Интерполирование полиномами Ньютона

Постановка задачи:

Функция задана таблично:

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
y	y_0	y_1	y_2	...	y_n

(1)

Вычислить: $y(x^*)$,

$x^* \neq x_i$ (2)

$x^* \in [x_0, x_n]$

$\{x_0, x_1, .., x_n\}$ -сетка или узлы интерполирования

Построим функцию $\varphi(x)$ -интерполяционную функцию,

удовлетворяющую условию:

$\varphi(x_i) = y_i$, - условие интерполяции

$i = \overline{0,n}$

тогда

$y(x^*) \overset{\text{считать}}{=} \varphi(x^*)$

Конечные разности

Если узлы являются равноотстоящими, то можно определить конечные разности n-ого порядка между значениями функции в соседних узлах

$$\begin{aligned}
&\Delta y_0 = y_1 - y_0\\
&\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0\\
&\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\Delta^n y_0 = \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0\cdot
\end{aligned} \tag{12}$$

Методом математической индукции можно показать, что

$$\Delta^k y_i = \Delta\left(\Delta^{k-1} y_i\right) = y_{i+k} - k y_{i+k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{i+k-2} - \ldots + (-1)^k y_i\ . \tag{13}$$

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

или в компактной форме

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j). \qquad (14)$$

Задача построения многочлена сводится к определению коэффициентов $a_i, \left(i = \overline{0, n}\right)$ в формуле (14). Пусть $x = x_0$. Подставив его в (14), получим $P_n(x_0) = a_0 = y_0$. По аналогии получим

$P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1$

$$P_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2$$

....

$$P_n(x_n) = a_0 + a_1(x_n - x_0) + a_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \ldots + a_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1}) = y_n \ .$$

Используя метод индукции, получим следующие соотношения для коэффициентов $a_i, \left(i = \overline{0, n}\right)$ полинома Ньютона

$$a_0 = y_0$$

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h},$$

$$a_2 = \frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2},$$

....

$$a_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})} = \frac{\Delta^i y_0}{i!h^i}, \qquad (15)$$

....

$$a_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})} = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}.$$

Подставив (15) в выражение для интерполяционного полинома Ньютона (14), получаем

$$P_n(x) = a_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}), \qquad (16)$$

где $\Delta^n y_0$ – конечная разность n-ого порядка.

Если искать интерполяционный полином в виде

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1)$$

или в компактной форме

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \prod_{j=n}^{n-i} (x - x_j), \qquad (18)$$

то, как и в первом случае, коэффициенты $a_i, \left(i = \overline{0, n}\right)$ находятся из условия совпадения значений функции и интерполяционного полинома (18) в узлах:

$$a_i = \frac{y_{n-i} - y_{n-i-1}}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})} = \frac{\Delta^i y_{n-i}}{i!h^i}. \qquad (19)$$

§ 2. Погрешность интерполирования

1. Остаточный член интерполяционной формулы. Заменяя функцию $f(x)$ интерполяционным многочленом $L_n(x)$, мы допускаем погрешность

$$r_n(x)=f(x)-L_n(x),$$

которая называется *погрешностью интерполирования* или, что то же самое, *остаточным членом интерполяционной формулы.* Ясно, что в узлах интерполирования эта погрешность равна нулю. Оценим погрешность в любой точке $x\in[a,\ b]$. Для этого рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(s)=f(s)-L_n(s)-K\omega(s), \tag{1}$$

где $s\in[a,\ b]$, K — постоянная и

$$\omega(s)=(s-x_0)(s-x_1)\ldots(s-x_n). \tag{2}$$

Пусть требуется оценить $r_n(x)$ в заданной точке $x\in[a,\ b]$, не являющейся узлом интерполирования. Выберем постоянную K из условия $g(x)=0$. Для этого достаточно положить

$$K=\frac{f(x)-L_n(x)}{\omega(x)}.$$

Предположим, что $f(s)$ имеет $n+1$ непрерывную производную на отрезке $a\leqslant s\leqslant b$. Функция $g(s)$ имеет не менее $n+2$ нулей на этом отрезке, а именно в точках x, x_k, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n$. Поэтому производная $g'(s)$ имеет не менее чем $n+1$ нулей на $[a,\ b]$, $g''(s)$ — не менее n нулей и т. д., функция $g^{(n+1)}(s)$ по крайней мере один раз обращается в нуль на $[a,\ b]$. Тем самым существует точка $\xi\in[a,\ b]$, в которой $g^{(n+1)}(\xi)=0$.

Поскольку

$$g^{(n+1)}(s)=f^{(n+1)}(s)-(n+1)!K,$$

получаем

$$f^{(n+1)}(\xi)=\frac{f(x)-L_n(x)}{\omega(x)}(n+1)!$$

Таким образом доказано, что *погрешность интерполирования можно представить в виде*

$$f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x), \tag{3}$$

где $\xi\in[a,\ b]$ *и* $\omega(x)$ — *многочлен, определенный согласно* (2).

Отсюда следует оценка

$$|f(x)-L_n(x)|\leqslant\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega(x)|, \tag{4}$$

Контрольная работа

3.12. Построить многочлен $P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$,
влетворяющий условиям: $P_3(-1) = 0$, $P_3(1) = 1$, $P_3(2) = 2$, $a_3 = 1$.

3.13. Построить многочлен $P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$,
влетворяющий условиям: $P_3(0) = P_3(-1) = P_3(1) = 0$, $a_2 = 1$.

3.24. Оценить погрешность приближения функции e^x интерполяционным многочленом Лагранжа $L_2(x)$, построенным по узлам $x_0 = 0.0$, $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.2$, в точке: 1) $x = 0.05$; 2) $x = 0.15$.