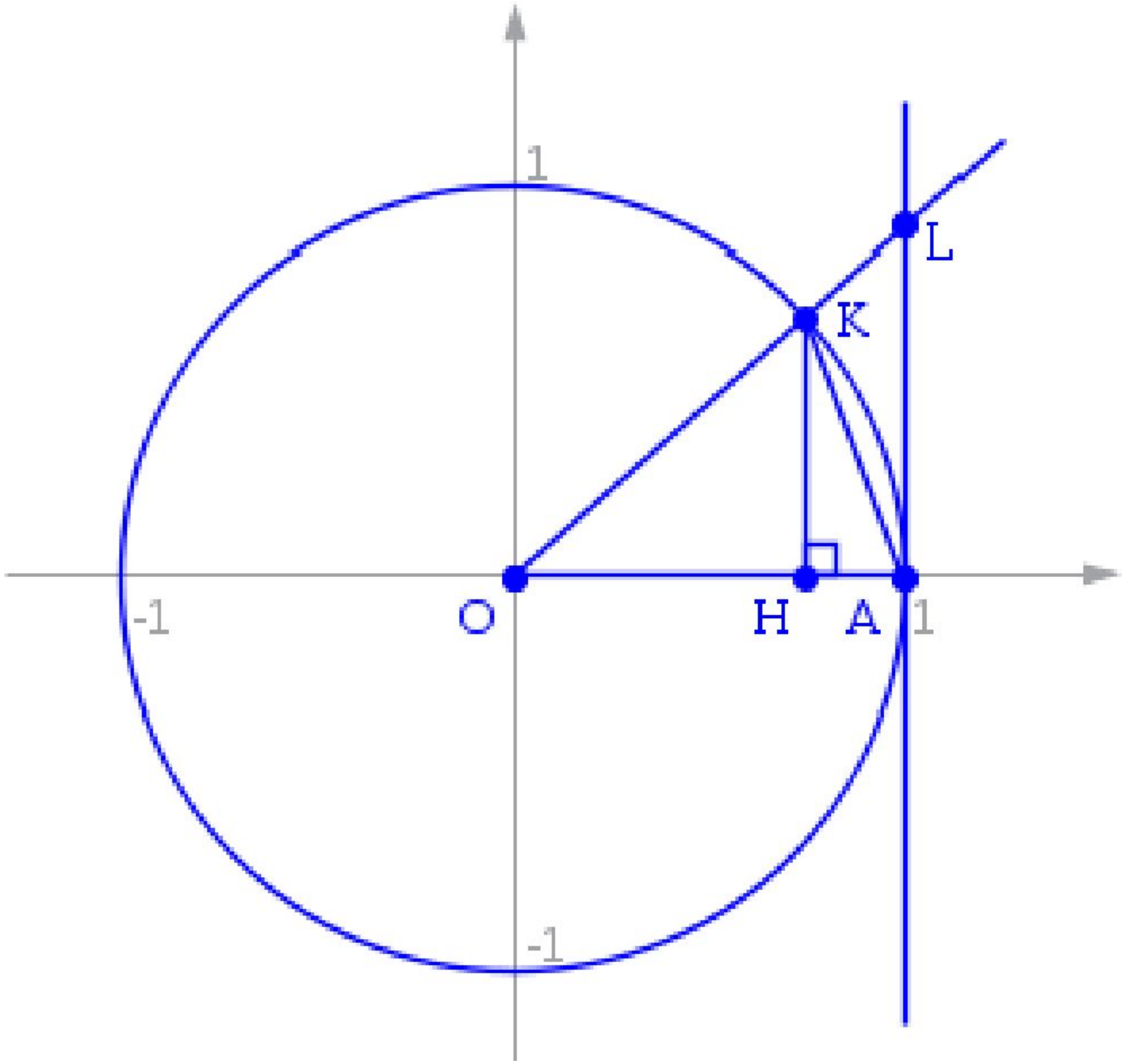



Обозначим

$S_1$ – площадь треугольника $OKA$,

$S_2$ – площадь сектора круга $OKA$,

$S_3$ – площадь треугольника $OLA$.




Обозначим

$S_1$ – площадь треугольника $OKA$,

$S_2$ – площадь сектора круга $OKA$,

$S_3$ – площадь треугольника $OLA$.

