Системы счисления

Система счисления

– способ записи чисел с помощью заданного набора специальных знаков (цифр).

– специальный язык, алфавитом которого являются символы, называемыми цифрами, а синтаксисом – правила, позволяющие однозначно сформировать запись чисел.

Требования к системе счисления

– возможность представления любого числа в рассматриваемом диапазоне величин;

– единственность представления (каждой комбинации символов должна соответствовать одна и только одна величина);

– простота оперирования с числами;

– краткость и простота записи чисел;

– легкость овладения системой.

Цифры – последовательность условных знаков для записи чисел.

Сокращенная запись числа:

$$A= a_{n-1}\ a_{n-2} \ldots a_i \ldots a_1\ a_0,\ a_{-1}\ a_{-2} \ldots a_{-m}$$

Наиболее известна десятичная СС, в которой для записи чисел используются цифры 0,1,:,9.

Разряд – отдельная позиция в изображении числа. В числе A $n+m$ разрядов.

Разрядность – число разрядов в записи числа. Разрядность совпадает с длиной числа.

Система счисления

Позиционная

количественное значение каждой цифры зависит от её позиции в числе

Пример: арабская

Непозиционная

величина, которую обозначает цифра, не зависит от позиции цифры в записи числа

Пример: римская

Непозиционная система счисления

Уна́рная система счисления — положительная суммарная целочисленная система счисления с основанием, равным 1.

Запись числа:

$$A_{(D)} = D_1 + D_2 + \ldots + D_k = \sum_{i=1}^{k} D_i$$

где A(D) - запись числа A в системе счисления D;

D – основание системы счисления.

Единичная система (непозиционная)

В древние времена, когда люди начали считать, появилась потребность в записи чисел. Первоначально количество предметов отображали равным количеством каких-нибудь значков: насечек, черточек, точек.

Изучение археологами «записок» времен палеолита на кости, камне, дереве показало, что люди стремились группировать отметки по 3, 5, 7, 10 штук. Такая группировка облегчала счет. Люди учились считать не только единицами, но и тройками, пятерками и пр. Поскольку первым **вычислительным инструментом** у человека были пальцы, поэтому и счет чаще всего вели группами по 5 или по 10 предметов.

В дальнейшем свое название получили десяток десятков (сотня), десяток сотен (тысяча) и т. д. Такие узловые числа для удобства записи стали обозначать особыми значками — цифрами. Если при подсчете предметов их оказывалось 2 сотни, 5 десятков и еще 4 предмета, то при записи этой величины дважды повторяли знак сотни, пять раз — знак десятков и четыре раза знак единицы.

В таких системах счисления от положения знака в записи числа не зависит величина, которую он обозначает; поэтому они называются непозиционными системами счисления.

Непозиционными системами пользовались древние египтяне, греки, римляне и некоторые другие народы древности.

Система счисления древнего Египта

В древнеегипетской системе счисления, которая возникла во второй половине третьего тысячелетия до н.э., использовались специальные цифры для обозначения чисел 1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7. Числа в египетской системе счисления записывались как комбинации этих цифр, в которых каждая из них повторялась не более девяти раз.

1	черта (шест)
10	пятка
100	петля
1000	кувшинка (лотос)

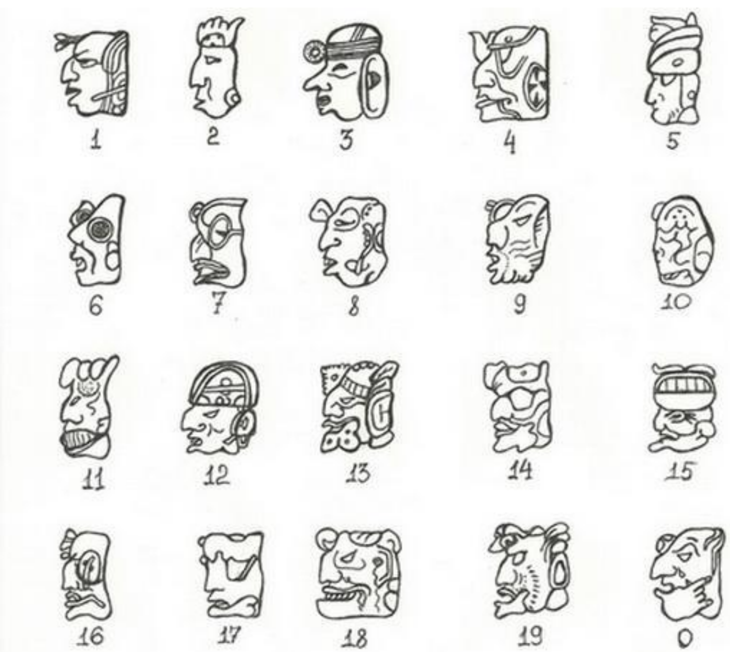
10 000	палец
100 000	жаба
1 000 000	человек

