

# Свойства пределов

### Лемма 3.2 (свойства конечных пределов)

1. Функция  $f(x)$  имеет конечный предел  $a$  в точке  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$  тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде  $f(x) = a + \alpha(x)$ , где  $\alpha(x)$  – бесконечно малая функция в точке  $x_0$ .

Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют конечные пределы в точке  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ . Тогда

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f(x)) = \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad \lambda \in \mathbb{R};$$

$$4. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$5. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}, \quad \text{если } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq 0.$$

**Задача.** Найти предел функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ , используя график функции, свойства конечных пределов, бесконечно малых и бесконечно больших функций. Дать графическое и словесное описание предельного поведения функции.

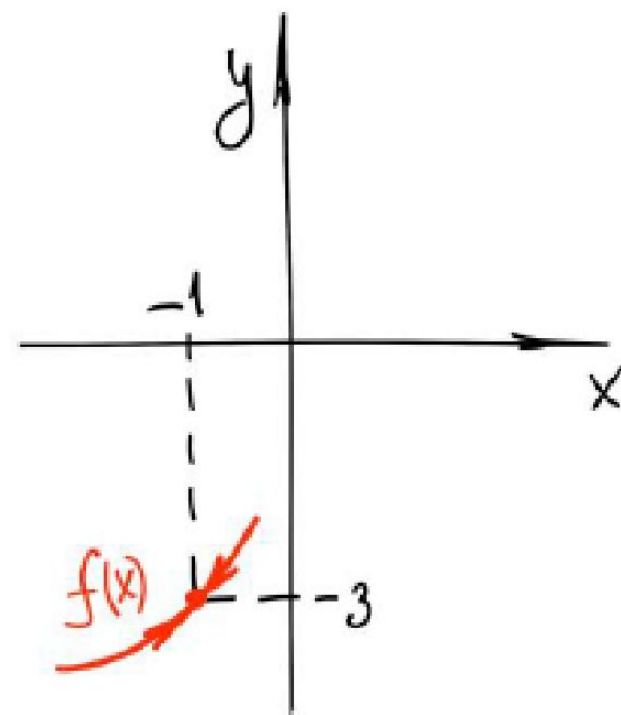
1.  $f(x) = \frac{3x}{x^2 + x + 1}, x_0 = -1$

→1

Графическое описание:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\overset{\rightarrow -3}{3x}}{\underbrace{(x^2 + x + 1)}_{\rightarrow 1}} = \frac{-3}{1} = -3$$

Словесное описание: значения  $\frac{3x}{x^2 + x + 1}$  сколь угодно близки к -3, если  $x$  достаточно близки к -1.



$$2. f(x) = (x - \pi) \operatorname{tg}^2 x, \quad x_0 = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\pi/2} \overbrace{(x - \pi)}^{\text{отл. от } 0} \operatorname{tg}^2 x = -\infty$$

$\rightarrow -3\pi/2 \quad \rightarrow +\infty$

$$2. f(x) = (x - \pi) \operatorname{tg}^2 x, \quad x_0 = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\pi/2} \overbrace{(x - \pi)}^{\text{отд. от 0}} \operatorname{tg}^2 x = -\infty$$

