



# *Задачи с параметрами*



*Учитель математики  
МБОУ СОШ №1  
Вольно-Надеждинское  
Приморский край  
Пентяшкина Татьяна Петровна*



Уравнение вида  $a \cdot x = b$  с переменной  $x$  имеет **единственное** решение при  $a \neq 0$ ;  
имеет **бесконечное множество** решений при  $a = b = 0$ ;  
**не имеет** решений при  $a = 0, b \neq 0$ .

**Пример 1.** При каких значениях параметра  $b$  уравнение

$$a^2x = a(1 + 5x) - 2 - 6x$$

не имеет корней?

**Решение.**  $a^2x = a(1 + 5x) - 2 - 6x \Leftrightarrow a^2x - 5ax + 6x = a - 2 \Leftrightarrow x(a - 2)(a - 3) = a - 2$ . Уравнение не имеет решений при  $a=3$

**Ответ:  $a=$**

**3.**



Неравенство вида  $a \cdot x > b$  имеет решением  
промежуток  $\left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$  при  $a > 0$ ;  
промежуток  $\left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$  при  $a < 0$ ;  
промежуток  $\left(-\infty; +\infty\right)$  при  $a = 0, b < 0$ ;  
не имеет решений при  $a = 0, b \geq 0$ .

**Пример 2.** Решить неравенство  $ax+4 > 2x + a^2$

**Решение.**  $ax+4 > 2x + a^2 \Leftrightarrow (a-2)x > a^2 - 4$

Рассмотрим три случая.

1.  $a=2$ . Неравенство  $0 \cdot x > 0$  решений не имеет.

2.  $a > 2$ .  $(a-2)x > (a-2)(a+2) \Leftrightarrow x > a+2$ .

3.  $a < 2$ .  $(a-2)x > (a-2)(a+2) \Leftrightarrow x < a+2$ .

**Ответ:**  $x > 2$  при  $a > 2$ ;  $x < a + 2$ , при  $a < 2$ ;  
 $\emptyset$  при  $a=2$

Пусть коэффициенты системы уравнений

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ a_1x + b_1y = c_1; \end{cases} \text{отличны от нуля.}$$



Тогда:

чтобы система имела **единственное решение**,

необходимо и достаточно выполнение условия  $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$ ;

2) чтобы система имела **бесконечно много** решений,

необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1};$$

3) чтобы система **не имела решений**, необходимо и

достаточно выполнение условия  $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \neq \frac{c}{c_1}$ .

Случай, когда коэффициенты равны нулю, нужно рассматривать отдельно.



**Пример 3.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + (9a^2 - 2)y = 3a \\ x + y = 1. \end{cases}$$

**Решение.** Из второго уравнения находим  $y = 1 - x$  и подставляем в первое. Получим

$$2x + (9a^2 - 2)(1 - x) = 3a \Leftrightarrow (3a - 2)(3a + 2) = (3a - 2)(3a + 1).$$

- 1. Если  $a \neq \pm \frac{2}{3}$ , то  $x = \frac{3a+1}{3a+2}$ ,  $y = 1 - \frac{3a+1}{3a+2} = \frac{1}{3a+2}$ .
- 2.  $a = \frac{2}{3}$ . Уравнение  $x \cdot 0 = 0$  имеет бесчисленное множество решений
- 3.  $a = -\frac{2}{3}$ . Уравнение  $x \cdot 0 = 4$  решений не имеет.

**Ответ:**  $x = \frac{3a+1}{3a+2}$ ,  $y = \frac{1}{3a+2}$  при  $a \neq \pm \frac{2}{3}$ ;  $x = t, t \in R$  при  $a = \frac{2}{3}$ ;  $\emptyset$  при  $a = -\frac{2}{3}$





2. Квадратное уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ )

а) **нет решений** тогда и только тогда, когда  $D < 0$ ;

б) **два различных корня** тогда и только тогда, когда  $D > 0$ ;

с) **два (может быть кратных) корня** тогда и только тогда, когда  $D \geq 0$ ;

д) **два положительных корня** тогда и только тогда,

$$\text{когда} \begin{cases} D > 0, \\ \frac{c}{a} > 0, \\ \frac{-b}{a} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0, \\ af(0) > 0, \\ x_B > 0; \end{cases}$$