345

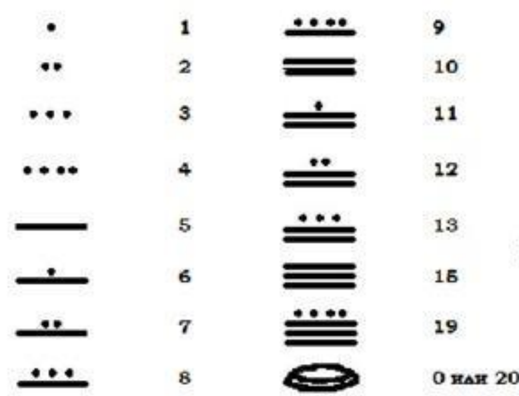
В основе как палочной, так и древнеегипетской системы счисления лежал простой принцип сложения, согласно которому *значение числа равно сумме значений цифр, участвующих в его записи*. Учёные относят древнеегипетскую систему счисления к десятичной <u>непозиционной.</u>

Цифры майя

Другая система счисления основанная на позиционном принципе, возникла у индейцев майя, обитателей полуострова Юкатан (Центральная Америка) в середине 1 – го тыс. н. э. У майя существовали две системы счисления: одна, напоминающая египетскую, употреблялась в повседневной жизни, другая – позиционная, с основанием 20 и особым знаком для нуля, применялась при календарных расчетах. Запись в этой системе, как и в нашей современной, носила абсолютный характер.



Нумерация индейцев Майя



59 16 23

20+20+5+5+5+1+1+1+1 = 59;

5+5+5+1 = 16;

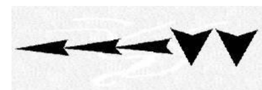
20+1+1+1 = 23

Записывались цифры числа в столбик, начина
знаков затем зн , а потом
больших значений и заканчивая меньшими.

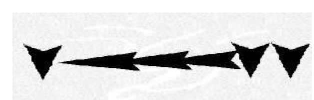
Сначала эта нумерация обслуживала пятеричную систему счисления, а потом ее приспособили для двадцатеричной.

Вавилонская шестидесятиричная система счисления

Числа в этой системе счисления составлялись из знаков двух видов: прямой клин служил для обозначения единиц, а лежачий клин - для обозначения десятков. Для определения значения числа надо было изображение числа разбить на разряды справа налево.

Например: Число 32 записывали так: 

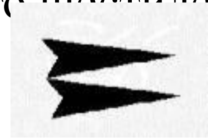
Знаки прямой клин и лежачий клин служили цифрами в этой системе. Новый разряд начинался с появления прямого клина после лежачего, если рассматривать число справа налево. Число 60 снова обозначалось тем же прямым клином, что и 1, этим же знаком обозначались и числа $3600=60^2$, $216000=60^3$ и все другие степени 60. Поэтому вавилонская система счисления получила название *шестидесятеричной*. Значение числа определяли по значениям составляющих его цифр, но с учётом того, что цифры в каждом последующем разряде значили в 60 раз больше тех же цифр в предыдущем разряде.

Пример. Число 92=60+32 записывали так: 

а т.к. 444=7*60+24, то число 444 в этой системе записи чисел имело вид

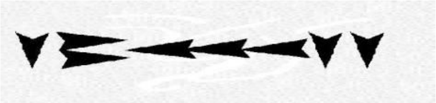
Все числа от 1 до 59 вавилоняне записывали в десятичной непозиционной системе, а число в целом - в позиционной системе с основанием 60.

Запись числа у вавилонян была неоднозначной, т.к. не существовало цифры для обозначения нуля. Запись числа 92, приведённая выше, могла обозначать не только 92=60+32, но и, например, 3632=3600+32. Для определения абсолютного значения числа требовались дополнительные сведения. Впоследствии вавилоняне ввели специальный символ для обозначения пропущенного шестидесятеричного разряда



что соответствует появлению цифры 0 в записи десятичного числа.

Пример. Число 3632 теперь нужно было записывать так:



Но в конце числа этот символ обычно не ставился, т.е. этот символ всё же не был цифрой "ноль" в нашем понимании, и опять же требовались дополнительные сведения для того, чтобы отличить 1 от 60, от 3600 и т.д.

Таблицу умножения вавилоняне никогда не запоминали, т.к. это было практически невозможно. При вычислениях использовались готовые таблицы умножения.

Шестидесятеричная вавилонская система - первая известная нам система счисления, частично основанная на **позиционном** принципе.