$\rightarrow -3\pi/2 \quad \rightarrow +\infty$

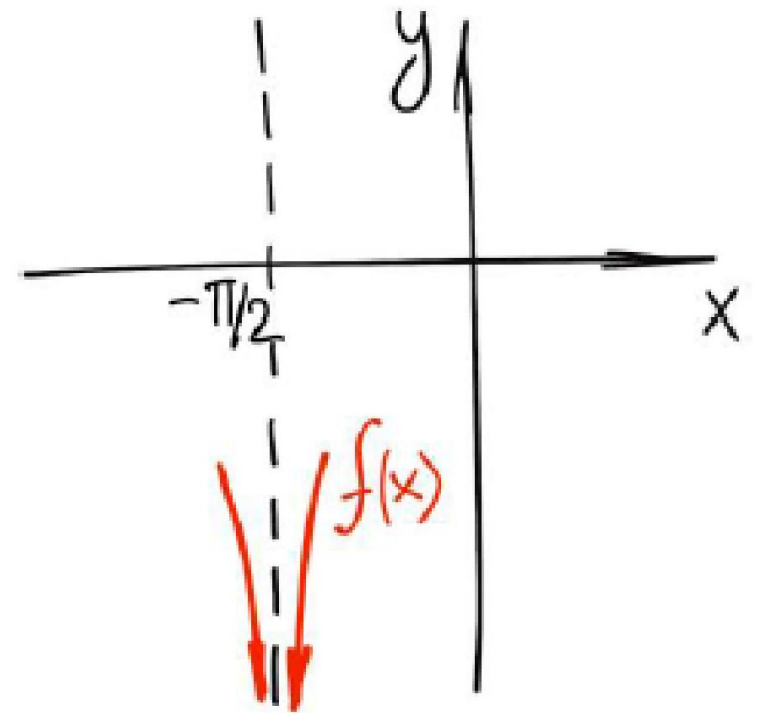


График функции имеет вертикальную асимптоту  $x = -\pi/2$ .

Словесное описание: функция  $f(x) = (x - \pi) \operatorname{tg}^2 x$  принимает сколь угодно большие отрицательные значения, если  $x$  достаточно близки к  $-\pi/2$ .

$$3. \quad f(x) = \cos \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x}, \quad x_0 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} (\cos t - \sin t) = \lim_{t \rightarrow 0} \cos t - \lim_{t \rightarrow 0} \sin t = 1 - 0 = 1$$

$$3. \quad f(x) = \cos \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x}, \quad x_0 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} (\cos t - \sin t) = \lim_{t \rightarrow 0} \cos t - \lim_{t \rightarrow 0} \sin t = 1 - 0 = 1$$

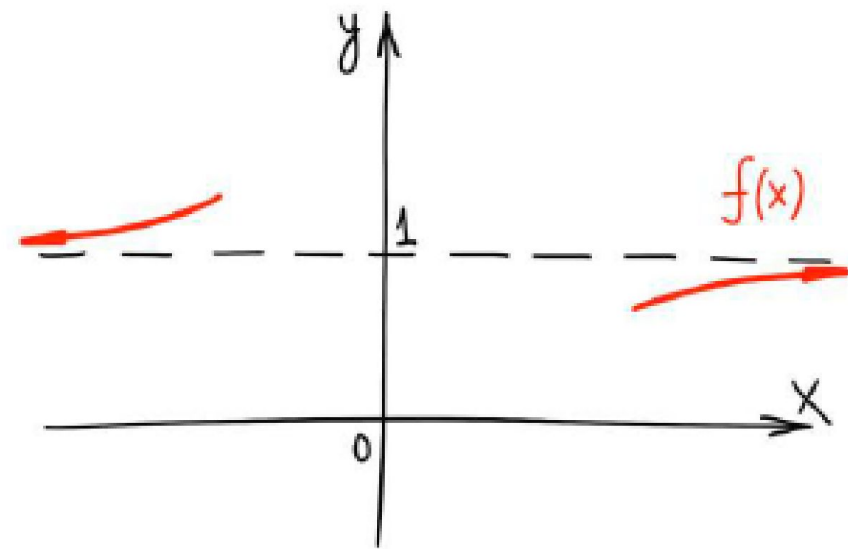


График функции имеет горизонтальную асимптоту  $y = 1$ .

Словесное описание: значения функции  $f(x) = \cos \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x}$  сколь угодно близки к 1 при достаточно больших  $x$ .

