Производная функции

Лекция 2

Определение производной

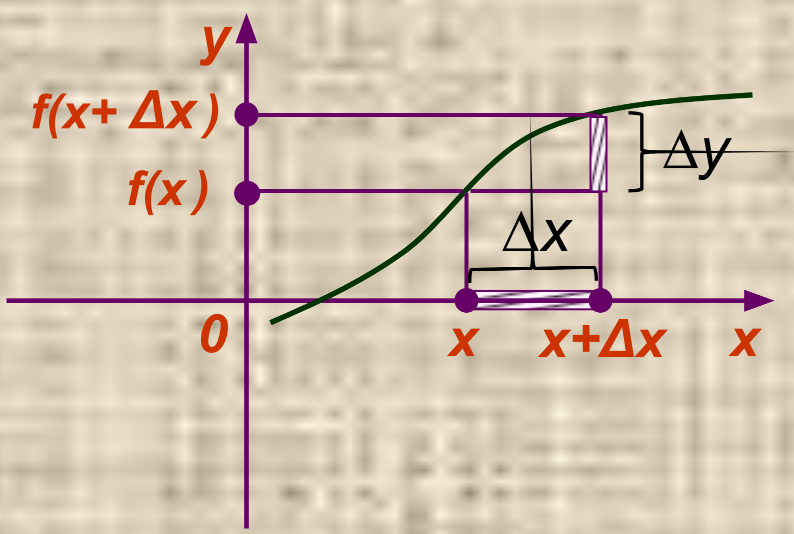
Пусть функция ***y = f(x)*** определена в некотором интервале ***(a; b)***.

Аргументу ***x*** придадим некоторое приращение Δx:

$$x+\Delta x \in (a;b)$$

Найдем соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$



Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

то его называют производной функции ***y = f(x)*** и обозначают одним из символов:

$$y'; \quad f'(x); \quad \frac{dy}{dx}$$

Определение производной

Итак, по определению:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Функция ***y = f(x)*** , имеющая производную в каждой точке интервала ***(a; b)***, называется ***дифференцируемой*** в этом интервале; операция нахождения производной функции называется ***дифференцированием***.

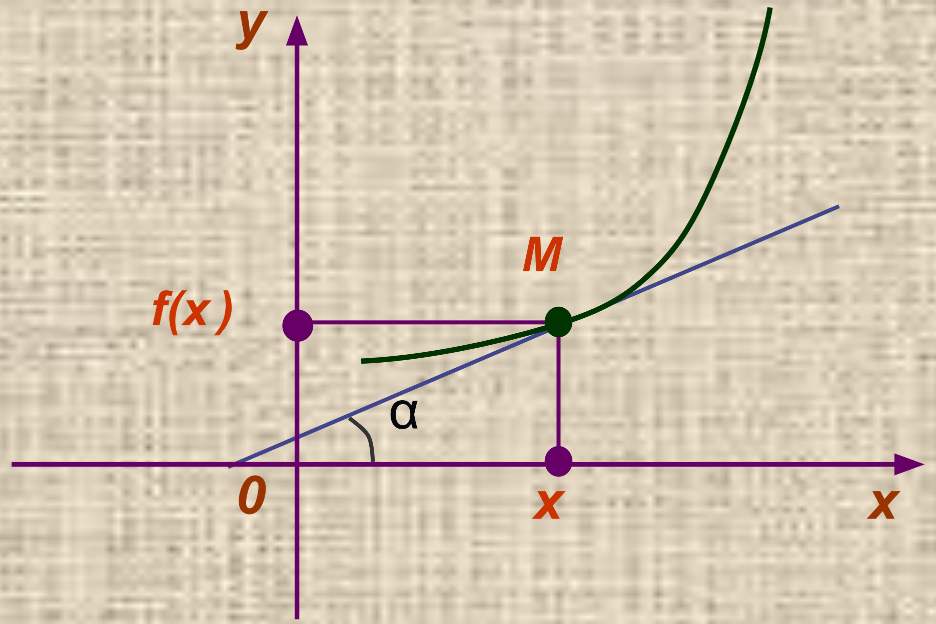
Значение производно функции ***y = f(x)*** в точке X_0 обозначается одним из символов:

$$y'(x_0); \quad f'(x_0); \quad y'\big|_{x_0}$$

Если функция ***y = f(x)*** описывает какой – либо физический процесс, то ***f '(x)*** есть скорость протекания этого процесса – физический смысл производной.