е) **два отрицательных корня** тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D > 0, \\ \frac{c}{a} > 0, \\ \frac{-b}{a} < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0, \\ af(0) > 0, \\ x_B < 0; \end{cases}$$

f) **корни разных знаков** тогда и только тогда, когда  $\frac{c}{a} < 0 \Leftrightarrow$

$$ac < 0 \Leftrightarrow af(0) < 0;$$

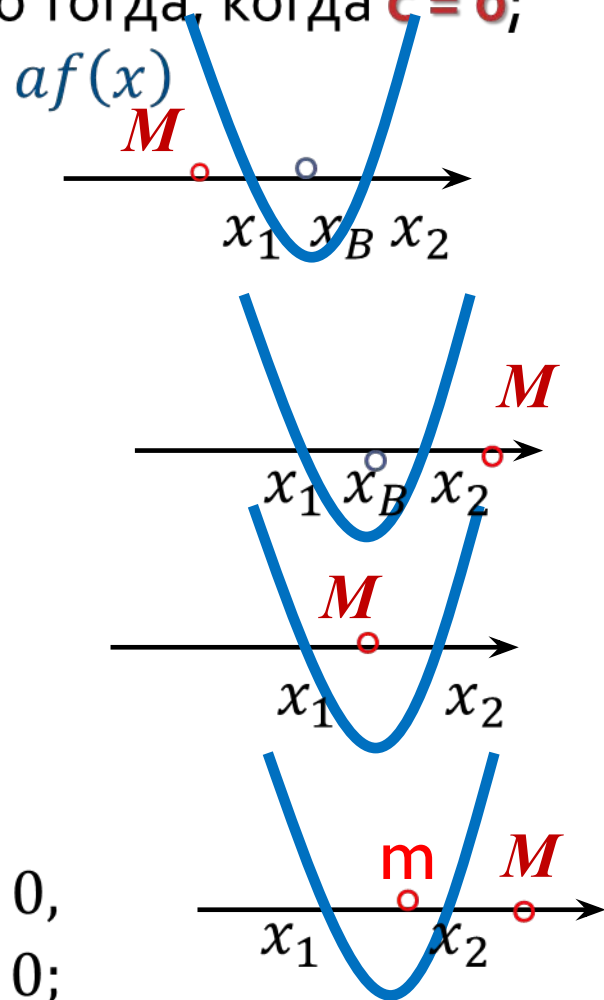
g) **корень, равный нулю**, тогда и только тогда, когда  $c = 0$ ;

$$h) x_2 > x_1 > M \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0, \\ a \cdot f(M) > 0, \\ x_B > M; \end{cases}$$

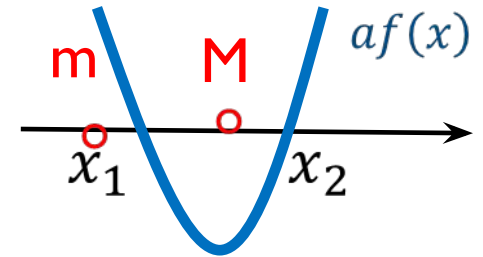
$$i) x_1 < x_2 < M \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0, \\ a \cdot f(M) > 0, \\ x_B < M; \end{cases}$$

$$j) x_1 < M < x_2 \Leftrightarrow a \cdot f(M) < 0;$$

$$k) x_1 < m < x_2 < M \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot f(m) < 0, \\ a \cdot f(M) > 0; \end{cases}$$

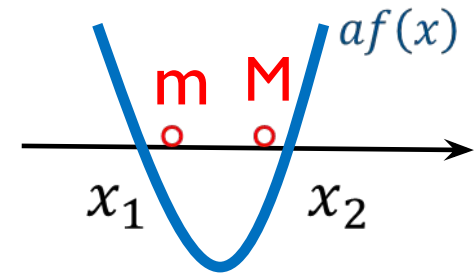


$$h) x_1 < m < M < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot f(m) < 0, \\ a \cdot f(M) < 0; \end{cases}$$

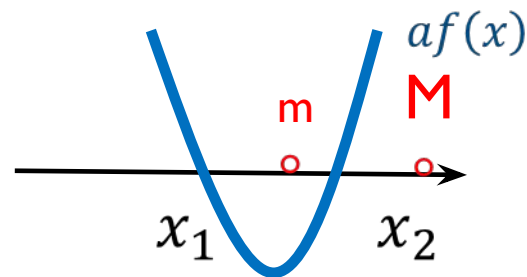
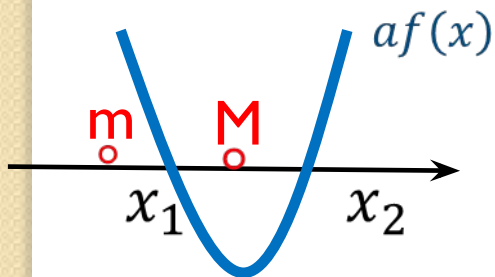


h) **один корень внутри** интервала  $(m; M)$ , а **другой вне** этого интервала тогда

i) и только тогда, когда  $f(m) \cdot f(M) < 0$ .