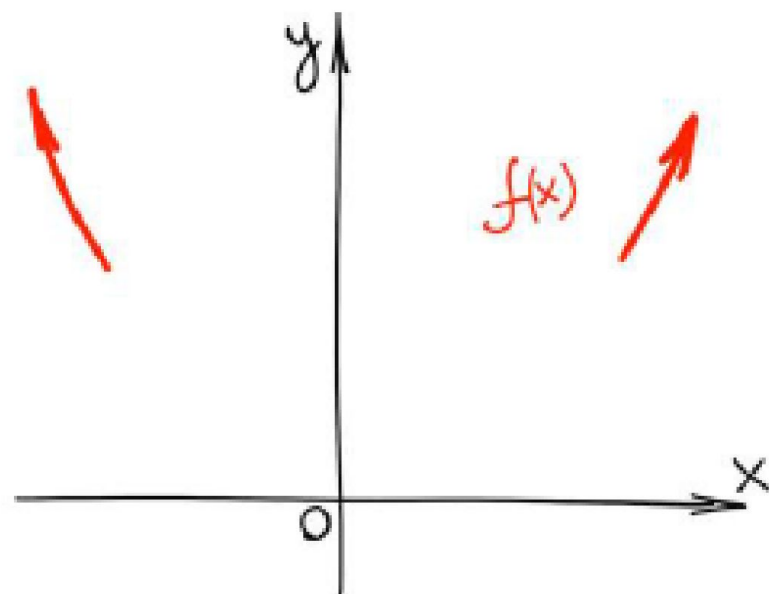
$$4. f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}, \quad x_0 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \underbrace{\sqrt{x^2 + 1}}_{\rightarrow +\infty} + \underbrace{\sqrt{x^2 - 1}}_{\rightarrow +\infty} \right) = +\infty.$$



$$4. f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}, \quad x_0 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \underbrace{\sqrt{x^2 + 1}}_{\rightarrow +\infty} + \underbrace{\sqrt{x^2 - 1}}_{\rightarrow +\infty} \right) = +\infty$$



Словесное описание: значения функции  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}$  сколь угодно большие положительные при достаточно больших  $x$ .

$$5. f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\ln x}, \quad x_0 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{\sin x + \cos x}^{\text{огр.}}}{\underset{\rightarrow +\infty}{\ln x}} = 0$$

$$5. f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\ln x}, \quad x_0 = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ \ln x \rightarrow +\infty}} \overbrace{\frac{\sin x + \cos x}{\ln x}}^{\text{огр.}} = 0$$

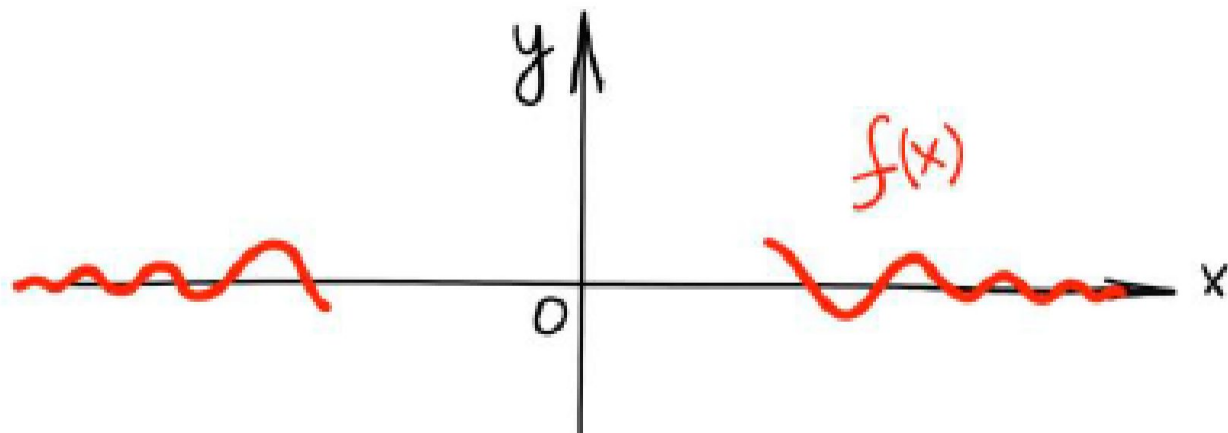


График функции имеет горизонтальную асимптоту  $y = 0$ .