Геометрический смысл производной

Возьмем на непрерывной кривой ***L*** две точки ***M*** и ***M₁***:



Через точки ***M*** и ***M_1*** проведем секущую и обозначим через ***φ*** угол наклона секущей.

$$tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

При $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности функции Δy также стремится к нулю, поэтому точка ***M_1*** неограниченно приближается по кривой к точке ***M***, а секущая ***MM_1*** переходит в касательную.

$$\varphi \to \alpha \quad \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \varphi = \alpha \quad \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\alpha$$

Геометрический смысл производной

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}_{y'} = tg\alpha = k \ = y'$$

Производная ***f ’(x)*** равна угловому коэффициенту касательной к графику функции ***y = f(x)*** в точке, абсцисса которой равна ***x***.

Если точка касания ***M*** имеет координаты ***(x_0; y_0),*** угловой коэффициент касательной есть ***k = f ’(x_0).***

Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

Уравнение касательной

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}$$

$$\boxed{f'(x_0)}$$

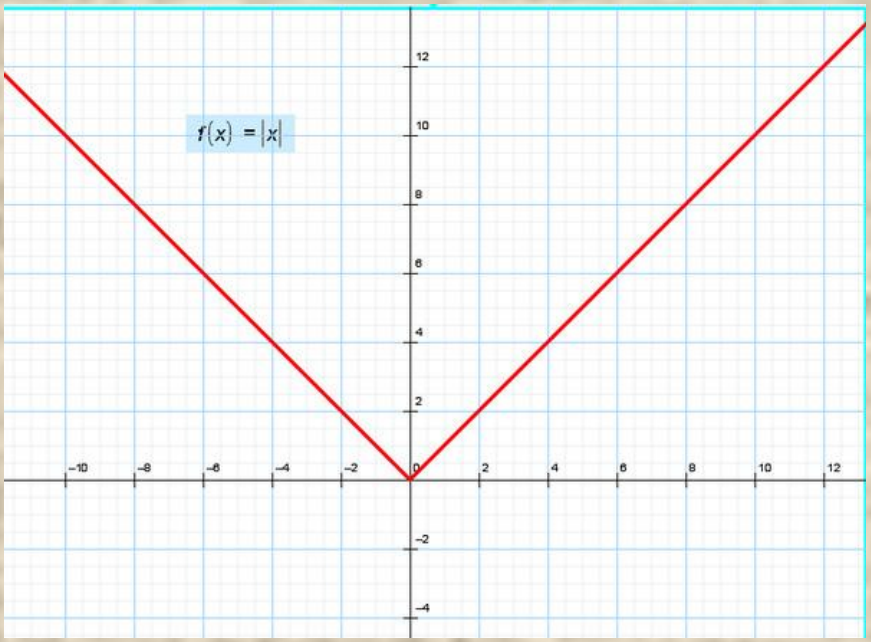
Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Теорема

Если функция *f(x)* дифференцируема в некоторой точке , то она непрерывна в ней.

Обратное утверждение **не верно**: непрерывная функция может не иметь производной.

Пример: $y = |x|$



$y'(0)$ не существует

Таблица производных

$$1.\ c' = 0,$$

$$2.\ (x^n)' = nx^{n-1},$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2},$$

$$3.\ (a^x)' = a^x \ln a,$$

$$(e^x)' = e^x,$$

$$6.\ (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2};\quad (arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$4.\ (\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a},$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$5.\ (\sin x)' = \cos x,$$

$$(\cos x)' = -\sin x,$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

Правила дифференцирования

Пусть ***u(x)*** , ***v(x)*** и ***w(x)*** – дифференцируемые в некотором интервале ***(a; b)*** функции, ***C*** – постоянная.