$$j) m < x_1 < M < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot f(m) > 0, \\ a \cdot f(M) < 0; \end{cases}$$







**Пример 4.** При каких  $m$  все корни уравнения  $x^2 - (3m + 1)x + (2m^2 + 4m - 6) = 0$  а) больше 1; б) меньше -1?



**Решени** а) Решая систему

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_0 > 1 \\ f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m + 1)^2 - 4(2m^2 + 4m - 6) \geq 0 \\ \frac{1}{2}(3m + 1) > 1 \\ 1 - (3m + 1) + (2m^2 + 4m - 6) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (m - 5)^2 \geq 0 \\ m > \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(2m - 3)(m + 2) > 0$$

$$m \in (-\infty; \infty)$$

$$m \in \left(\frac{1}{3}; \infty\right)$$

получаю  $m \in \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$ .

$$m \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{3}{2}; \infty\right),$$



б) Решая систему

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_0 < -1 \\ f(-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; \infty) \\ \frac{1}{2}(3m + 1) < -1 \\ 1 + (3m + 1) + (2m^2 + 4m - 6) > 0, \end{cases}$$

получаем  $m \in (-\infty; -4)$

**Замечание.** Если выражение для корней уравнения не содержит радикалов, то

удобно решать примеры и без применения теорем.

Так как корни квадратного трехчлена  $x_1 = m + 3$ ,  $x_2 = 2m - 2$ , то в случае

а) из системы  $\begin{cases} m + 3 > 1 \\ 2m - 2 > 1 \end{cases}$  имеем  $m \in (\frac{3}{2}; \infty)$ ,

б) решением системы  $\begin{cases} m + 3 < -1 \\ 2m - 2 < -1 \end{cases}$  является  $m \in (-\infty; -4)$ .

**Пример** Найти  $a$  при которых система

5. 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a \\ xy = a - \frac{1}{2} \end{cases}$$
 имеет ровно два решения.

**Решени**

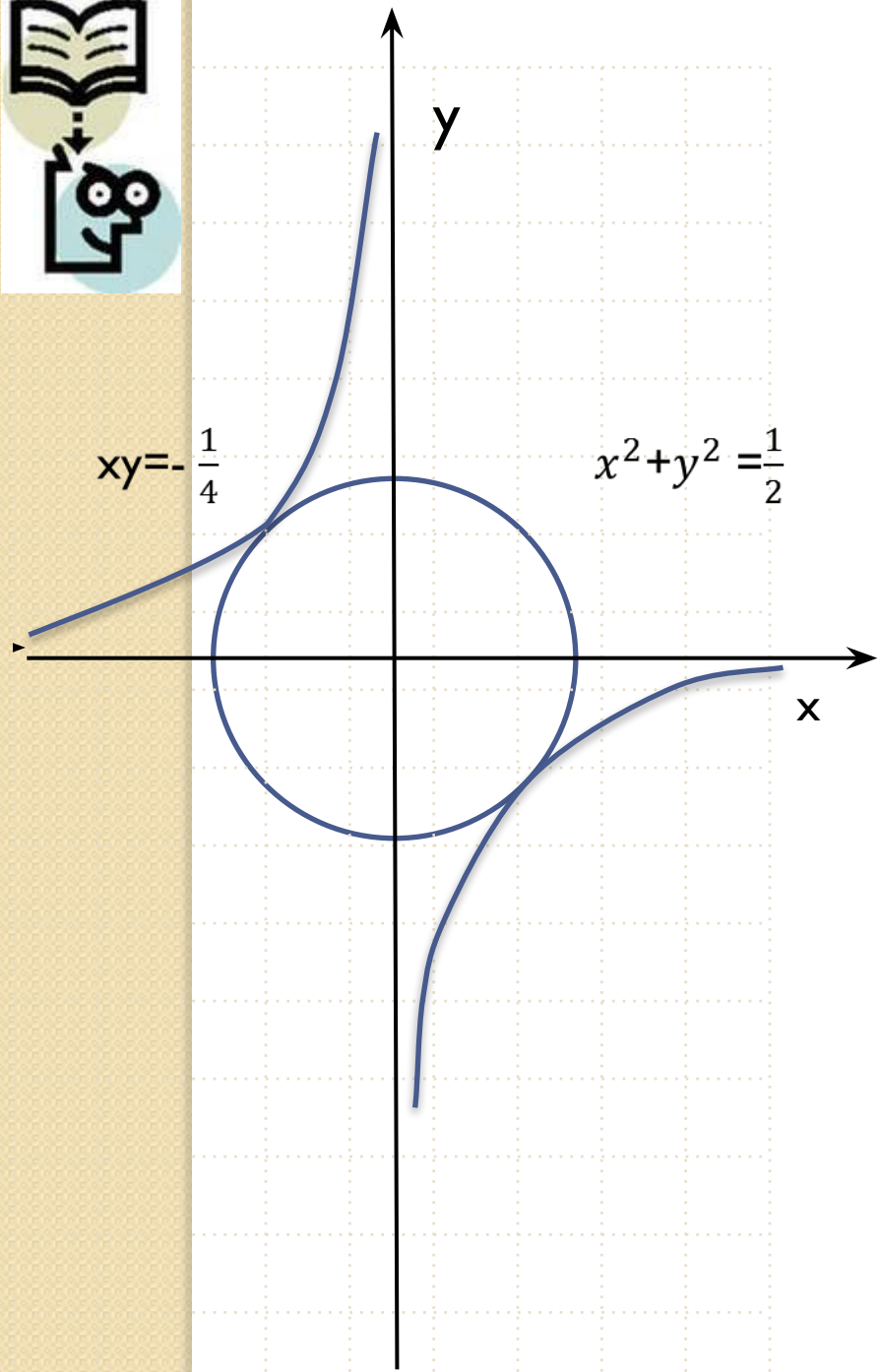
Умножим второе уравнение на 2 и вычтем из первого, получим  $x^2 - 2xy + y^2 = 1 \Leftrightarrow (y - x)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (y - x - 1)(y - x + 1) = 0$ , откуда  $y = x \pm 1$ .