Словесное описание: значения  $\frac{\sin x + \cos x}{\ln x}$  сколь угодно малы при достаточно больших положительных  $x$ .

$$6. \quad f(x) = \frac{2x+1}{x-4}, \quad x_0 = 4$$

отд. от 0  
→9

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ \rightarrow 0}} \frac{2x+1}{x-4} = \infty$$

Уточним значения односторонних пределов:

$$x \rightarrow 4+0 \Rightarrow x-4 \rightarrow +0 \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 4+0 \\ \rightarrow +0 \\ >0}} \frac{2x+1}{x-4} = +\infty;$$

$$x \rightarrow 4-0 \Rightarrow x-4 \rightarrow -0 \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 4-0 \\ \rightarrow -0}} \frac{2x+1}{x-4} = -\infty.$$

$$6. f(x) = \frac{2x+1}{x-4}, \quad x_0 = 4$$

отд. от 0  
→9

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ \rightarrow 0}} \frac{2x+1}{x-4} = \infty$$

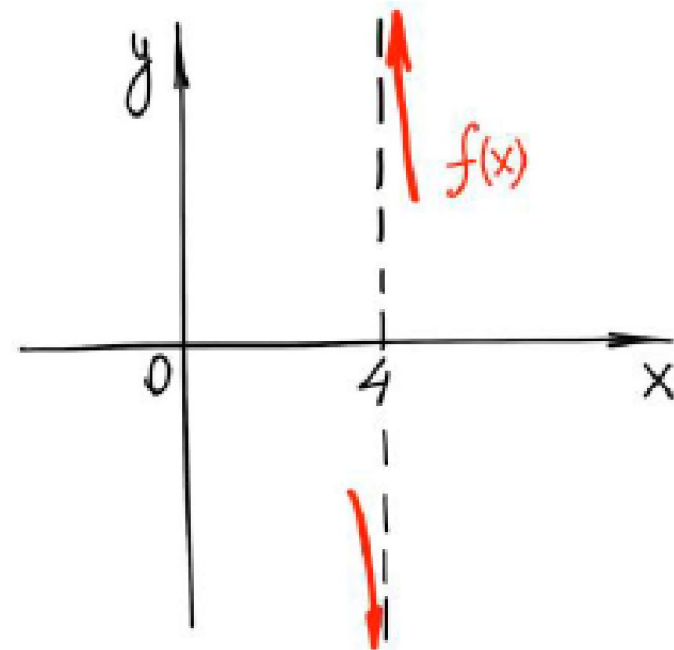


График функции имеет вертикальную асимптоту  $x = 4$ .

Словесное описание: функция  $f(x) = \frac{2x+1}{x-4}$  принимает сколь угодно большие значения, если  $x$  достаточно близки к 4.