- $(C)' = 0$
- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad \Rightarrow \quad (C \cdot u)' = C \cdot u'$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad \Rightarrow \quad \left(\dfrac{C}{v}\right)' = \dfrac{-C \cdot v'}{v^2}$

Производная сложной функции

Пусть ***y = f(u)*** и ***u = φ(x)*** , тогда ***y = f(φ(x))*** – сложная функция с промежуточным аргументом ***u*** и независимым аргументом ***x.***

Теорема

Если функция ***u = φ(x)*** имеет производную u'_x в точке ***x*** а функция ***y = f(u)*** имеет производную y'_u в соответствующей точке ***u*** , то сложная функция имеет производную y'_x , которая находится по формуле:

$$\boxed{y'_x = y'_u \cdot u'_x}$$

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько:

$$y = f(u); \quad u = \varphi(v); \quad v = g(x) \quad \Rightarrow y = f(\varphi(g(x)))$$

$$\boxed{y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x}$$

Пример.

Вычислить производную функции $y = \dfrac{1+\sin x}{x^3 \cdot \ln x}$

$$y' = \left(\frac{1+\sin x}{x^3 \cdot \ln x} \right)' =$$

$$= \frac{(1+\sin x)' \cdot (x^3 \cdot \ln x) - (1+\sin x) \cdot (x^3 \cdot \ln x)'}{\left(x^3 \cdot \ln x\right)^2} =$$

$$= \frac{(\sin x)' \cdot (x^3 \cdot \ln x) - (1+\sin x) \cdot ((x^3)' \cdot \ln x + x^3 (\ln x)')}{\left(x^3 \cdot \ln x\right)^2} =$$

$$= \boxed{\frac{\cos x \cdot x^3 \cdot \ln x - (1+\sin x) \cdot (3x^2 \cdot \ln x \quad x^2 \quad \frac{1}{x})}{\left(x^3 \cdot \ln x\right)^2}}$$

Пример.

Вычислить производную функции $y = \cos(\ln^{12} x)$

Данную функцию можно представить следующим образом:

$$y = \cos u; \quad u = v^{12}; \quad v = \ln x$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$$

$$y'_u = -\sin u = -\sin v^{12} = -\sin\left(\ln^{12} x\right)$$

$$u' = 12v^{11} = 12\ln^{11} x$$

$$v' = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{y' = -\sin\left(\ln^{12} x\right) \cdot 12\ln^{11} x \cdot \frac{1}{x}}$$

Коротко:

$$y' = (\cos(\ln^{12} x))' = -\sin(\ln^{12} x) \cdot (\ln^{12} x)' =$$

$$= -\sin(\ln^{12} x) \cdot 12\ln^{11} x \cdot (\ln x)' =$$

Производные высших порядков

Производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть также функция от ***x*** и называется ***производной первого порядка***.

Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется ***производной второго порядка*** и обозначается:

$$y''; \quad f''(x); \quad \frac{d^2y}{dx^2}$$

Итак: $y'' = (y')'$

Производная от производной второго порядка, если она существует называется ***производной третьего порядка*** и обозначается:

$$y'''; \quad f'''(x); \quad \frac{d^3y}{dx^3}$$

Итак: $y''' = (y'')'$

Производной n – ого порядка (или ***n*** – ой производной) называется производная от производной ***n -1*** - ого порядка.

$$\boxed{y^{(n)} = (y^{(n-1)})'}$$

Производные высших порядков

Начиная от производной 4 порядка , производные обозначаются римскими цифрами или цифрами в скобках:

$y^{(5)}$ *или* y^{v} - производная пятого порядка.

Вычислить производную **n** *– ого порядка от функции:* $y = \ln(x+1)$

$$y' = \left(\ln(x+1)\right)' = \frac{(x+1)'}{x+1} = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}$$

$$y'' = \left((x+1)^{-1}\right)' = -1\cdot(x+1)^{-2}; \quad y''' = \left(-(x+1)^{-2}\right)' = 1\cdot 2(x+1)^{-3}$$

$$y^{(4)} = \left(1\cdot 2(x+1)^{-3}\right)' = -1\cdot 2\cdot 3(x+1)^{-4}$$

$$y^{(5)} = \left(-1\cdot 2\cdot 3(x+1)^{-4}\right)' = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4(x+1)^{-5}$$

$$\boxed{y^{(n)} = (-1)^{n+1}(n-1)!(x+1)^{-n}}$$

Производные от функций, заданных параметрически

Пусть функция ***y = f(x)*** задана параметрически уравнениями:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Производная первого порядка от этой функции находится по формуле:

$$\boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}}$$

Найдем производную второго порядка:

$$\boxed{y''_x = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}}$$

Аналогично получаем:

$$y'''_x = (y''_x)'_x = \frac{(y''_x)'_t}{x'_t} \qquad y^{(4)}_x = (y'''_x)'_x = \frac{(y'''_x)'_t}{x'_t}$$

и т. д.

