Свойства пределов

Лемма 3.2 (свойства конечных пределов)

1. Функция $f(x)$ имеет конечный предел a в точке $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде $f(x) = a + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция в точке x_0.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда

2. $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\big(\lambda f(x)\big) = \lambda \lim\limits_{x\to x_0} f(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}$;
4. $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;
5. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$, если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \neq 0$.

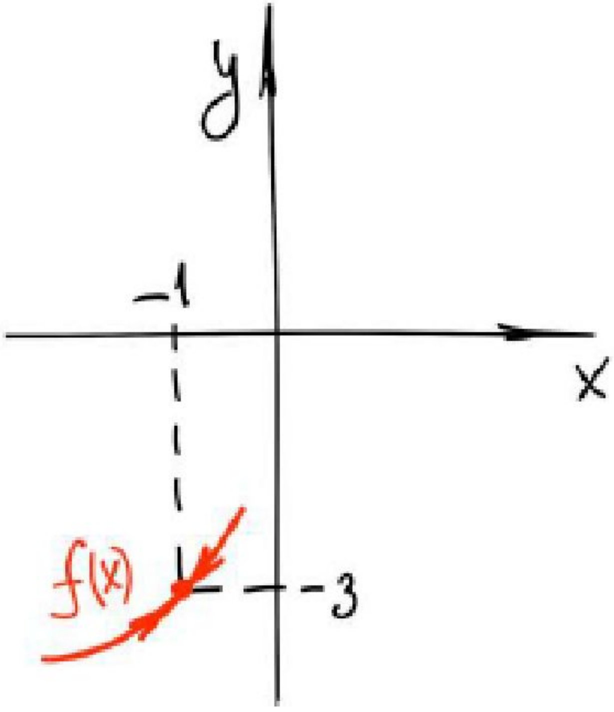
Задача. Найти предел функции $f(x)$ в точке x_0, используя график функции, свойства конечных пределов, бесконечно малых и бесконечно больших функций. Дать графическое и словесное описание предельного поведения функции.

1. $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + x + 1}$, $x_0 = -1$

$\to 1$

Графическое описание:

$$\lim_{x \to -1} \frac{\overset{\to -3}{3x}}{\underbrace{(x^2 + x + 1)}_{\to 1}} = \frac{-3}{1} = -3$$



Словесное описание: значения $\dfrac{3x}{x^2 + x + 1}$ сколь угодно близки к -3, если x достаточно близки к -1.

2. $f(x) = (x-\pi)\operatorname{tg}^2 x$, $x_0 = -\dfrac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to-\pi/2} \underbrace{\overbrace{(x-\pi)}^{\text{отд. от } 0}}_{\to -3\pi/2} \underbrace{\operatorname{tg}^2 x}_{\to+\infty} = -\infty$$

2. $f(x)=(x-\pi)\operatorname{tg}^2 x\,,\quad x_0=-\dfrac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to-\pi/2}\underbrace{\overbrace{(x-\pi)}^{\text{отд. от }0}}_{\to-3\pi/2}\underbrace{\operatorname{tg}^2 x}_{\to+\infty}=-\infty$$

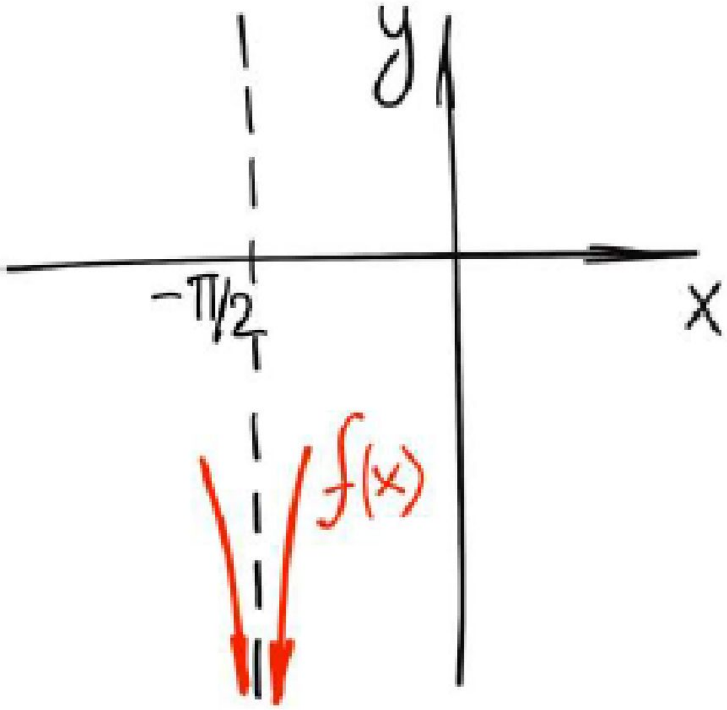


График функции имеет вертикальную асимптоту $x=-\pi/2$.