$$7. \quad f(x) = 2^{\frac{1}{x}}, \quad x_0 = 0$$

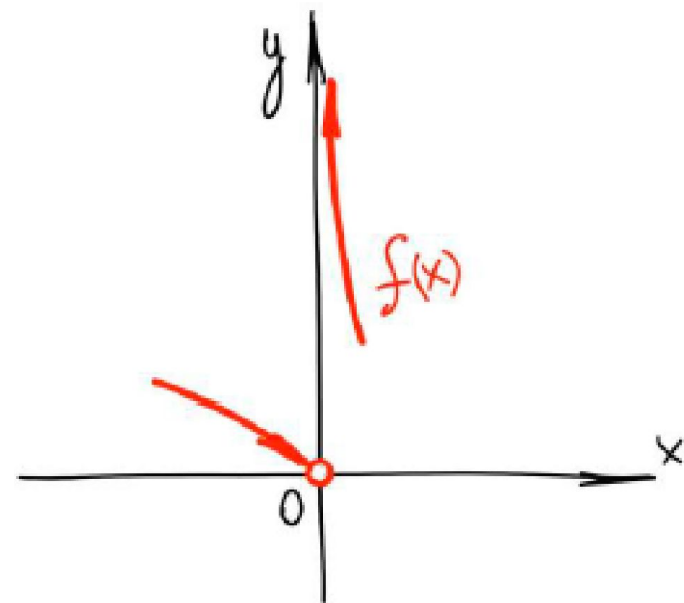
$$x \rightarrow +0 \Rightarrow t = \frac{1}{x} \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +0} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 2^t = +\infty;$$

$$x \rightarrow -0 \Rightarrow t = \frac{1}{x} \rightarrow -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -0} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} 2^t = 0.$$

$$7. f(x) = 2^{\frac{1}{x}}, \quad x_0 = 0$$

$$x \rightarrow +0 \Rightarrow t = \frac{1}{x} \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +0} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 2^t = +\infty;$$

$$x \rightarrow -0 \Rightarrow t = \frac{1}{x} \rightarrow -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -0} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} 2^t = 0.$$



Так как функция имеет разные односторонние пределы в точке  $x_0 = 0$ , то двустороннего предела в этой точке нет:  $\lim_{x \rightarrow 0} 2^{\frac{1}{x}}$  не существует.

График функции имеет вертикальную асимптоту  $x = 0$ .

Словесное описание: значения  $2^{\frac{1}{x}}$  сколь угодно большие положительные при достаточно малых положительных  $x$ ; значения  $2^{\frac{1}{x}}$  сколь угодно малы при достаточно малых отрицательных  $x$ .

# НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = [0 \cdot \infty]$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( f(x) \right)^{g(x)} = [1^{\infty}]$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( f(x) \right)^{g(x)} = [0^0]$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( f(x) \right)^{g(x)} = [\infty^0]$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[ \frac{0}{0} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = [\infty - \infty]$$



## 3.2 Предельный переход в неравенствах, замечательные пределы

### Лемма 3.3

Пусть  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$  и  $f(x) \leq g(x)$  в некоторой проколотой окрестности точки  $x_0$ . Тогда если существуют пределы функций  $f(x)$  и  $g(x)$  в точке  $x_0$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

Замечания:

$$f(x) \geq \alpha \quad \forall x \in \check{U}_\delta(x_0) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \alpha ;$$

