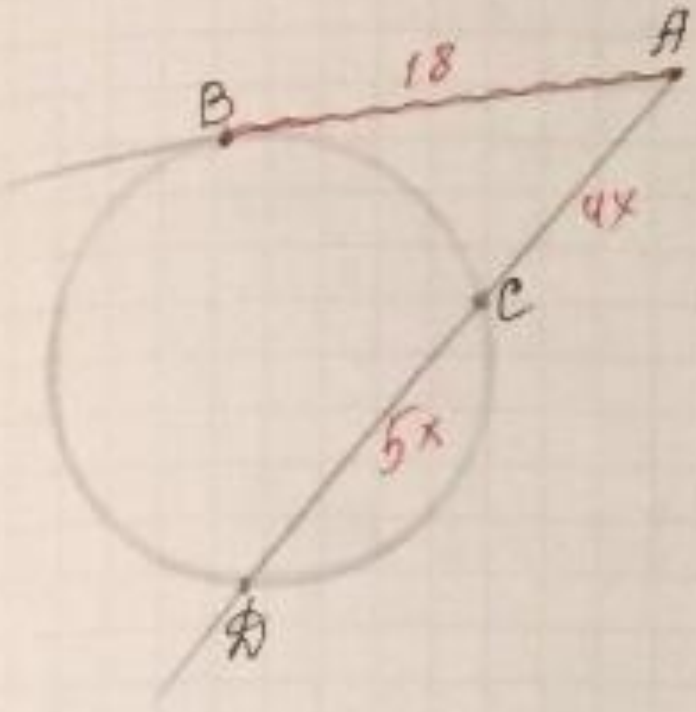
Формула Эйлера для расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника

9Б

Проверка дз

15.29. Через точку A, лежащую вне окружности, проведены две прямые, одна из которых касается окружности в точке B, а другая пересекает окружность в точках C и D (точка C лежит между точками A и D), $AB = 18$ см, $AC : CD = 4 : 5$. Найдите отрезок AD.



Дано: AB – касательная, B – т. касан.
$AB = 18$ см, $AC : CD = 4 : 5$. AD – ?

Решение: по свойству касательной и секущей

$AB^2 = AD \cdot AC$

$18^2 = 9x \cdot 4x$

$324 = 36x^2$, $x^2 = 9$, $x = 3$, -3 не подходит

$AD = 9x = 9 \cdot 3 = 27$ (см)

Ответ: 27 см.

15.30. Через точку A, лежащую вне окружности (рис. 15.17), проведены две прямые, одна из которых пересекает окружность в точках B и C (точка B лежит между точками A и C), а другая — в точках D и E (точка D лежит между точками A и E).

1) Докажите, что $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

2) Найдите отрезок AE, если $AB = 18$ см, $BC = 12$ см и $AD : DE = 5 : 7$.

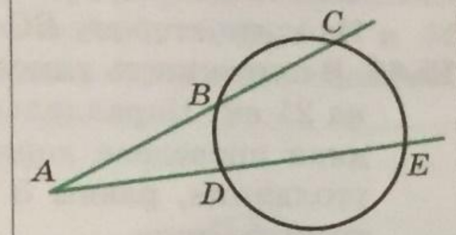
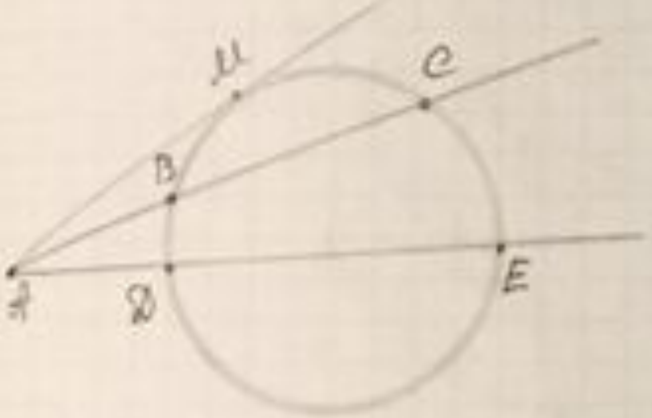


