Частные производные второго порядка

20.01.21

Рассмотрим функцию двух независимых переменных — например, $z = x^3y^3$. Возьмем от заданной функции первые частные производные по x и y:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^3; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^3y^2.$$

Мы видим, что первые частные производные от заданной функции также являются функциями независимых переменных x и y, которые, в свою очередь, тоже имеют частные производные по x и y:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 6xy^3; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 9x^2y^2; \\ &\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 9x^2y^2; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 6x^3y. \end{aligned} \tag{21.33}$$

Определение. Частной производной второго порядка от заданной функции называется частная производная от частной производной первого порядка.

Частные производные второго порядка от функции $z = f(x; y)$ обозначаются так:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f(x; y)}{\partial x^2}$, $f''_{xx}(x; y)$ — частная производная второго порядка, взятая по x последовательно 2 раза;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ — частная производная второго порядка, взятая первый раз по x, второй — по y;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ — частная производная второго порядка, взятая 2 раза по y;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ — частная производная второго порядка, взятая вначале по y, а затем по x.

Частные производные второго порядка, взятые по различным аргументам (например, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$), называются смешанными.

Пример: Найти частные производные второго порядка от функции

z = arctg(2xy).

Решение: Найдем частные производные первого порядка.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2y}{1+4x^2y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x}{1+4x^2y^2}$$

Частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2y}{(1+4x^2y^2)^2}\cdot 8xy^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2(1+4x^2y^2) - 2y\cdot 8x^2y}{(1+4x^2y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2x}{(1+4x^2y^2)^2}\cdot 8x^2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2(1+4x^2y^2) - 2x\cdot 8xy^2}{(1+4x^2y^2)^2}$$

Задание на пару:

8.14. Найдите частные производные второго порядка от функции $u = r$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

8.15. Покажите, что $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

8.16. Покажите, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2}$, где $u = \ln r$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.