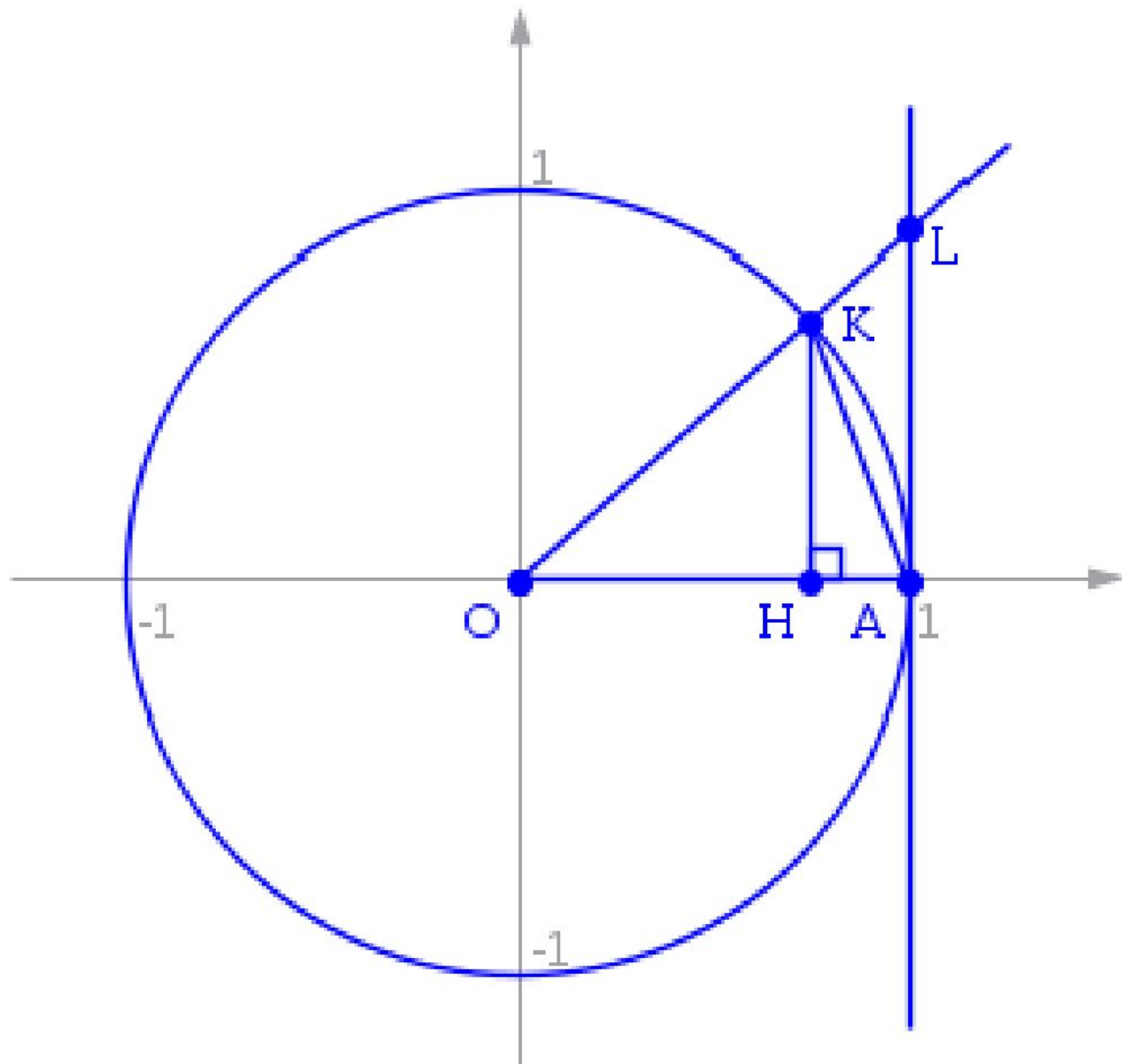
$$f(x) \leq \beta \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \beta .$$

$$f(x) < g(x) \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

### Теорема 3.4

I.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  – первый замечательный предел;

II.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$  – второй замечательный предел.