Система вавилонян сыграла большую роль в развитии математики и астрономии, её следы сохранились и до наших дней. Так, мы до сих пор делим час на 60 минут, а минуту на 60 секунд. Следуя примеру вавилонян, мы и окружность делим на 360 частей (градусов).

Римская система счисления

Единицы	Десятки	Сотни	Тысячи
1 I	10 X	100 C	1000 M
2 II	20 XX	200 CC	2000 MM
3 III	30 XXX	300 CCC	3000 MMM
4 IV	40 XL	400 CD	
5 V	50 L	500 D	
6 VI	60 LX	600 DC	
7 VII	70 LXX	700 DCC	
8 VIII	80 LXXX	800 DCCC	
9 IX	90 XC	900 CM	

Римская система счисления

Сначала записывается число тысяч, затем сотен, затем десятков и единиц.

Принцип сложения - если большая цифра стоит перед меньшей, то они добавляются;

Принцип вычитания - если меньшая стоит перед большей, то меньшая вычитается из большей.

Пример 1. Число 32 в римской системе счисления имеет вид XXXII=(X+X+X)+(I+I)=30+2 (две группы первого вида).

Пример 2. Число 444, имеющее в своей десятичной записи 3 одинаковые цифры, в римской системе счисления будет записано в виде CDXLIV=(D-C)+(L-X)+(V-I)=400+40+4 (три группы второго вида).

Пример 3. Число 1974 в римской системе счисления будет иметь вид MCMLXXIV=M+(M-C)+L+(X+X)+(V-I)=1000+900+50+20+4 (наряду с группами обоих видов в формировании числа участвуют отдельные "цифры").

Задача: Записать десятичный эквивалент MMMCCLII

Кириллическая система счисления

Данная система счисления является алфавитной т.е. вместо цифр используются буквы алфавита. Данная система счисления применялась нашими предками и была достаточно сложной, т.к. использует в качестве цифр 27 букв

Буква	Название	Числовой эквивалент	Буква	Название	Числовой эквивалент	Буква	Название	Числовой эквивалент
а҃	Аз	1	і҃	И	10	р҃	Рцы	100
в҃	Веди	2	к҃	Како	20	с҃	Слово	200
г҃	Глаголь	3	л҃	Люди	30	т҃	Твердо	300
д҃	Добро	4	м҃	Мыслете	40	ѹ҃	Ук	400
є҃	Есть	5	н҃	Наш	50	ф҃	Ферт	500
ѕ҃	Зело	6	ѯ҃	Кси	60	х҃	Хер	600
з҃	Земля	7	о҃	Он	70	ѱ҃	Пси	700
и҃	Иже	8	п҃	Покой	80	ѿ҃	Омега	800
ѳ҃	Фита	9	ч҃	Червь	90	ц҃	Цы	900

Кириллическая система счисления

Большие числа представлялись на основе данных чисел.

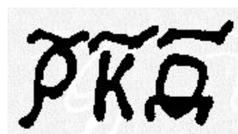
	Тысяча	1 000
	Тьма	10 000
	Легион	100 000
	Леодр	1 000 000
	Ворон	10 000 000
	Колода	100 000 000

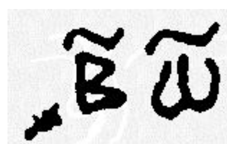
Кириллическая система счисления

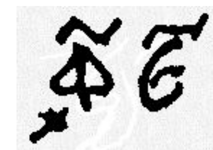
Вот некоторые числа записанные в славянской системе счисления

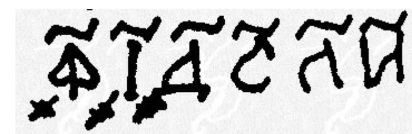
Данная система является непозиционной, т.е. число не зависит от последовательности цифр.

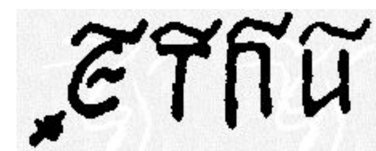
12 

129 

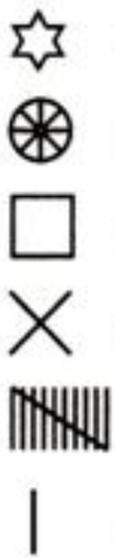
2800 

500005 

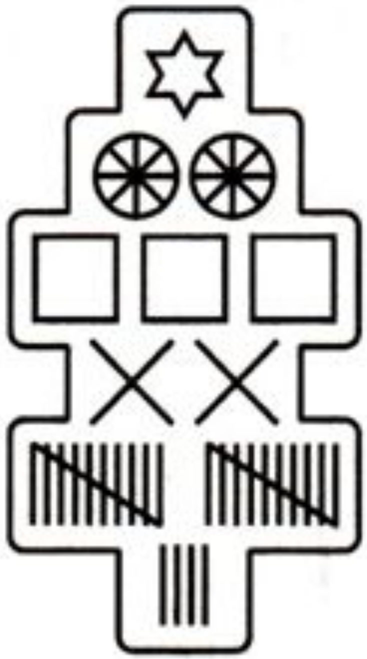
514238 

5388 

Ясачная грамота



— тысяча рублей,
— сто рублей,
— десять рублей,
— один рубль,
— десять копеек,
— копейка.