Производные от функций, заданных параметрически

Вычислить производную ***3*** *– ого порядка от функции:*

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = 1 - t^3 \end{cases} \qquad y'_x = \frac{(1-t^3)'}{(t^2)'} = \frac{-3t^2}{2t} = -1.5t$$

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-1.5t)'}{(t^2)'} = \frac{-1.5}{2t} = -0.75t^{-1}$$

$$y'''_x = \frac{(y''_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-0.75t^{-1})'}{(t^2)'} = \frac{0.75t^{-2}}{2t} = \boxed{\frac{3}{4t^3}}$$

Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в некоторой точке x отличную от нуля производную, следовательно существует предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x) \Rightarrow$$

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции

[где $\alpha(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$]

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(x)\Delta x$$

Дифференциал функции

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(x)\Delta x$$

Первое слагаемое $f'(x)\Delta x$ называют ***главной частью приращения функции.***

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется главная часть ее приращения:

$$dy = f'(x)\Delta x$$

Можно доказать, что $\boxed{dx = \Delta x}$

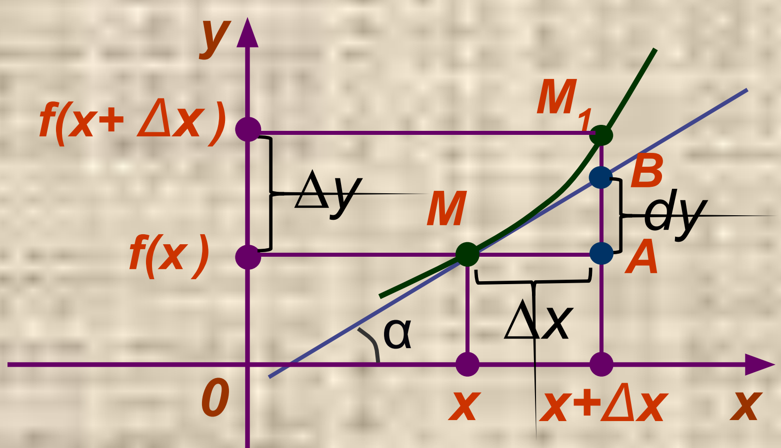
Дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной

$$\boxed{dy = f'(x)dx} \Rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Дифференциал функции равен произведению производной функции на дифференциал независимой переменной

Геометрический смысл дифференциала

Проведем к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x, y)$ касательную



Рассмотрим ординату касательной для точки $x+\Delta x$.

Из прямоугольного треугольника ABM имеем:

$$tg\alpha = \frac{|AB|}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$|AB| = tg\alpha \cdot \Delta x$$

Согласно геометрическому смыслу производной, $tg\alpha = f'(x) \Rightarrow$

$$|AB| = f'(x) \cdot \Delta x \ = dy$$

Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x получает приращение Δx.

Приложение дифференциала в приближенных вычислениях

Как известно, приращение функции можно представить в виде:

$$\Delta y = dy + \alpha(x)\Delta x$$

Отбрасывая бесконечно малую $\alpha(x)\Delta x$ более высокого порядка, чем Δx, получим приближенной равенство:

$$\boxed{\Delta y \approx dy}$$

Это равенство позволяет с большой точностью вычислять приращение любой дифференцируемой функции.

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x)\Delta x}$$

Формула позволяет приближенно вычислять значение функции в точке $x_0+\Delta x$, зная значение функции в точке x_0.

