

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Дмитриевогорская средняя общеобразовательная школа»

Жулина Н. С. учитель информатики и
ИКТ

2012

Сколько различных решений имеет логическое уравнение

$$(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) = 1$$

$$(y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) = 1$$

$$(\neg y_1 \vee x_1) \wedge (\neg y_2 \vee x_2) \wedge (\neg y_3 \vee x_3) \wedge (\neg y_4 \vee x_4) = 1$$

где x_1, x_2, \dots, x_4 и y_1, y_2, \dots, y_4 – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение:

• видим, что первые два уравнения независимы друг от друга (в первое входят только x_1, x_2, \dots, x_4 , а во второе – только y_1, y_2, \dots, y_4)

• третье уравнение связывает первые два, поэтому можно поступить так:

• найти решения первого уравнения

• найти решения второго уравнения

• найти множество решений первых двух уравнений

• из множества решений первых двух уравнений выкинуть те, которые не удовлетворяют последнему уравнению

• найдем решения первого уравнения; каждая из логических переменных x_1, x_2, \dots, x_4 может принимать только два значения: «ложь» (0) и «истина» (1), поэтому решение первого уравнения можно записать как битовую цепочку длиной 4 бита: например, 0011 означает, что

$$x_1 = x_2 = 0 \text{ и } x_3 = x_4 = 1$$

• вспомним, что импликация $x_1 \rightarrow x_2$ ложна только для $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$, поэтому битовая цепочка, представляющая собой решение первого уравнения, не должна содержать сочетания «10»; это дает такие решения (других нет!):

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{matrix} 0000 & 0001 & 0011 & 0111 & 1111 \end{matrix}$$

• видим, что второе уравнение полностью совпадает по форме с первым, поэтому все его решения:

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) = \begin{matrix} 0000 & 0001 & 0011 & 0111 & 1111 \end{matrix}$$

• поскольку первые два уравнения независимы друг от друга, система из первых двух уравнений имеет $5 \cdot 5 = 25$ решений: каждому решению первого соответствует 5 разных комбинаций переменных y_1, y_2, \dots, y_4 , которые решают второе, и наоборот, каждому решению второго соответствует 5 разных комбинаций переменных x_1, x_2, \dots, x_4 , которые решают первое:

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) = \begin{matrix} 0000 & 0001 & 0011 & 0111 & 1111 \end{matrix}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{matrix} 0000 & 0000 & 0000 & 0000 & 0000 \\ 0001 & 0001 & 0001 & 0001 & 0001 \\ 0011 & 0011 & 0011 & 0011 & 0011 \\ 0111 & 0111 & 0111 & 0111 & 0111 \\ 1111 & 1111 & 1111 & 1111 & 1111 \end{matrix}$$

• теперь проверим, какие ограничения накладывает третье уравнение; вспомнив формулу, которая

представляет импликацию через операции «НЕ» и «ИЛИ» ($A \rightarrow B = \overline{A} + B$)

), можно переписать третье уравнение в виде

$$(y_1 \rightarrow x_1) \wedge (y_2 \rightarrow x_2) \wedge (y_3 \rightarrow x_3) \wedge (y_4 \rightarrow x_4) = 1$$

• **импликация** $y_1 \rightarrow x_1$ ложна только для $y_1 = 1$ и $x_1 = 0$, следовательно, такая комбинация запрещена, потому что нарушает третье уравнение; таким образом, набору с $y_1 = 1$:

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) = 1111$$

соответствует, с учетом третьего уравнения, только одно решение первого, в котором $x_1 = 1$

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) = 1111$$

поэтому множество решений «редеет»:

$(y_1, y_2, y_3, y_4) =$	0000	0001	0011	0111	1111
$(x_1, x_2, x_3, x_4) =$	0000	0000	0000	0000	
	0001	0001	0001	0001	
	0011	0011	0011	0011	
	0111	0111	0111	0111	
	1111	1111	1111	1111	1111

• **аналогично** двигаемся дальше по третьему уравнению; второй сомножитель равен 0, если импликация $y_2 \rightarrow x_2$ ложна, то есть только для $y_2 = 1$ и $x_2 = 0$, это «прореживает» предпоследний столбец:

$(y_1, y_2, y_3, y_4) =$	0000	0001	0011	0111	1111
$(x_1, x_2, x_3, x_4) =$	0000	0000	0000		
	0001	0001	0001		
	0011	0011	0011		
	0111	0111	0111	0111	
	1111	1111	1111	1111	1111

• **аналогично** проверяем еще два ограничения, отбрасывая все решения, для которых $y_3 = 1$ и $x_3 = 0$, а также все решения, для которых $y_4 = 1$ и $x_4 = 0$:

$(y_1, y_2, y_3, y_4) =$	0000	0001	0011	0111	1111
$(x_1, x_2, x_3, x_4) =$	0000				
	0001	0001			
	0011	0011	0011		
	0111	0111	0111	0111	
	1111	1111	1111	1111	1111

• **итак**, остается одно решение при $(y_1, y_2, y_3, y_4) = 1111$, два решения при $(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0111$, три решения при $(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0011$, четыре решения при $(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0001$ и 5 решений при $(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0000$

• **всего решений** $1+2+3+4+5=15$.

88 Сколько различных решений имеет система уравнений?

- $(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) = 1$
- $(y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) = 1$
- $(\neg y_1 \vee x_1) \wedge (\neg y_2 \vee x_2) \wedge (\neg y_3 \vee x_3) \wedge (\neg y_4 \vee x_4) = 1$
- где $x_1, x_2, \dots, x_4, y_1, y_2, \dots, y_4$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

89 Сколько различных решений имеет система уравнений?

- $(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) = 1$
- $(y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) = 1$
- $(\neg y_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_2 \vee y_2) \wedge (\neg y_3 \vee x_3) \wedge (\neg x_4 \vee y_4) = 1$
- где $x_1, x_2, \dots, x_4, y_1, y_2, \dots, y_4$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

90 Сколько различных решений имеет система уравнений?

- $(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) = 1$
- $(y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) = 1$
- $(\neg y_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_2 \vee y_2) = 1$
- где $x_1, x_2, \dots, x_4, y_1, y_2, \dots, y_4$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

91 Сколько различных решений имеет система уравнений?

- $(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) = 1$
- $(y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) = 1$
- $(\neg y_1 \vee x_1) \wedge (\neg y_2 \vee x_2) = 1$
- где $x_1, x_2, \dots, x_4, y_1, y_2, \dots, y_4$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

ИСТОЧНИКИ

- <http://ege.yandex.ru/informatics/5>