ОБОЗНАЧЕНИЯ ЧИСЕЛ

Современная	Египетская (иероглифич.)	Египетская (иератическая)	Вавилонская	Греческая (аттическая)	Греческая (ионическая)	Римская	Древнееврейская	Индейцев майя	Древнекитайская (палочк.)	Древнекит. (иероглифическая)	Индийск. (деванагари)	Арабская (алфавит)	Арабская (современная)	Арабская (гобари)
1	𓏺	\	𒁹	I	A	I	א	𝋡	𝍠	一	१	ا	١	1
2	𓏻	\\	𒈫	II	B	II	ב	𝋢	𝍡	二	२	ب	٢	2
3	𓏼	\\\	𒐈	III	Γ	III	ג	𝋣	𝍢	三	३	ج	٣	3
4	𓏽	[illegible]	𒐉	IIII	Δ	IIII	ד	𝋤	𝍣	四	४	د	٤	4
5	𓏾	[illegible]	𒐊	𐅃	E	V	ה	𝋥	𝍤	五	५	ه	٥	5
6	𓏿	[illegible]	𒐋	𐅃I	F	VI	ו	𝋦	𝍥	六	६	و	٦	6
7	𓐀	[illegible]	𒐌	𐅃II	Z	VII	ז	𝋧	𝍦	七	७	ز	٧	7
8	𓐁	[illegible]	𒐍	𐅃III	H	VIII	ח	𝋨	𝍧	八	८	ح	٨	8
9	𓐂	[illegible]	𒐎	𐅃IIII	Θ	IX	ט	𝋩	𝍨	九	९	ط	٩	9
10	𓎆	λ	𒌋	Δ	I	X	י	𝋪	𝍩	十	१०	ي	١٠	10
20	𓎇	[illegible]	𒎙	ΔΔ	K	XX	כ	𝋡𝋠	𝍪	二十	२०	ك	٢٠	20
30	𓎈	[illegible]	𒌍	ΔΔΔ	Λ	XXX	ל	𝋡𝋪	𝍫	三十	३०	ل	٣٠	30
40	𓎉	[illegible]	𒐏	ΔΔΔΔ	M	XL	ם	𝋢𝋠	𝍬	四十	४०	م	٤٠	40
50	𓎊	[illegible]	𒐐	𐅄	N	L	נ	𝋢𝋪	𝍭	五十	५०	ن	٥٠	50
60	𓎋	[illegible]	𒁹	𐅄Δ	Ξ	LX	ס	𝋣𝋠	𝍮	六十	६०	س	٦٠	60
70	𓎌	[illegible]	𒁹𒌋	𐅄ΔΔ	O	LXX	ע	𝋣𝋪	𝍯	七十	७०	ع	٧٠	70
80	𓎍	[illegible]	𒁹𒎙	𐅄ΔΔΔ	Π	LXXX	פ	𝋤𝋠	𝍰	八十	८०	ف	٨٠	80
90	𓎎	[illegible]	𒁹𒌍	𐅄ΔΔΔΔ	Ϙ	XC	צ	𝋤𝋪	𝍱	九十	९०	ص	٩٠	90
100	𓍢	[illegible]	𒁹𒐏	H	P	C	ק	𝋥𝋠	𝍠	百	१००	ق	١٠٠	100

Недостатки непозиционной системы счисления:

– Существует постоянная потребность введения новых знаков для записи больших чисел.
– Невозможно представлять дробные и отрицательные числа, отсутствие нуля.
– Сложно выполнять арифметические операции, так как не существует алгоритмов их выполнения.

Позиционная система счисления:

Основание - возводимое в степень целое число, равное количеству знаков или символов, используемых для изображения числа в данной системе счисления.

Основание показывает во сколько раз изменяется количественное значение цифры при перемещении ее на соседнюю позицию.

Позиционная система счисления:

Базис – последовательность чисел, каждое из которых задает количественное значение или "вес" каждого разряда.