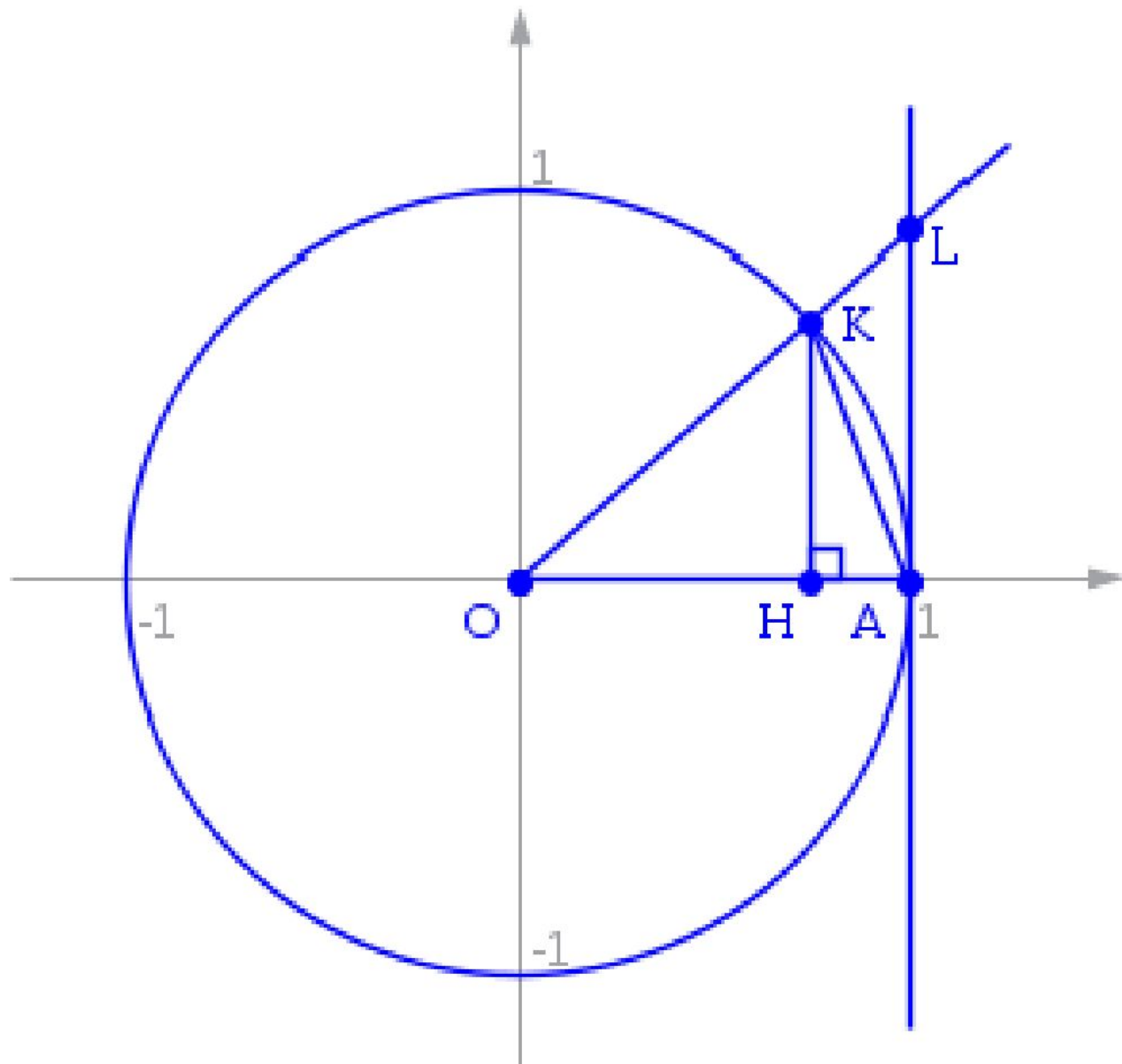


Обозначим

$S_1$  – площадь треугольника  $OKA$ ,

$S_2$  – площадь сектора круга  $OKA$ ,

$S_3$  – площадь треугольника  $OLA$ .



Обозначим

$S_1$  – площадь треугольника  $OKA$ ,

$S_2$  – площадь сектора круга  $OKA$ ,

$S_3$  – площадь треугольника  $OLA$ .

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\underbrace{\lim_{x \rightarrow +0} \cos x}_{=1} \leq \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} \leq \underbrace{\lim_{x \rightarrow +0} 1}_{=1} \Rightarrow 1 \leq \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} \leq 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\text{II. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