Словесное описание: функция $f(x)=(x-\pi)\operatorname{tg}^2 x$ принимает сколь угодно большие отрицательные значения, если x достаточно близки к $-\pi/2$.

3. $f(x)=\cos\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}$, $x_0=\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to 0}(\cos t-\sin t)=\lim_{t\to 0}\cos t-\lim_{t\to 0}\sin t=1-0=1$$

3. $f(x)=\cos\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}$, $x_0=\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to 0}(\cos t-\sin t)=\lim_{t\to 0}\cos t-\lim_{t\to 0}\sin t=1-0=1$$

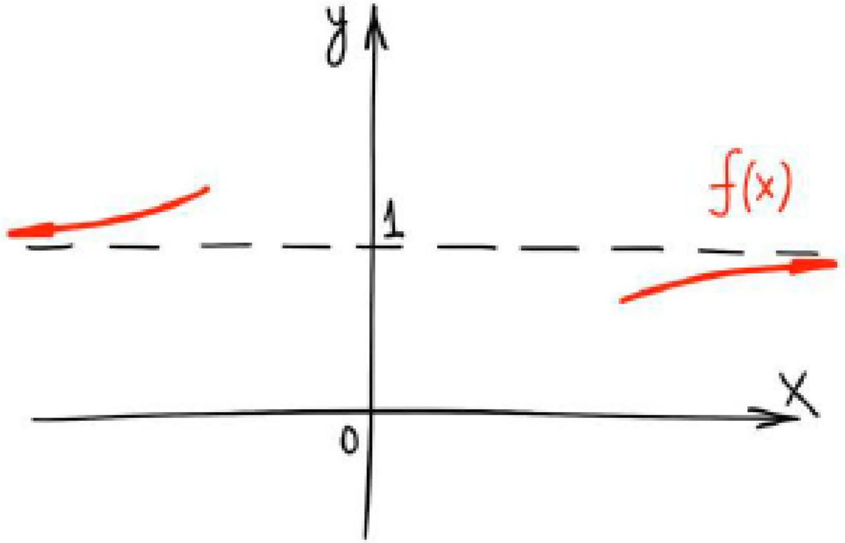


График функции имеет горизонтальную асимптоту $y=1$.

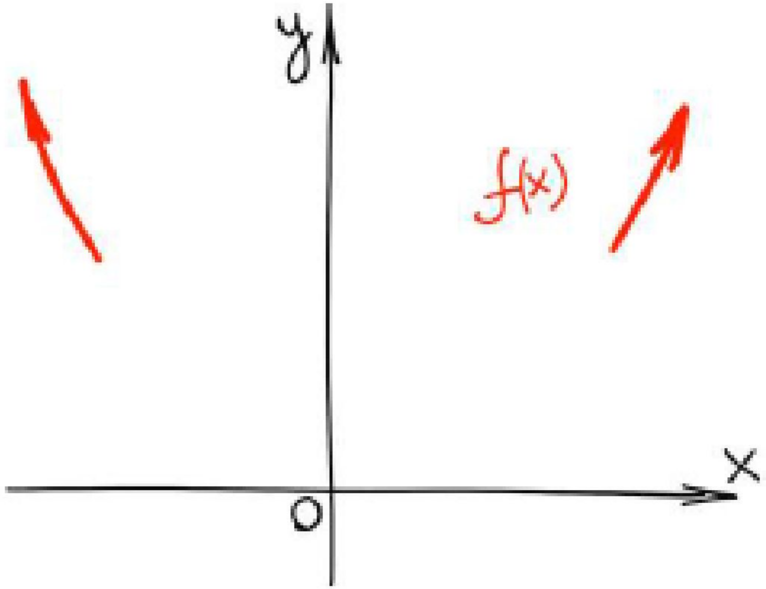
Словесное описание: значения функции $f(x)=\cos\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}$ сколь угодно близки к 1 при достаточно больших x.