Десятичная система: $10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, \ldots, 10^n, \ldots$

Двоичная система: $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots, 2^n, \ldots$

Восьмеричная система: $8^0, 8^1, 8^2, 8^3, 8^4, \ldots, 8^n, \ldots$

Позиционная система счисления:

Алфавит - совокупность различных цифр, используемых для записи чисел. Количество цифр в алфавите равно основанию системы счисления.

Десятичная система: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Двоичная система: {0, 1}

Восьмеричная система: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

Шестнадцатеричная система: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E,F}

Позиционная система счисления:

Развернутая форма представления числа:

$A_q=\pm(a_{n-1}q^{n-1}+a_{n-2}q^{n-2}+...+a_0q^0+a_{-1}q^{-1}+a_{-2}q^{-2}+...+a_{-m}q^{-m})$,

$$A_q = \pm\sum_{i=-m}^{n-1} a_i q^i$$

где A — само число,

q — основание системы счисления,

a_i — цифры, принадлежащие алфавиту данной системы счисления,

n — число целых разрядов числа,

m — число дробных разрядов числа

Позиционная система счисления:

Значение цифры на любой *i*-й позиции:

$$a_i q^i,$$

где *i* – номер позиции в числе, *q* – основание системы счисления, a_i – вес цифры *i*-го разряда.

Позиционная система счисления:

Свернутая форма представления числа:

$$A=\pm a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_{0},a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-m\ (q)}$$

Название системы определяет ее основание *q*: десятичная, двоичная, восьмеричная и т.д.

Основанием системы счисления может быть любое число.

Возможно бесчисленное множество позиционных систем счисления.

Критерии выбора системы счисления для ЭВМ

- Наличие физических элементов, способных изобразить символы системы.
- Экономичность системы, то есть количество элементов, необходимое для представления многоразрядных чисел.
- Трудоемкость выполнение арифметических операций в ЭВМ.
- Быстродействие вычислительных устройств.
- Наличие формального математического аппарата для анализа и синтеза вычислительных устройств.
- Удобство работы человека с машиной.
- Наибольшая помехоустойчивость кодирования цифр на носителях информации.

Двоичная СС

База двоичной системы счисления использует для изображения чисел только две цифры: $a_i = \{0,1\}$. Основание: $p = 2_{(10)} = 10_{(2)}$. Каждый разряд двоичного числа называют битом.

Любое двоичное число, используя формулу (1.2) можно записать в развернутом виде. Если затем выполнить все арифметические действия, по правилам десятичной арифметики, то получим десятичное число, эквивалентное двоичному. Например,

$110101{,}101_{(2)} = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = 53{,}625_{(10)}$.

Двоичное сложение	Двоичное вычитание	Двоичное умножение
0 + 0 = 0 0 + 1 = 1 1 + 0 = 1 1 + 1 = 10	0 – 0 = 0 1 – 0 = 1 1 – 1 = 0 10 – 1 = 1	0 • 0 = 0 0 • 1 = 0 1 • 0 = 0 1 • 1 = 1

Восьмеричная СС

Восьмеричная и шестнадцатеричная системы счисления относятся к двоично-кодированным системам, когда основание системы счисления ***p*** представляет целую степень двойки:

$p = 8 = 2^3$ - для восьмеричной,
$p = 16 = 2^4$ - для шестнадцатеричной.

База **восьмеричной системы** счисления использует для изображения чисел восемь цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Основание $p = 8_{(10)} = 10_{(8)}$. Если восьмеричное число записать в развернутом виде в виде суммы значений цифр и выполнить арифметические действия по правилам десятичной системы, то получим десятичный эквивалент восьмеричного числа. Например,

$125{,}4_{(8)} = 1\cdot8^2 + 2\cdot8^1 + 5\cdot8^0 + 4\cdot8^{-1} = 85{,}5_{(10)}$.

Восьмеричная таблица сложения

+	0	1	2	3	4	5	6	7	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	2	3	4	5	6	7	10	11
2	2	3	4	5	6	7	10	11	12
3	3	4	5	6	7	10	11	12	13
4	4	5	6	7	10	11	12	13	14
5	5	6	7	10	11	12	13	14	15
6	6	7	10	11	12	13	14	15	16
7	7	10	11	12	13	14	15	16	17
10	10	11	12	13	14	15	16	17	20

Восьмеричная таблица умножения

X	0	1	2	3	4	5	6	7	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	10
2	0	2	4	6	10	12	14	16	20
3	0	3	6	11	14	17	22	25	30
4	0	4	10	14	20	24	30	34	40
5	0	5	12	17	24	31	36	43	50
6	0	6	14	22	30	36	44	52	60
7	0	7	16	25	34	43	52	61	70
10	0	10	20	30	40	50	60	70	100

Шестнадцатеричная СС

В **шестнадцатеричной системе** для записи чисел используются цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и прописные латинские буквы *A, B, C, D, E, F,* имеющие значение десятичных чисел 10, 11, 12, 13, 14, 15 соответственно. Поэтому шестнадцатеричное число может иметь, например, вид $3E5,C_{(16)}$. Представляя это число в развернутом виде, получим

$3E5,C_{(16)} = 3 \cdot 16^2 + 14 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0 + 12 \cdot 16^{-1}$.

