

Интерполирование полиномами Ньютона

Постановка задачи:

Функция задана таблично:

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
y	y_0	y_1	y_2	...	y_n

(1)

Вычислить: $y(x^*)$,

$$x^* \neq x_i \quad (2)$$

$$x^* \in [x_0, x_n]$$

$\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ -сетка или узлы интерполирования

Построим функцию $\varphi(x)$ -интерполяционную функцию,

удовлетворяющую условию:

$$\varphi(x_i) = y_i, \quad - \text{условие интерполяции}$$

$$i = \overline{0, n}$$

тогда

$$y(x^*) \overset{\text{считать}}{=} \varphi(x^*)$$

Конечные разности

Если узлы являются равноотстоящими, то можно определить конечные разности n -ого порядка между значениями функции в соседних узлах

$$\begin{aligned} \Delta y_0 &= y_1 - y_0 \\ \Delta^2 y_0 &= \Delta y_1 - \Delta y_0 \\ \Delta^3 y_0 &= \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta^n y_0 &= \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0 \end{aligned} \tag{12}$$

Методом математической индукции можно показать, что

$$\Delta^k y_i = \Delta(\Delta^{k-1} y_i) = y_{i+k} - ky_{i+k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{i+k-2} - \dots + (-1)^k y_i \tag{13}$$

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

или в компактной форме

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j). \quad (14)$$

Задача построения многочлена сводится к определению коэффициентов a_i , ($i = \overline{0, n}$) в формуле (14). Пусть $x = x_0$. Подставив его в (14), получим

$$P_n(x_0) = a_0 = y_0. \text{ По аналогии получим}$$

$$P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1$$

$$P_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2$$

$$P_n(x_n) = a_0 + a_1(x_n - x_0) + a_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \dots + a_n(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}) = y_n$$

Используя метод индукции, получим следующие соотношения для коэффициентов $a_i, (i = \overline{0, n})$ полинома Ньютона

$$a_0 = y_0$$

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h},$$

$$a_2 = \frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2},$$

$$a_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})} = \frac{\Delta^i y_0}{i!h^i}, \quad (15)$$

$$a_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})} = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}.$$

Подставив (15) в выражение для интерполяционного полинома Ньютона (14), получаем

$$P_n(x) = a_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}), \quad (16)$$

где $\Delta^n y_0$ – конечная разность n -ого порядка.

Если искать интерполяционный полином в виде

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1)$$

или в компактной форме

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i \prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j), \quad (18)$$

то, как и в первом случае, коэффициенты $a_i, (i = \overline{0, n})$ находятся из условия совпадения значений функции и интерполяционного полинома (18) в узлах:

$$a_i = \frac{y_{n-i} - y_{n-i-1}}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})} = \frac{\Delta^i y_{n-i}}{i! h^i}. \quad (19)$$

§ 2. Погрешность интерполирования

1. **Остаточный член интерполяционной формулы.** Заменяя функцию $f(x)$ интерполяционным многочленом $L_n(x)$, мы допускаем погрешность

$$r_n(x) = f(x) - L_n(x),$$

которая называется *погрешностью интерполирования* или, что то же самое, *остаточным членом интерполяционной формулы*. Ясно, что в узлах интерполирования эта погрешность равна нулю. Оценим погрешность в любой точке $x \in [a, b]$. Для этого рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(s) = f(s) - L_n(s) - K\omega(s), \quad (1)$$

где $s \in [a, b]$, K — постоянная и

$$\omega(s) = (s-x_0)(s-x_1)\dots(s-x_n). \quad (2)$$

Пусть требуется оценить $r_n(x)$ в заданной точке $x \in [a, b]$, не являющейся узлом интерполирования. Выберем постоянную K из условия $g(x) = 0$. Для этого достаточно положить

$$K = \frac{f(x) - L_n(x)}{\omega(x)}.$$

Предположим, что $f(s)$ имеет $n+1$ непрерывную производную на отрезке $a \leq s \leq b$. Функция $g(s)$ имеет не менее $n+2$ нулей на этом отрезке, а именно в точках $x, x_k, k=0, 1, \dots, n$. Поэтому производная $g'(s)$ имеет не менее чем $n+1$ нулей на $[a, b]$, $g''(s)$ —

не менее n нулей и т. д., функция $g^{(n+1)}(s)$ по крайней мере один раз обращается в нуль на $[a, b]$. Тем самым существует точка $\xi \in [a, b]$, в которой $g^{(n+1)}(\xi) = 0$.

Поскольку $g^{(n+1)}(s) = f^{(n+1)}(s) - (n+1)!K$,
получаем

$$f^{(n+1)}(\xi) = \frac{f(x) - L_n(x)}{\omega(x)} (n+1)!$$

Таким образом доказано, что *погрешность интерполирования можно представить в виде*

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x), \quad (3)$$

где $\xi \in [a, b]$ и $\omega(x)$ — многочлен, определенный согласно (2).

Отсюда следует оценка

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega(x)|, \quad (4)$$

Контрольная работа

3.12. Построить многочлен $P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, удовлетворяющий условиям: $P_3(-1) = 0$, $P_3(1) = 1$, $P_3(2) = 2$, $a_3 = 1$.

3.13. Построить многочлен $P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, удовлетворяющий условиям: $P_3(0) = P_3(-1) = P_3(1) = 0$, $a_2 = 1$.

3.24. Оценить погрешность приближения функции e^x интерполяционным многочленом Лагранжа $L_2(x)$, построенным по узлам $x_0 = 0.0$, $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.2$, в точке: 1) $x = 0.05$; 2) $x = 0.15$.