4. $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$, $x_0=\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\to+\infty}+\underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{\to+\infty}\right)=+\infty$$

4. $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$, $x_0=\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\to+\infty}+\underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{\to+\infty}\right)=+\infty$$



Словесное описание: значения функции $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$ сколь угодно большие положительные при достаточно больших x.

5. $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\ln x}, \quad x_0 = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{\sin x + \cos x}^{\text{огр.}}}{\underset{\to +\infty}{\ln x}} = 0$$

5. $f(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{\ln x}, \quad x_0=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{\sin x+\cos x}^{\text{огр.}}}{\underbrace{\ln x}_{\to+\infty}}=0$$

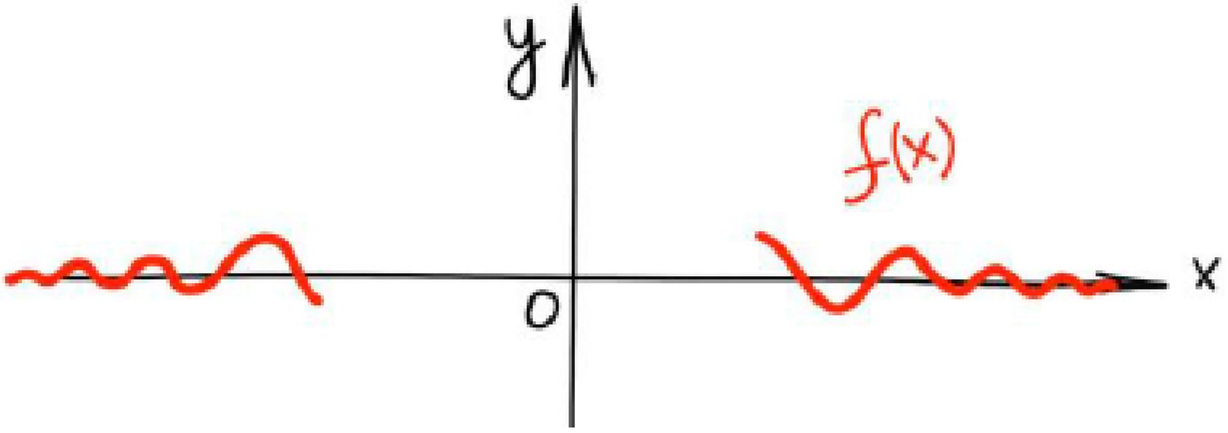


График функции имеет горизонтальную асимптоту $y=0$.

Словесное описание: значения $\dfrac{\sin x+\cos x}{\ln x}$ сколь угодно малы при достаточно больших положительных x.

6. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-4},\ \ x_0=4$

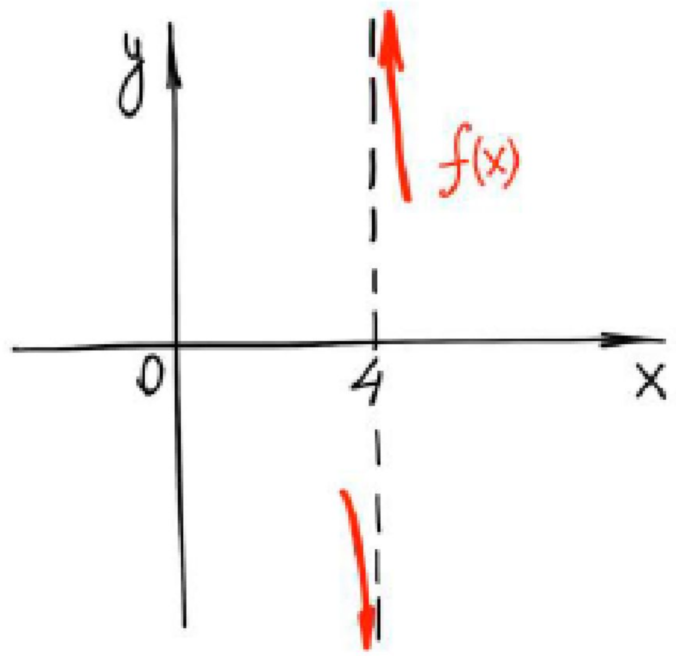
$$\lim_{x\to 4}\frac{\overset{\text{отд. от }0}{\overset{\to 9}{2x+1}}}{\underset{\to 0}{x-4}}=\infty$$