Подставим найденные значения  $y$  в первое уравнение.

Каждое из уравнений  $2x^2 + 2x + 1 - 2a = 0$  и  $2x^2 - 2x + 1 - 2a = 0$  будет иметь два решения, а, следовательно, система – четыре решения, если  $\frac{1}{4}D = 1 - 2(1 - 2a) = 4a - 1 > 0$ .

Уравнения и система не имеет решений, если  $4a - 1 > 0$ . При  $a = \frac{1}{4}$  каждое из уравнений имеет по одному решению ( $x = -\frac{1}{2}$  и  $x = \frac{1}{2}$ ), а

**система два решения  $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ ;  $(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$ .**



**Графическая иллюстрация**  
 $x^2 + y^2 = 2a$  ( $a > 0$ ) – окружность с центром в начале координат,  
 $R = \sqrt{2a}$ .  $xy = a - \frac{1}{2}$  -гипербола  
( $a < \frac{1}{2}$ , 2 – ая и 4 – ая четверти;  
 $a > \frac{1}{2}$ , 1-ая и 3-я четверти),  
при  $a = \frac{1}{2}$  - оси OX и OY.



## Пример 6.

Найти все значения  $m$ , при которых неравенство  $x^2 + 2(m - 3)x + m^2 - 6m < 0$  будет выполнено для любого  $x$ , принадлежащего интервалу  $(0; 2)$ .

## Решени е.

По условию интервал  $(0; 2)$  должен содержаться во множестве решений неравенства  $x^2 + 2(m - 3)x + m^2 - 6m < 0$  (2).

Так как множество решений неравенства (2) интервал  $(x_1; x_2)$ , где  $x_1$  и  $x_2$  - корни квадратного трехчлена, то задачу можно сформулировать следующим образом: При каких  $m$  выполняется соотношение  $x_1 \leq 0 < 2 \leq x_2$ ?

На основании утверждения **h (слайд 7)** значение  $m$  находим из системы неравенств

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(0) \leq 0 \\ f(2) \leq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m \leq 0 \\ 4 + 49m - 3 + m^2 - 6m \leq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \in [0; 6] \\ m \in [-2; 4] \end{cases}, \text{ откуда } \mathbf{m \in [0; 4]}. \end{aligned}$$

## **Литература.**

- 1. Локоть В.В. Задачи с параметрами. –М.: Аркти, 2003**
- 2. Под редакцией Лысенко Ф.Ф., Кулабухова С.Ю. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2013. Ростов на Дону: Легион, 2012**
- 3. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Эффективная подготовка к ЕГЭ. - М.: Экзамен, 2008**