Выполняя арифметические операции по правилам десятичной системы, получим: $3E5,C(_{16)} = 560,75_{(10)}$.

Шестнадцатеричная таблица сложения

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F
1	01	02	03	04	05	06	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10
2	02	03	04	05	06	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11
3	03	04	05	06	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12
4	04	05	06	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13
5	05	06	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13	14
6	06	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13	14	15
7	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13	14	15	16
8	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
C	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	0D	0E	0F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	0E	0F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	0F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

Шестнадцатеричная таблица умножения

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00
1	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F
2	00	02	04	06	08	0A	0C	0E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3	00	03	06	09	0C	0F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D
4	00	04	08	0C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C
5	00	05	0A	0F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	48
6	00	06	0C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A
7	00	07	0E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69
8	00	08	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	00	09	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87
A	00	0A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96
B	00	0B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8E	9A	A5
C	00	0C	18	24	30	3C	38	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	BA
D	00	0D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3
E	00	0E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2
F	00	0F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1

Системы счисления			
Десятичная q = 10: цифры 0,1,2,…, 9	Двоичная q = 2: цифры 0,1	Восьмеричная q = 8: цифры 0,1,2,…, 6,7	Шестнадцатеричная q = 16: цифры 0,1,…,9,A,B,C,D,E,F
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11

Рассмотрим пример арифметических операций с двоичными числами

$$\begin{array}{r} 10011{,}11 \\ +\ 11001{,}01 \\ \hline 101101{,}00_{(2)} \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 101110{,}001 \\ -\ \ \ 101{,}011 \\ \hline 101000{,}110 \end{array}$$

$$110{,}11 \cdot 1010{,}1 = 1000110{,}111_{(2)}.$$

$$\begin{array}{r} 11011 \\ \times\ 10101 \\ \hline 11011 \\ +\ 00000\ \ \\ 11011\ \ \ \ \\ 00000\ \ \ \ \ \ \\ 11011\ \ \ \ \ \ \ \ \\ \hline 1000110111 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1100011 & 10010 \\ \cline{2-2} -\,10010\ \ & 101{,}1 \\ \cline{1-1} -\,11011 & \\ 10010 & \\ \cline{1-1} -\,10010 & \\ 10010 & \\ \cline{1-1} 00000 & \end{array}$$

Рассмотрим пример арифметических операций с 8-ричными и 16-ричными числами

$$\begin{array}{r} DBF \\ +\ E6C \\ \hline 1C2B \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 63{,}20 \\ -\ 35{,}64 \\ \hline 25{,}34 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} F93{,}B5 \\ -\ AD1{,}ED \\ \hline 4C1{,}C8 \end{array}$$

Методы перевода чисел из одной СС в другую

Табличный метод

Пример 1.1. Перевести число $A = 238_{(10)}$ в двоичную систему счисления:

Решение. Подставив значение двоичных эквивалентов десятичных цифр и степеней основания, получим:

$A = 238_{(10)} = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 =$
$= 0010 \cdot 1100100 + 0011 \cdot 1010 + 1000 \cdot 0001 = = 11101110_{(2)}$.

Ответ: $238_{(10)} = 11101110_{(2)}$.

Десятичное число:	10^0	10^1	10^2
Двоичный эквивалент:	0001	1010	1100100

Пример 1.2. Перевести двоичное число $A = 11001{,}1_{(2)}$ в десятичную систему счисления:

Решение: $A = 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0{,}5 = 25{,}5_{(10)}$.

Ответ: $A = 25{,}5_{(10)}$.