Уточним значения односторонних пределов:

$$x\to 4+0\ \Rightarrow\ x-4\to +0\ \Rightarrow\ \lim_{x\to 4+0}\frac{\overset{>0}{2x+1}}{\underset{\to +0}{x-4}}=+\infty;$$

$$x\to 4-0\ \Rightarrow\ x-4\to -0\ \Rightarrow\ \lim_{x\to 4-0}\frac{\overset{>0}{2x+1}}{\underset{\to -0}{x-4}}=-\infty.$$

6. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-4},\quad x_0=4$



$$\lim_{x\to 4}\frac{\overset{\substack{\text{отд. от } 0\\ \to 9}}{2x+1}}{\underset{\to 0}{x-4}}=\infty$$

График функции имеет вертикальную асимптоту $x=4$.

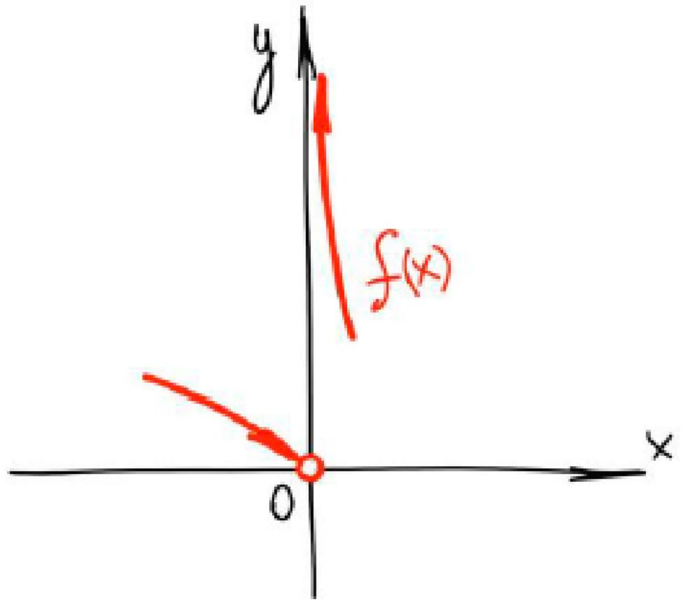
Словесное описание: функция $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-4}$ принимает сколь угодно большие значения, если x достаточно близки к 4.

$$7. \quad f(x) = 2^{\frac{1}{x}}, \quad x_0 = 0$$

$$x \to +0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{x} \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to +0} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to +\infty} 2^t = +\infty;$$

$$x \to -0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{x} \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to -0} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to -\infty} 2^t = 0.$$

7. $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}, \quad x_0 = 0$



$$x \to +0 \;\Rightarrow\; t = \frac{1}{x} \to +\infty \;\Rightarrow\; \lim_{x \to +0} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to +\infty} 2^t = +\infty;$$

$$x \to -0 \;\Rightarrow\; t = \frac{1}{x} \to -\infty \;\Rightarrow\; \lim_{x \to -0} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to -\infty} 2^t = 0.$$

Так как функция имеет разные односторонние пределы в точке $x_0 = 0$, то двустороннего предела в этой точке нет: $\lim\limits_{x \to 0} 2^{\frac{1}{x}}$ не существует.

График функции имеет вертикальную асимптоту $x = 0$.

Словесное описание: значения $2^{\frac{1}{x}}$ сколь угодно большие положительные при достаточно малых положительных x; значения $2^{\frac{1}{x}}$ сколь угодно малы при достаточно малых отрицательных x.

НЕОПРЕДЕЛЕННО СТИ

<table>
<tr>
<td>$$\lim_{x\to x_0}\frac{\overset{\to\infty}{f(x)}}{\underset{\to\infty}{g(x)}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$</td>
<td>$$\lim_{x\to x_0}(\underset{\to 0}{f(x)}\cdot\underset{\to\infty}{g(x)})=[0\cdot\infty]$$</td>
<td rowspan="2">$$\lim_{x\to x_0}\left(\underset{\to 1}{f(x)}\right)^{\overset{\to\infty}{g(x)}}=\left[1^{\infty}\right]$$
$$\lim_{x\to x_0}\left(\underset{\to 0}{f(x)}\right)^{\overset{\to 0}{g(x)}}=\left[0^{0}\right]$$
$$\lim_{x\to x_0}\left(\underset{\to\infty}{f(x)}\right)^{\overset{\to 0}{g(x)}}=\left[\infty^{0}\right]$$</td>
</tr>
<tr>
<td>$$\lim_{x\to x_0}\frac{\overset{\to 0}{f(x)}}{\underset{\to 0}{g(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right]$$</td>
<td>$$\lim_{x\to x_0}(\underset{\to +\infty}{f(x)}+\underset{\to -\infty}{g(x)})=[\infty-\infty]$$</td>
</tr>
</table>