Приложение дифференциала в приближенных вычислениях

Вычислить приближенно: $arctg 1.05$

Рассмотрим функцию: $y = arctg\ x$

$$arctg(x_0 + \Delta x) \approx arctg(x_0) + arctg'(x_0)\Delta x$$

Так как $x_0 + \Delta x = 1.05$ *то* $x_0 = 1$ $\Delta x = 0.05$

$$arctg\,1 = \frac{\pi}{4} \qquad (arctg\ x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (arctg\ x)'\big|_{x=1} = \frac{1}{2}$$

$$arctg(1.05) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cdot 0.05 \approx \boxed{0.81}$$

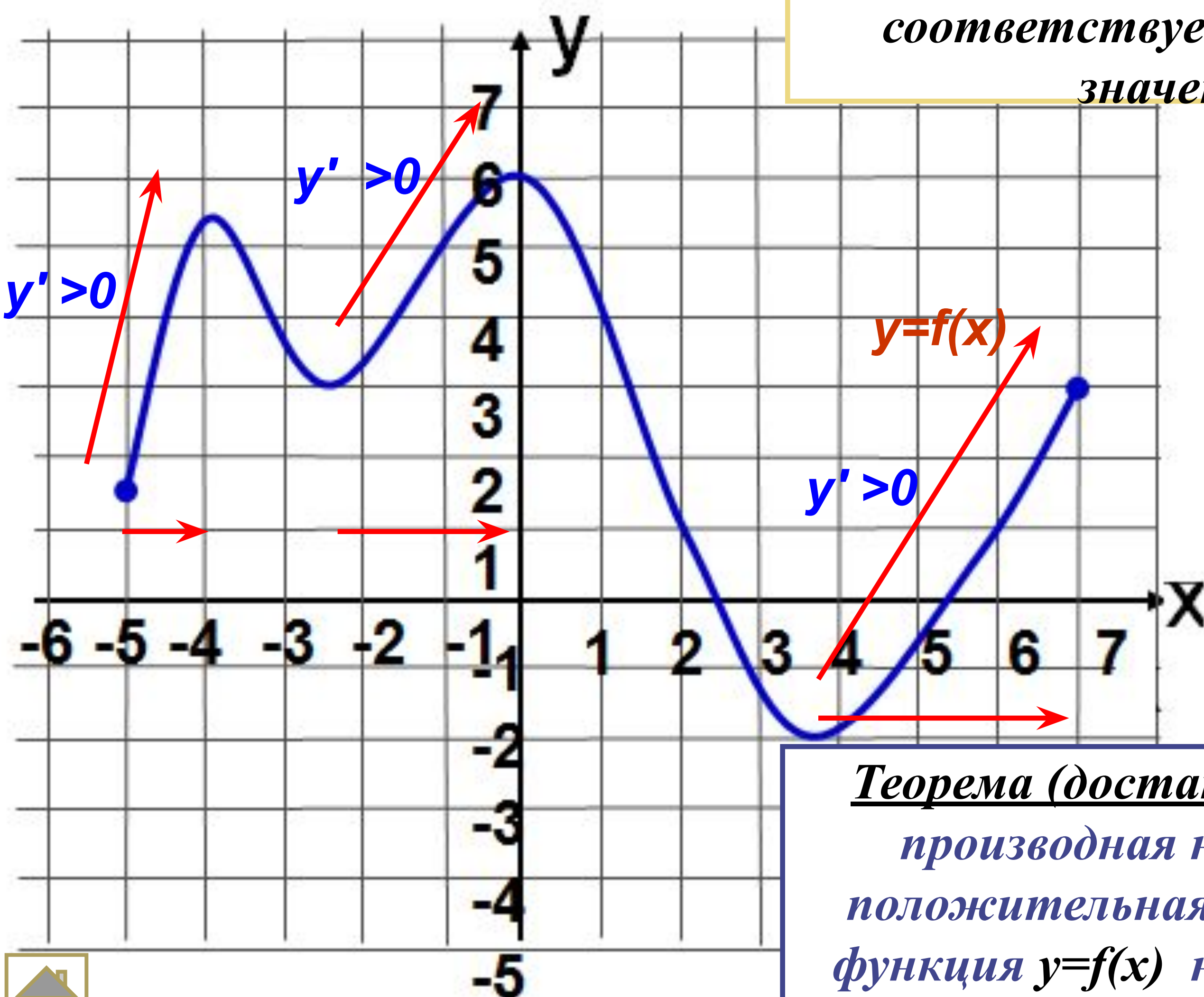
Исследование функций с помощью производной и построение графиков функций

- Схема

- 1. Найти о.о.ф.
- 2. Найти (если возможно) точки пересечения графика с осями координат
- 3. Найти промежутки знакопостоянства функции
- 4. Исследовать на четность
- 5. Найти асимптоты графика функции
- 6. Найти промежутки монотонности, точки экстремума функции
- 7. Найти промежутки выпуклости, точки перегиба графика функции
- 8. Построить график функции

1. Монотонность функции

Функция y=f(x) возрастает (убывает), если <u>большему</u> значению аргумента соответствует <u>большее</u> (<u>меньшее</u>) значение функции



<u>Теорема (достаточное условие):</u> Если производная на промежутке (a,b) положительная (отрицательная), то функция y=f(x) на данном промежутке возрастает (убывает).