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\underbrace{\lim_{x \to +0} \cos x}_{=1} \le \lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} \le \underbrace{\lim_{x \to +0} 1}_{=1} \quad \Rightarrow \quad 1 \le \lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} \le 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

II. $$\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

# §4. Сравнение бесконечно малых (больших) величин

**Определение 4.1**

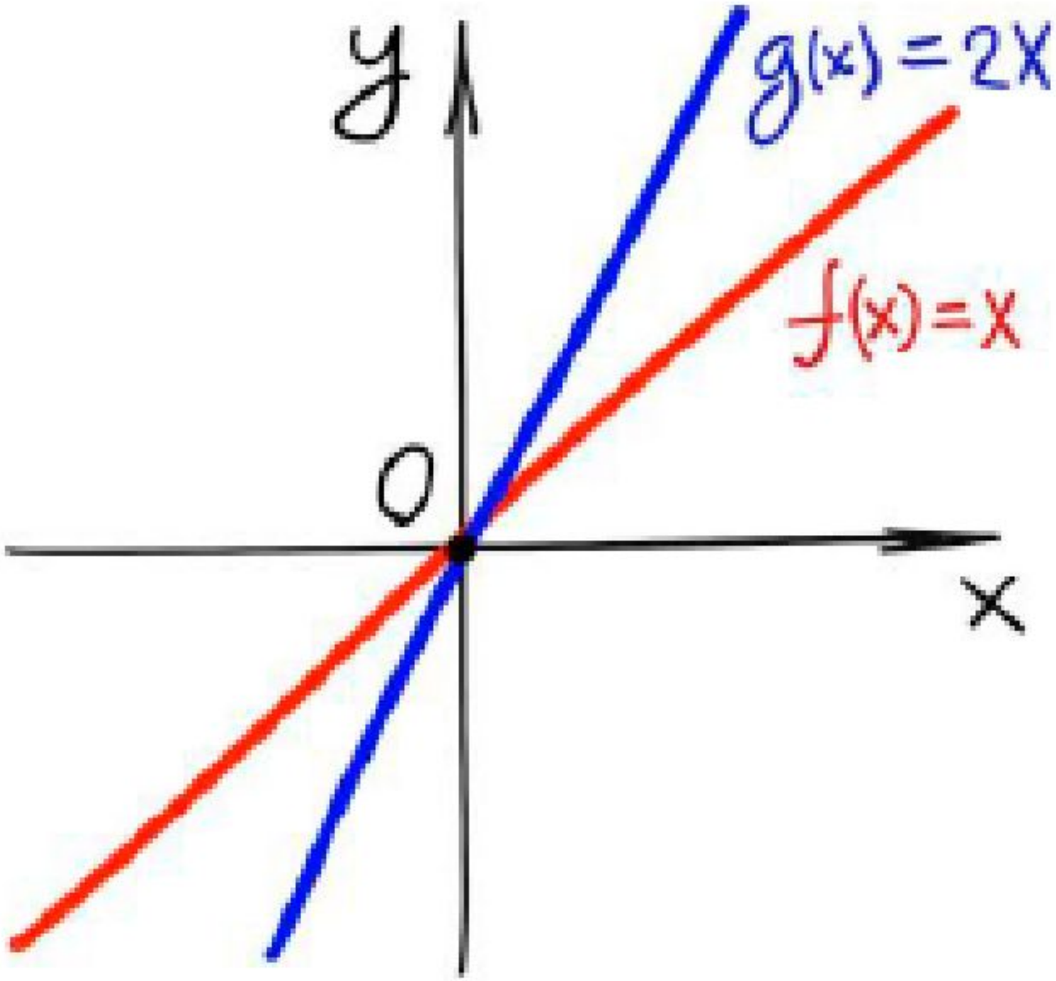
Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые функции в точке $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, то пишут $f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$. Говорят, что $f(x)$ – бесконечно малая *более высокого порядка,* чем $g(x)$ в точке $x_0$. Это значит, что $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$ на порядок быстрее, чем $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, то говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют *одинаковый порядок малости* в точке $x_0$.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ не существует, то говорят, что функции не сравнимы в точке $x_0$.

1) $f(x) = x$, $g(x) = 2x$;



2) $f(x) = x^2$, $g(x) = x$.