3.2 Предельный переход в неравенствах, замечательные пределы

Лемма 3.3

Пусть $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ и $f(x) \le g(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Тогда если существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Замечания:

$$f(x) \ge \alpha \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) \ge \alpha\,;$$

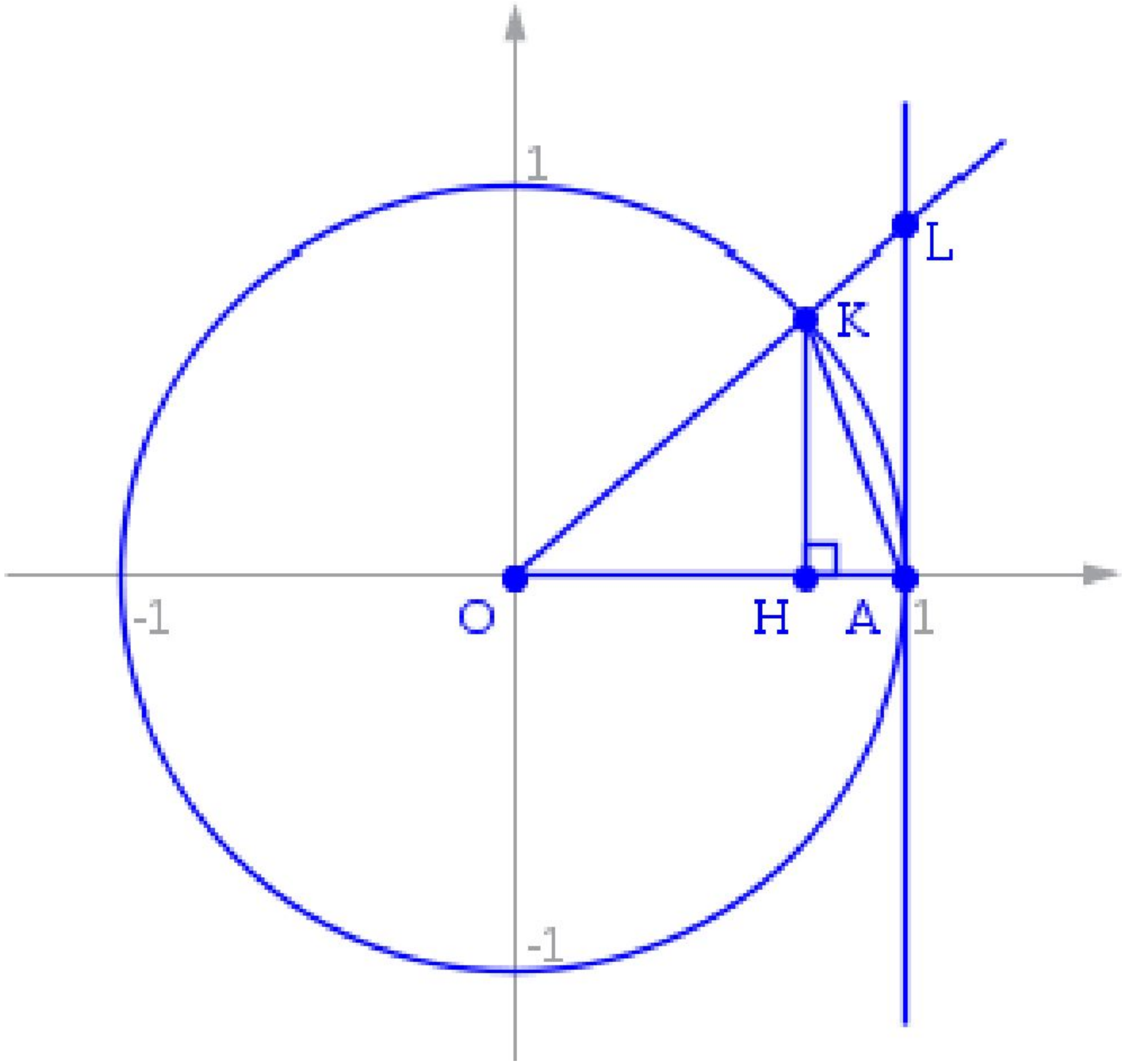
$$f(x) \le \beta \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) \le \beta\,.$$

$$f(x) < g(x) \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) \le \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Теорема 3.4

I. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ – первый замечательный предел;

II. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ – второй замечательный предел.

