Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Дмитриевогорская средняя общеобразовательная школа»

Жулина Н. С. учитель информатики и ИКТ

2012

Сколько различных решений имеет логическое уравнение

$$(x_1 \to x_2) \land (x_2 \to x_3) \land (x_3 \to x_4) = 1$$
$$(y_1 \to y_2) \land (y_2 \to y_3) \land (y_3 \to y_4) = 1$$
$$(\neg y_1 \lor x_1) \land (\neg y_2 \lor x_2) \land (\neg y_3 \lor x_3) \land (\neg y_4 \lor x_4) = 1$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_4$ и $y_1, y_2, \ldots, y_4$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение:

- **видим, что первые два уравнения независимы друг от друга (в первое входят только $x_1, x_2, \ldots, x_4$, а во второе – только $y_1, y_2, \ldots, y_4$)**
- **третье уравнение связывает первые два, поэтому можно поступить так:**
- **найти решения первого уравнения**
- **найти решения второго уравнения**
- **найти множество решений первых двух уравнений**
- **из множества решений первых двух уравнений выкинуть те, которые не удовлетворяют последнему уравнению**
- **найдем решения первого уравнения; каждая из логических переменных $x_1, x_2, \ldots, x_4$ может принимать только два значения: «ложь» (0) и «истина» (1), поэтому решение первого уравнения можно записать как битовую цепочку длиной 4 бита: например, 0011 означает, что $x_1 = x_2 = 0$ и $x_3 = x_4 = 1$**
- **вспомним, что импликация $x_1 \to x_2$** ложна только для $x_1 = 1$ *и* $x_2 = 0$, поэтому битовая цепочка, представляющая собой решение первого уравнения, не должна содержать сочетания «10»; это дает такие решения (других нет!):

(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0000 0001 0011 0111 1111

- **видим, что второе уравнение полностью совпадает по форме с первым, поэтому все его решения:**

(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0000 0001 0011 0111 1111

- **поскольку первые два уравнения независимы друг от друга, система из первых двух уравнений имеет 5·5=25 решений: каждому решению первого соответствует 5 разных комбинаций переменных $y_1, y_2, \ldots, y_4$, которые решают второе, и наоборот, каждому решению второго соответствует 5 разных комбинаций переменных $x_1, x_2, \ldots, x_4$, которые решают первое:**

(y_1, y_2, y_3, y_4) =	0000	0001	0011	0111	1111
(x_1, x_2, x_3, x_4) =	0000	0000	0000	0000	0000
	0001	0001	0001	0001	0001
	0011	0011	0011	0011	0011
	0111	0111	0111	0111	0111
	1111	1111	1111	1111	1111

- **теперь проверим, какие ограничения накладывает третье уравнение; вспомнив формулу, которая представляет импликацию через операции «НЕ» и «ИЛИ» (** $A \to B = \overline{A} + B$

), можно переписать третье уравнение в виде

$(y_1 \to x_1) \wedge (y_2 \to x_2) \wedge (y_3 \to x_3) \wedge (y_4 \to x_4) = 1$

- импликация $y_1 \to x_1$ ложна только для $y_1 = 1$ *и* $x_1 = 0$, следовательно, такая комбинация запрещена, потому что нарушает третье уравнение; таким образом, набору с $y_1 = 1$:

$(y_1, y_2, y_3, y_4) = 1111$

соответствует, с учетом третьего уравнения, только одно решение первого, в котором $x_1 = 1$

$(y_1, y_2, y_3, y_4) = 1111$

поэтому множество решений «редеет»:

$(y_1, y_2, y_3, y_4) =$	0000	0001	0011	0111	1111
$(x_1, x_2, x_3, x_4) =$	0000	0000	0000	0000	
	0001	0001	0001	0001	
	0011	0011	0011	0011	
	0111	0111	0111	0111	
	1111	1111	1111	1111	1111

- аналогично двигаемся дальше по третьему уравнению; второй сомножитель равен 0, если импликация $y_2 \to x_2$ ложна, то есть только для $y_2 = 1$ *и* $x_2 = 0$, это «прореживает» предпоследний столбец:

$(y_1, y_2, y_3, y_4) =$	0000	0001	0011	0111	1111
$(x_1, x_2, x_3, x_4) =$	0000	0000	0000		
	0001	0001	0001		
	0011	0011	0011		
	0111	0111	0111	0111	
	1111	1111	1111	1111	1111

- аналогично проверяем еще два ограничения, отбрасывая все решения, для которых $y_3 = 1$ *и* $x_3 = 0$, а также все решения, для которых $y_4 = 1$ *и* $x_4 = 0$:

$(y_1, y_2, y_3, y_4) =$	0000	0001	0011	0111	1111
$(x_1, x_2, x_3, x_4) =$	0000				
	0001	0001			
	0011	0011	0011		
	0111	0111	0111	0111	
	1111	1111	1111	1111	1111

- итак, остается одно решение при $(y_1, y_2, y_3, y_4)=1111$, два решения при $(y_1, y_2, y_3, y_4)=0111$, три решения при $(y_1, y_2, y_3, y_4)=0011$, четыре решения при $(y_1, y_2, y_3, y_4)=0001$ и 5 решений при $(y_1, y_2, y_3, y_4)=0000$
- всего решений 1+2+3+4+5=15.

88Сколько различных решений имеет система уравнений?

- $(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) = 1$
- $(y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) = 1$
- $(\neg y_1 \vee x_1) \wedge (\neg y_2 \vee x_2) \wedge (\neg y_3 \vee x_3) \wedge (\neg y_4 \vee x_4) = 1$
- где $x_1,x_2,\ldots,x_4,\ y_1,y_2,\ldots,y_4$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

89Сколько различных решений имеет система уравнений?

- $(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) = 1$
- $(y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) = 1$
- $(\neg y_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_2 \vee y_2) \wedge (\neg y_3 \vee x_3) \wedge (\neg x_4 \vee y_4) = 1$
- где $x_1,x_2,\ldots,x_4,\ y_1,y_2,\ldots,y_4$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

90Сколько различных решений имеет система уравнений?

- $(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) = 1$
- $(y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) = 1$
- $(\neg y_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_2 \vee y_2) = 1$
- где $x_1,x_2,\ldots,x_4,\ y_1,y_2,\ldots,y_4$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

91Сколько различных решений имеет система уравнений?

- $(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) = 1$
- $(y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) = 1$
- $(\neg y_1 \vee x_1) \wedge (\neg y_2 \vee x_2) = 1$
- где $x_1,x_2,\ldots,x_4,\ y_1,y_2,\ldots,y_4$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Источники

- http://ege.yandex.ru/informatics/5