Двоичное число:	0,1	00001	00010	00100	01000	10000
Десятичный эквивалент:	$2^{-1}=0{,}5$	$2^0=1$	$2^1=2$	$2^2=4$	$2^3=8$	$2^4=16$

Из двоичной системы число $10{,}11_2$:

$$10{,}11_2 = 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = 2{,}75_{10}.$$

Из восьмеричной системы число $67{,}5_8$:

$$67{,}5_8 = 6 \times 8^1 + 7 \times 8^0 + 5 \times 8^{-1} = 55{,}625_{10}.$$

Из шестнадцатеричной системы число $19F_{16}$:

$$\begin{aligned} 19F_{16} &= 1 \times 16^2 + 9 \times 16^2 + F \times 16^0 = \\ &= 1 \times 256 + 9 \times 16 + 15 \times 1 = 415_{10}. \end{aligned}$$

Перевод целых чисел из одной системы счисления в другую

Алгоритм перевода целых чисел из системы с основанием ***p*** в систему с основанием ***q***:

1) Основание новой системы счисления выразить цифрами исходной системы счисления и все последующие действия производить в исходной системе счисления.
2) Последовательно выполнять деление данного числа и получаемых целых частных на основание новой системы счисления до тех пор, пока не получим частное, меньшее делителя.
3) Полученные остатки, являющиеся цифрами числа в новой системе счисления, привести в соответствие с алфавитом новой системы счисления.
4) Составить число в новой системе счисления, записывая его, начиная с последнего остатка.

1. Разделить исходное число $A_{(p)}$ на основание новой системы счисления, записанное в старой – $q_{(p)}$. Полученный остаток есть младшая цифра искомого числа.
2. Целую часть частного вновь разделить на основание новой системы счисления, записанное в старой – $q_{(p)}$. Остаток является очередной цифрой искомого числа.
3. Повторять п.2 до тех пор, пока целая часть частного не станет равной нулю.
4. Записать число в новой системе из остатков от деления, начиная с последнего.

Пример 1.6. Перевести число 27_{10} в двоичную систему. Для обозначения остатков будем использовать цифры числа в свернутой форме $a_4a_3a_2a_1a_0$.

$$
\begin{array}{l}
27 : 2 = 13,\quad 27 - 26,\quad a_0 = 1 \\
13 : 2 = 6,\quad 13 - 12,\quad a_1 = 1 \\
6 : 2 = 3,\quad 6 - 6,\quad a_2 = 0 \\
3 : 2 = 1,\quad 3 - 2,\quad a_3 = 1 \\
a_4 = 1
\end{array}
$$

Ответ: $27_{10} = (a_4a_3a_2a_1a_0)_2 = 11011_2$.

Пример 1.7. Перевести десятичное число 318_{10} в восьмеричную и шестнадцатеричную системы.

$$
\begin{array}{l}
318 : 8 = 39,\quad 318 - 24 = 78,\quad 78 - 72,\quad a_0 = 6 \\
39 : 8,\quad 39 - 32,\quad a_1 = 7 \\
a_2 = 4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
318 : 16 = 19,\quad 318 - 16 = 158,\quad 158 - 144,\quad a_0 = 14 \\
19 : 16,\quad 19 - 16,\quad a_1 = 3 \\
a_2 = 1
\end{array}
$$

Ответ: $318_{10} = (a_2a_1a_0)_8 = 476_8$; $318_{10} = (a_2a_1a_0)_{16} = 13\mathrm{E}_{16}$.

При переводе из двоичной системы счисления в десятичную исходное число необходимо делить на основание новой системы $10_{(10)} = 1010_{(2)}$, выполняя действие в двоичной системе счисления:

$$
\begin{array}{l}
10001011 : 1010 = 1101,\quad 10001011 - 1010 = 1110,\quad 1110 - 1010 = 10011,\quad 10011 - 1010 = 1001 \\
1101 : 1010 = 1,\quad 1101 - 1010 = 11 \\
1 : 1010 = 0,\quad 1 - 0 = 1
\end{array}
$$

Ответ: $a_0 = 1001_{(2)} = 9_{(10)}$; $a_1 = 11_{(2)} = 3_{(10)}$; $a_2 = 1$.
$A = 10001011_{(2)} = 139_{(10)}$.

Перевод дробных чисел из одной системы счисления в другую

Алгоритм перевода правильной дроби с основанием ***p*** в дробь с основанием ***q:***

1) Основание новой системы счисления выразить цифрами исходной системы счисления и все последующие действия производить в исходной системе счисления.
2) Последовательно умножать данное число и получаемые дробные части произведений на основание новой системы до тех пор, пока дробная часть произведения не станет равной нулю или будет достигнута требуемая точность представления числа.
3) Полученные целые части произведений, являющиеся цифрами числа в новой системе счисления, привести в соответствие с алфавитом новой системы счисления.
4) Составить дробную часть числа в новой системе счисления, начиная с целой части первого произведения.

Умножить исходное число $A_{(p)}$ на основание новой системы счисления, записанное в старой – $q_{(p)}$. Целая часть произведения есть старшая цифра искомого числа.
Дробную часть произведения умножить на основание новой системы, записанное в старой – $q_{(p)}$. Целая часть полученного произведения является очередной цифрой искомого числа.
Повторять п.2 до тех пор, пока дробная часть произведения не окажется равной нулю или пока не будет получено достаточное количество значащих цифр нового числа.
Записать новое число из целых частей произведения, начиная с первой.