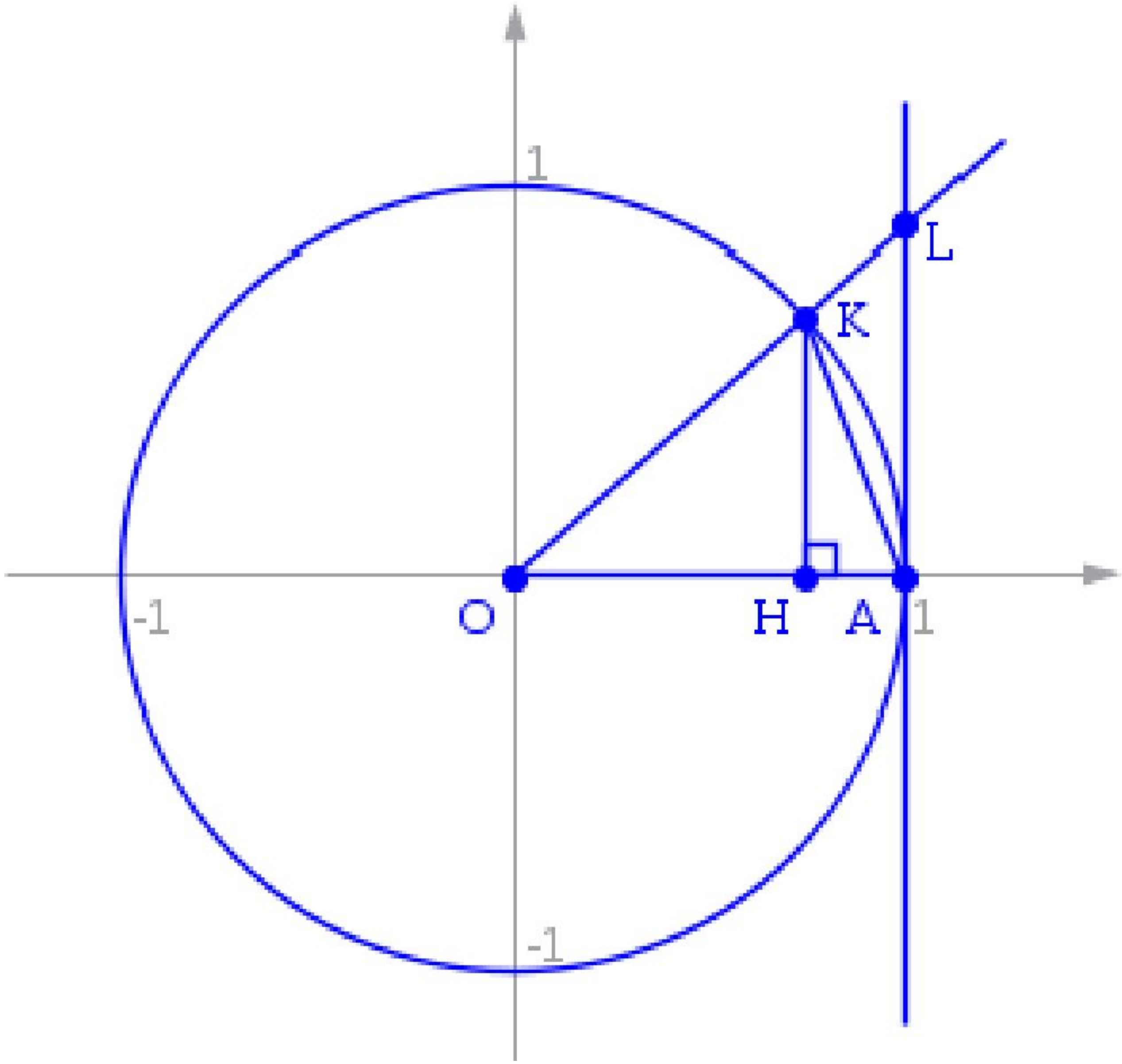


Обозначим

S_1 – площадь треугольника OKA,

S_2 – площадь сектора круга OKA,

S_3 – площадь треугольника OLA.