Рис. 15.17

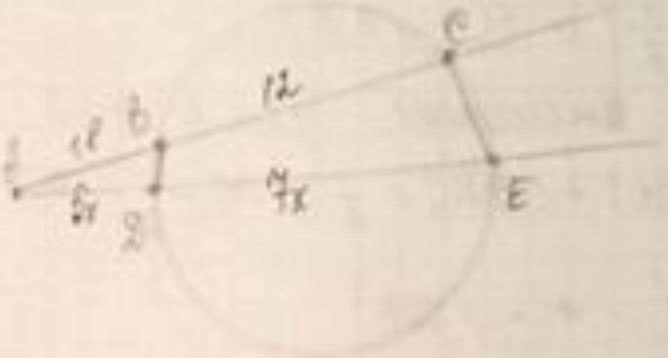


1) Доп. построение:
проведем касательную AM,
M – точка касания

по свойству касательной и секущей

$AM^2 = AC \cdot AB$

$AM^2 = AE \cdot AD$ $\Rightarrow AC \cdot AB = AE \cdot AD$



2) Из 1-го условия

$AC \cdot AB = AE \cdot AD$

$30 \cdot 18 = 12x \cdot 5x$

$540 = 60x^2$, $x^2 = \frac{54}{6}$, $x^2 = 9$

$x = \pm 3$

-3 не подходит

$x = 3$

$AE = 12x = 12 \cdot 3 = 36$ (см)

Лемма

Хорда окружности равна произведению диаметра и синуса любого вписанного угла, опирающегося на эту хорду.

Доказательство

На рисунке 3.1 отрезок MN — хорда окружности с центром в точке O. Проведём диаметр MP. Тогда угол MNP равен 90° как вписанный угол, опирающийся на диаметр. Пусть величина вписанного угла MPN равна α. Тогда из прямоугольного треугольника MPN получаем:

$$MN = MP \sin\alpha.$$

Все вписанные углы, опирающиеся на хорду MN, равны α или $180^\circ - \alpha$.

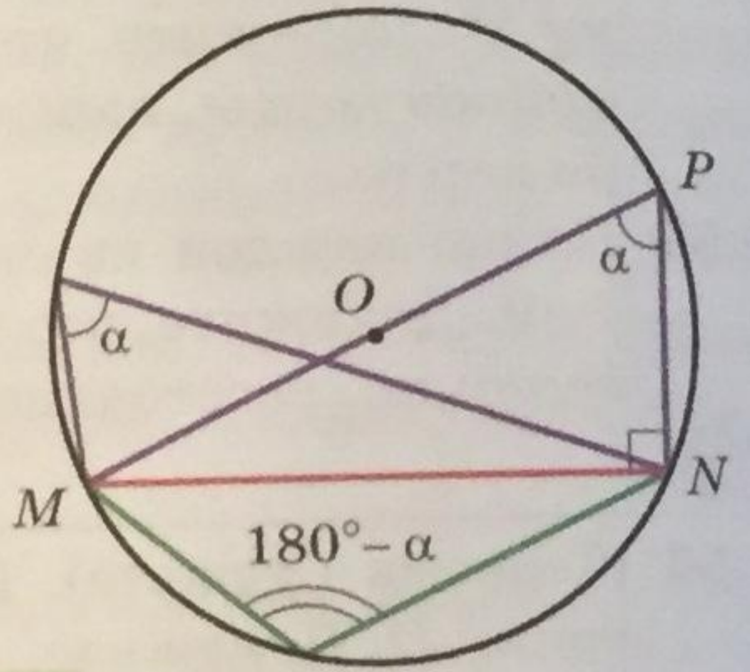


Рис. 3.1

Учебник , стр.31-32

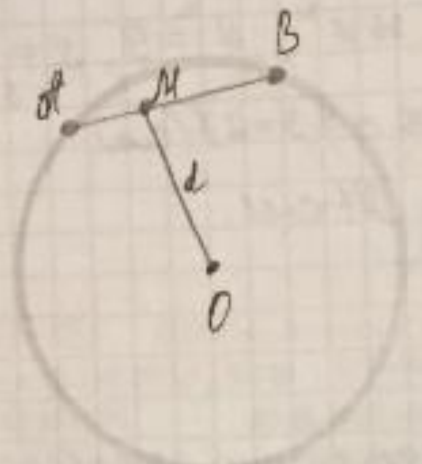
№15.25 (8 класс)

На хорде AB отметили точку M.