Точки экстремума

Пример: $y = |x|$

$y'(0)$ не существует

Пример: $y = |x|$

$y'(0)$ не существует

Пример: $y = |x|$

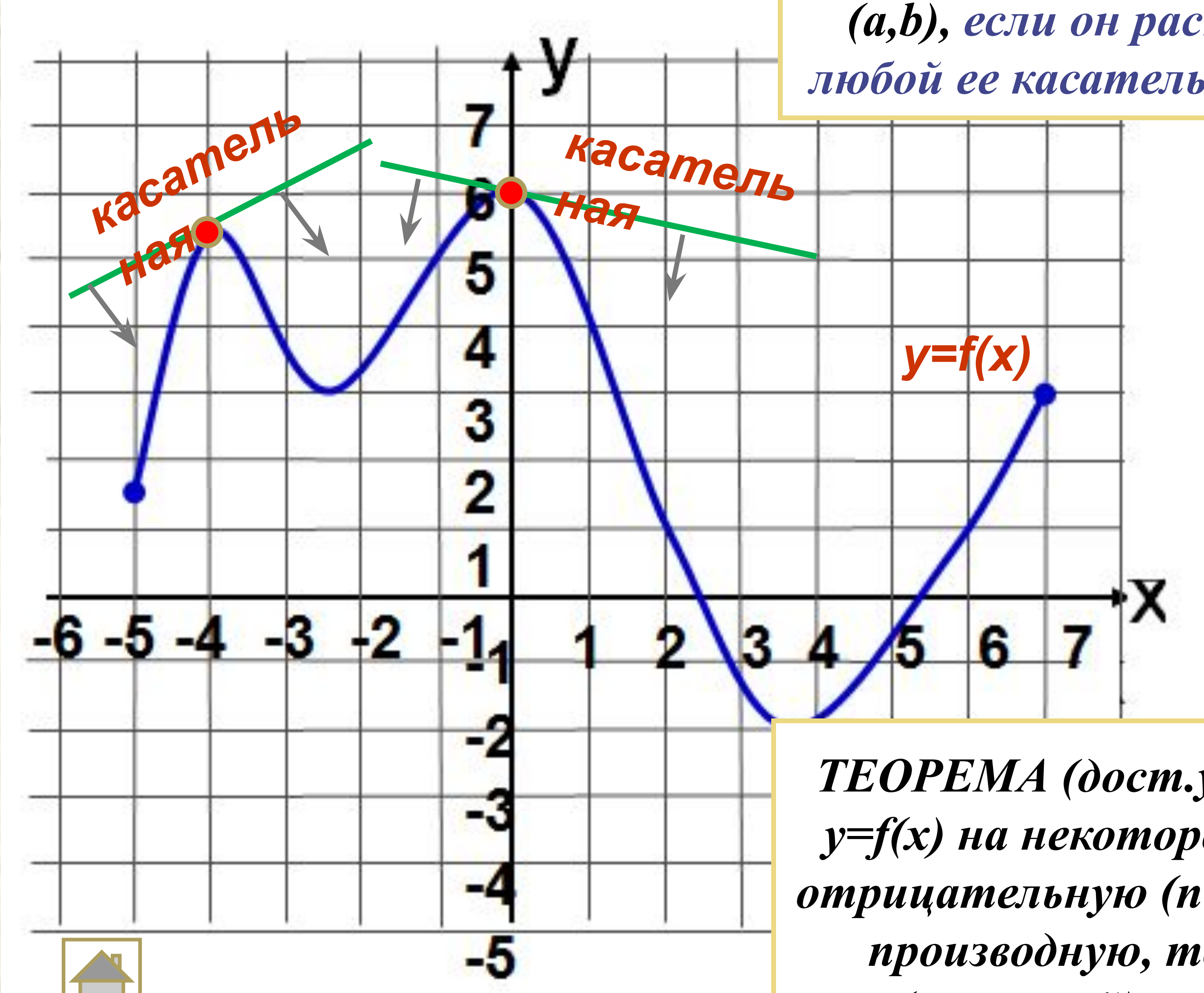
$y'(0)$ не существует

Пример: $y = |x|$

$y'(0)$ не существует

2. Выпуклость функции

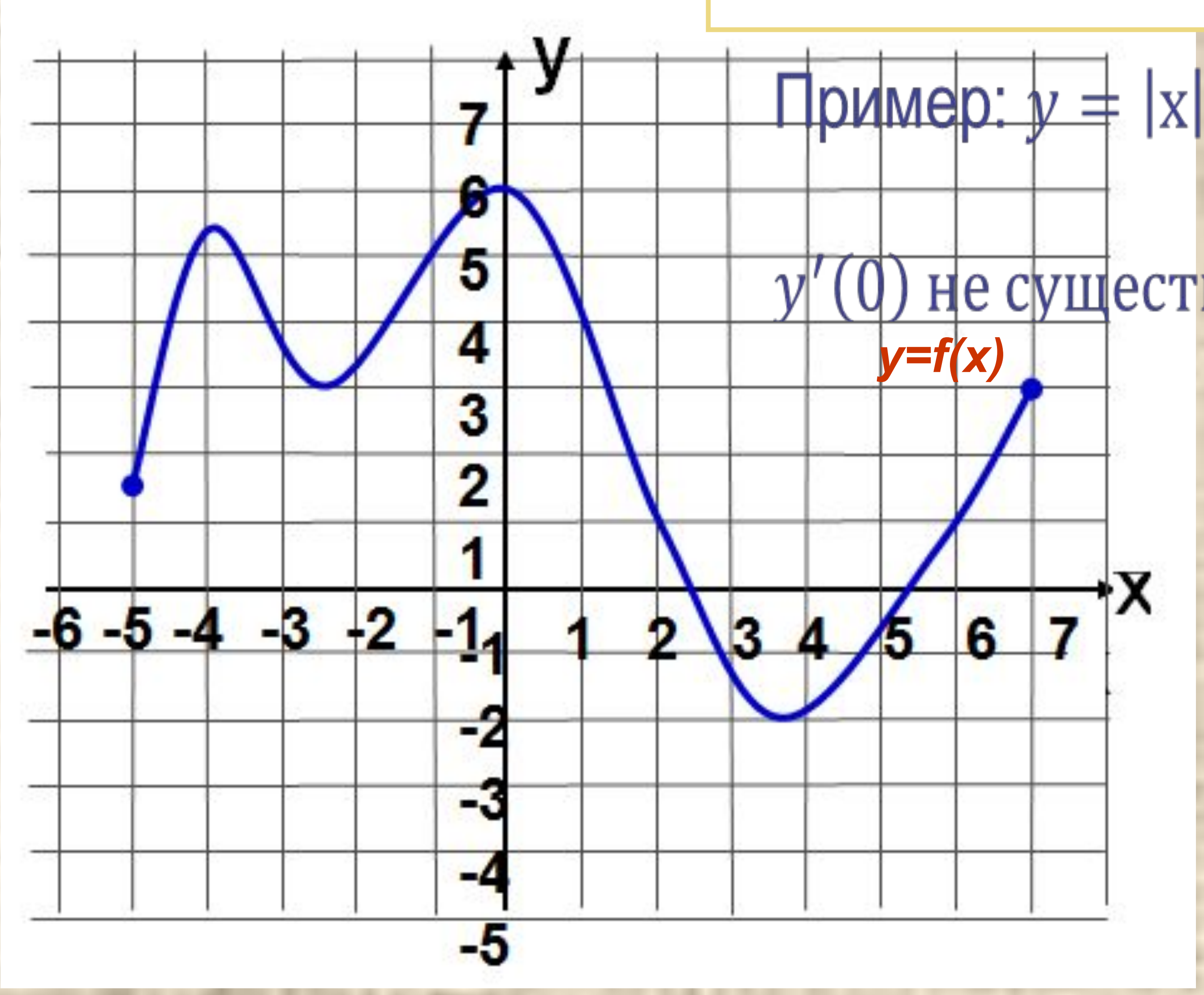
График функции y=f(x) называется ***выпуклым (вогнутым)*** *на промежутке (a,b), если он расположен ниже (выше) любой ее касательной на этом интервале.*



ТЕОРЕМА (дост.условие): Если функция y=f(x) на некотором промежутке имеет отрицательную (положительную) вторую производную, то график – выпуклый (вогнутый) на этом промежутке.