Обозначим

S_1 – площадь треугольника OKA,

S_2 – площадь сектора круга OKA,

S_3 – площадь треугольника OLA.

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\underbrace{\lim_{x\to+0} \cos x}_{=1} \le \lim_{x\to+0} \frac{\sin x}{x} \le \underbrace{\lim_{x\to+0} 1}_{=1} \quad \Rightarrow \quad 1 \le \lim_{x\to+0} \frac{\sin x}{x} \le 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

II. $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

§4. Сравнение бесконечно малых (больших) величин

Определение 4.1

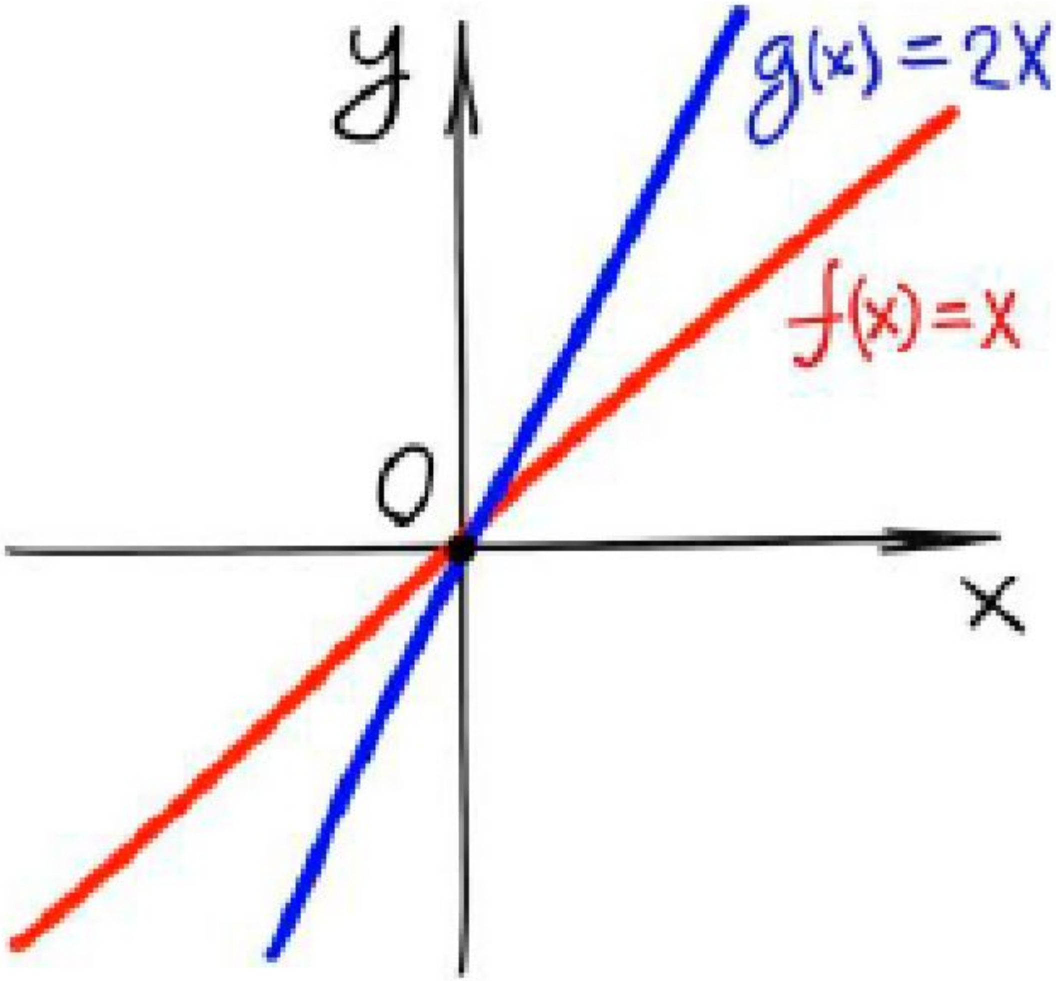
Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые функции в точке $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, то пишут $f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$. Говорят, что $f(x)$ – бесконечно малая *более высокого порядка,* чем $g(x)$ в точке x_0. Это значит, что $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$ на порядок быстрее, чем $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, то говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют *одинаковый порядок малости* в точке x_0.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ не существует, то говорят, что функции не сравнимы в точке x_0.

1) $f(x) = x$, $g(x) = 2x$;



2) $f(x)=x^2$, $g(x)=x$.