## §4. Сравнение бесконечно малых (больших) величин

### Определение 4.1

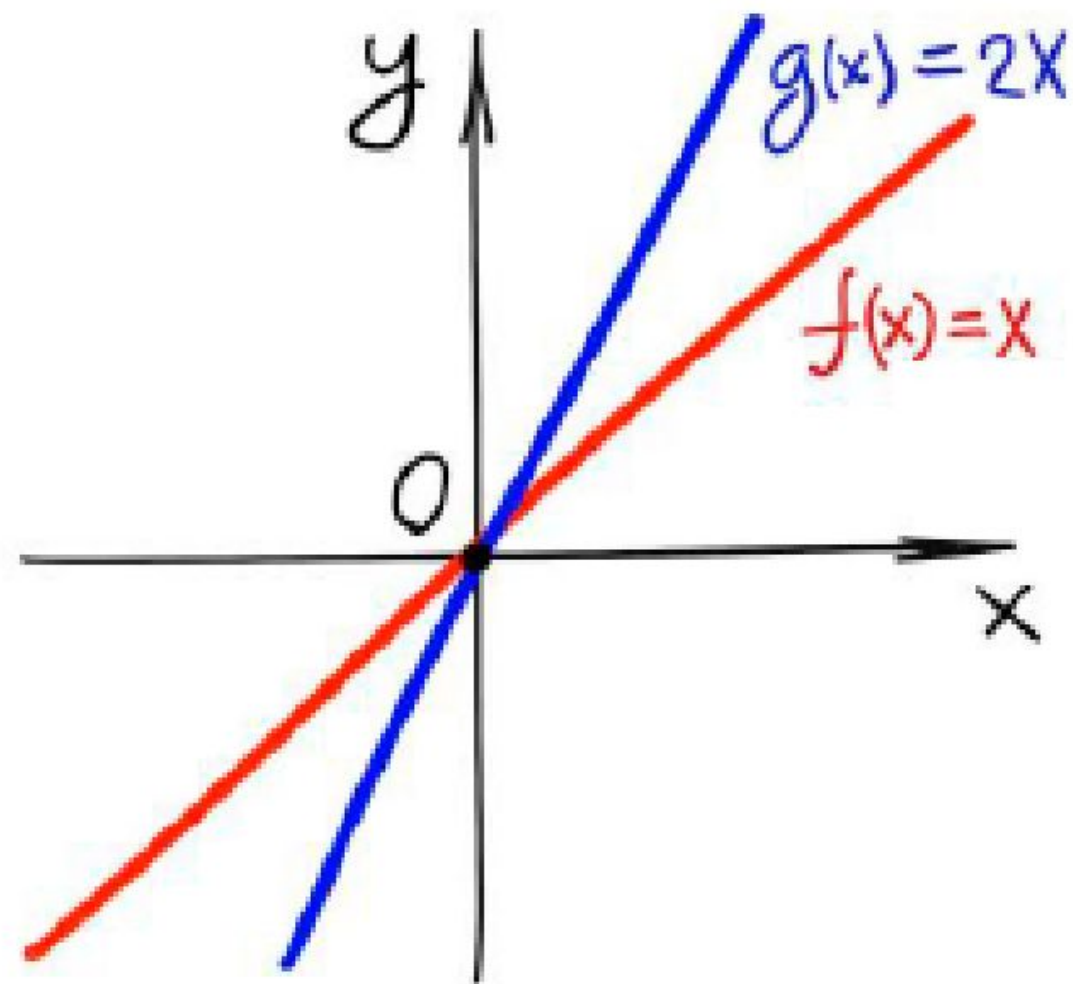
Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  – бесконечно малые функции в точке  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ .

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ , то пишут  $f(x) = o(g(x))$  при  $x \rightarrow x_0$ . Говорят, что  $f(x)$  – бесконечно малая *более высокого порядка*, чем  $g(x)$  в точке  $x_0$ . Это значит, что  $f(x) \rightarrow 0$  на порядок быстрее, чем  $g(x) \rightarrow 0$ .

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , то говорят, что функции  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют *одинаковый порядок малости* в точке  $x_0$ .

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  не существует, то говорят, что функции не сравнимы в точке  $x_0$ .

1)  $f(x) = x$ ,  $g(x) = 2x$ ;





2)  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x$ .