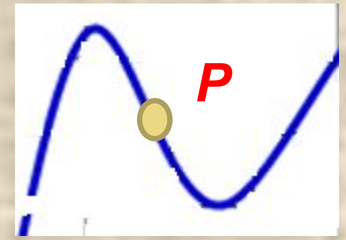
Точки перегиба

Опр. Точка графика непрерывной функции, отделяющая его части разной выпуклости, называется точкой перегиба .



Пример: $y = |x|$

$y'(0)$ не существует



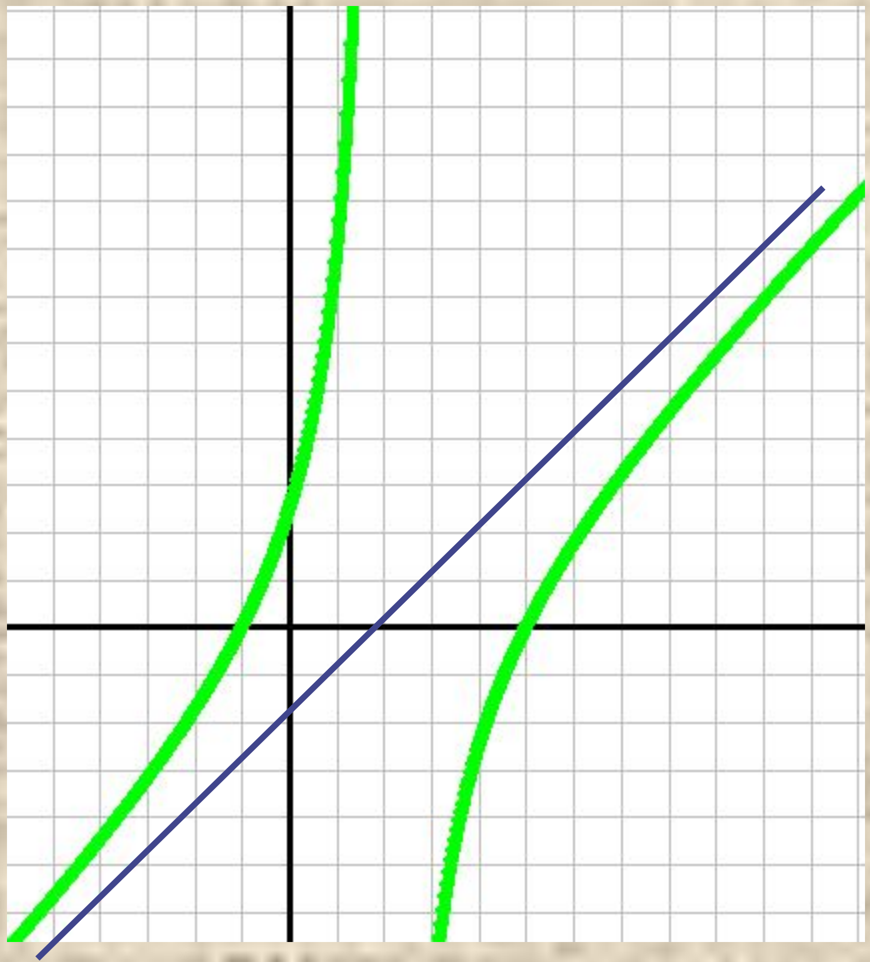
Асимптоты графика функции

- **Опр**. Прямая называется ***асимптотой*** графика функции, если расстояние от точек графика до этой прямой стремится к 0 при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Асимптоты бывают вертикальными, горизонтальными и наклонными.

Опр. Прямая *x=a* называется вертикальной асимптотой для y=f(x), если

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty \quad \text{или} \quad \lim_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty$$



Опр. Наклонной асимптотой графика функции y = f (x) является прямая y=kx+b, если существуют конечные пределы

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right).$$

Горизонтальная асимптота имеет вид y=b и является частным случаем наклонной асимптоты при $k=0.$