Докажите, что $MA \cdot MB = R^2 - d^2$, где

R – радиус окр., d – расстояние от точки M

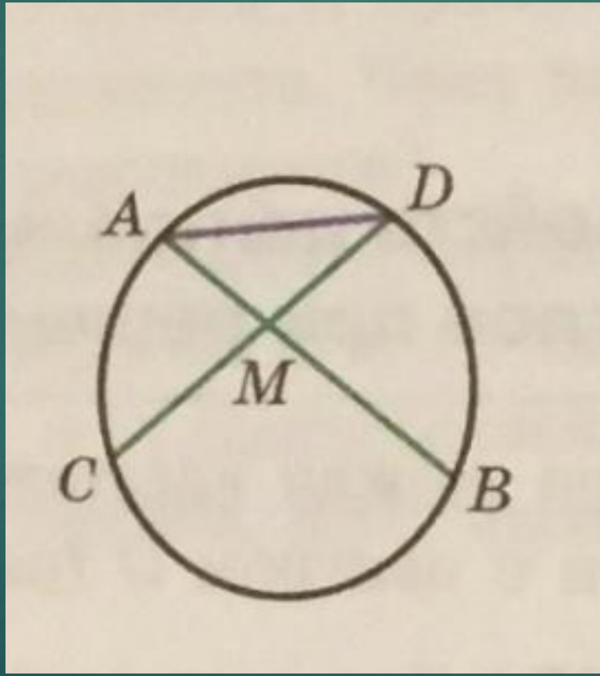
до центра окружности.



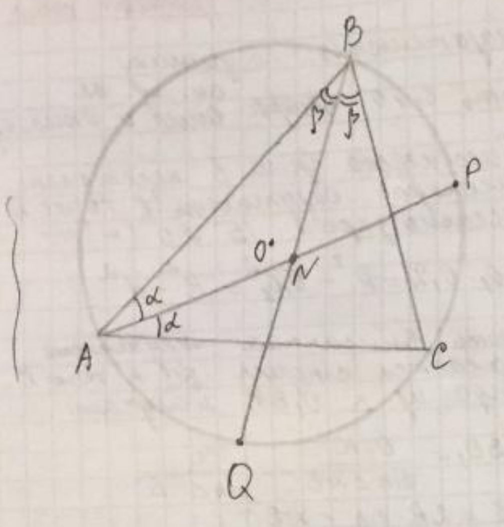
верждение самостоятельно.

Задача 2. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M (рис. 9.2). Докажите, что $\angle AMC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup BD)$.

Решение. Угол AMC является внешним для треугольника AMD. Тогда $\angle AMC = \angle DAB + \angle ADC = \frac{1}{2}\cup DB + \frac{1}{2}\cup AC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup BD)$. ■



Формула Эйлера



Дано: $\triangle ABC$

O – центр описанной окр.

N – центр вписанной окр.

R – радиус опис. окр.

r – радиус впис. окр.

Доказать:

$$d^2 = R^2 - 2Rr$$

Доказательство:

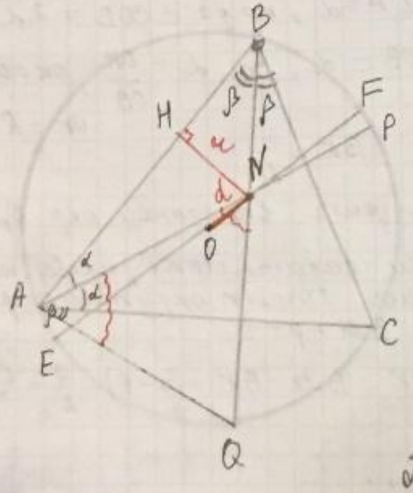
$\angle CBA = 2\beta$

$\angle BAC = 2\alpha$

Проведем биссектрисы углов A и B до пересечения с описанной окружностью BQ и AP, и диаметр EF.

По теореме о пересечении хорд имеем равенство

$$EN \cdot NF = BN \cdot NQ$$



Угол $\angle NAQ = \alpha + \beta$

$$\angle ANQ = \frac{1}{2}(\smile AEQ + \smile BFP) = \frac{\smile AEQ + \smile BFP}{2} = \frac{2\beta + 2\alpha}{2} = \alpha + \beta$$

$\angle NAQ = \angle ANQ$,

$\triangle ANQ$ – равнобедренный с осн. AN

$AQ = NQ$

Из $\triangle ABQ$ $AQ = 2R \cdot \sin\beta = NQ$

Из $\triangle HBN$: $\sin\beta = \frac{HN}{BN}$, $BN = \frac{r}{\sin\beta}$

Подставляем в формулу с хордами $EN \cdot NF = BN \cdot NQ$

$$(R+d)\cdot(R-d) = \frac{r}{\sin\beta} \cdot 2R\sin\beta$$

$$R^2 - d^2 = 2Rr, \quad d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Д/з :задача о трилистнике

№8.25
Биссектриса угла A ΔABC пересекает описанную окружность в точке D.
Точка O - центр вписанной окр. ΔABC
Докажите, что $DO = DB = DC$.