Пример 1.8. Перевести десятичную дробь 0,1875 в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы.

$$
\begin{array}{r|r}
0 & 1875 \\
 & \times 2 \\
\hline
a_{-1} = 0 & 3750 \\
 & \times 2 \\
\hline
a_{-2} = 0 & 7500 \\
 & \times 2 \\
a_{-3} = 1 & 5000 \\
 & \times 2 \\
\hline
a_{-4} = 1 & 0000 \\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|r}
0 & 1875 \\
 & \times 8 \\
\hline
a_{-1} = 1 & 5000 \\
 & \times 8 \\
\hline
a_{-2} = 4 & 0000 \\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|r}
0 & 1875 \\
 & \times 16 \\
\hline
1 & 1250 \\
+1 & 875 \\
\hline
a_{-1} = 3 & 0000 \\
\end{array}
$$

$(a_{-1}a_{-2}a_{-3}a_{-4})_2$ $\qquad (a_{-1}a_{-2})_8$ $\qquad (a_{-1})_{16}$

Здесь вертикальная черта отделяет целые части чисел от дробных частей.

Ответ: $0{,}1875_{10} = 0{,}0011_2 = 0{,}14_8 = 0{,}3_{16}$.

При переводе из двоичной системы в десятичную умножаем исходное число $0{,}1011_{(2}$ на $10_{(10)} = 1010_{(2)}$:

1 шаг: $0{,}1011 \bullet 1010 = \mathbf{110}{,}1110_{(2)}$; $\quad$ $\boldsymbol{b}_{1} = 110_{(2)} = 6_{(10)}$;

2 шаг: $0{,}111 \bullet 1010 = \mathbf{1000}{,}110_{(2)}$; $\quad$ $\boldsymbol{b}_{-2} = 1000_{(2)} = 8_{(10)}$;

3 шаг: $0{,}\ 11 \bullet 1010 = \mathbf{111}{,}10_{(2)}$; $\quad$ $\boldsymbol{b}_{-3} = 111_{(2)} = 7_{(10)}$;

4 шаг: $0{,}1 \bullet 1010 = \mathbf{101}{,}0_{(2)}$; $\quad$ $\boldsymbol{b}_{-4} = 101_{(2)} = 5(10)$.

Ответ: $0{,}1011(2) = 0{,}6875_{(10)}$.

Перевод произвольных чисел

Перевод произвольных чисел, т.е. чисел, содержащих целую и дробную части, осуществляется в два этапа. Отдельно переводится целая часть, отдельно — дробная. В итоговой записи полученного числа целая часть отделяется от дробной запятой (точкой).

Перевод произвольных чисел

Пример 1.6. Перевести число A=139,6875$_{(10)}$ в двоичную систему счисления.

Решение.

а) При переводе из десятичной системы в двоичную последовательно делим исходное число на основание 2:

Запишем число в новой системе из остатков от деления, начиная с последнего.

139	69	34	17	8	4	2	1	0	Частное
	1	1	0	1	0	0	0	1	Остаток

Ответ:. 139$_{(10)}$=10001011$_{(2)}$.

б) При переводе из десятичной системы в двоичную умножаем исходную дробь на 2

Целая часть	**Дробная часть**
0,	6875
1	**3750**
0	**7500**
1	**5000**
1	**0000**

Ответ: 139,6875$_{(10)}$ = 10001011,1011$_{(2)}$.

Перевод чисел из системы счисления с основанием 2 в систему счисления с основанием 2^n и обратно (Перевод в кратных системах счисления)

Системы счисления называются **кратными,** если их основание связаны соотношением вида:

$$q = p^k,$$

где k – целое число.

Примерами кратных систем являются двоичная, восьмеричная и шестнадцатеричная системы:

$2^3 = 8$; $2^4 = 16$.

Перевод чисел из системы счисления с основанием 2 в систему счисления с основанием 2^n и обратно (кратных системах счисления)

Перевод целых чисел

1) Двоичное число разбить справа налево на группы по n цифр в каждой.
2) Если в последней левой группе окажется меньше n разрядов, то ее надо дополнить слева нулями до нужного числа разрядов.
3) Рассмотреть каждую группу как n-разрядное двоичное число и записать ее соответствующей цифрой в системе счисления с основанием q= 2^n.

Перевод чисел в кратных системах счисления

Перевод дробных чисел:

1) Двоичное число разбить слева направо на группы по n цифр в каждой.
2) Если в последней правой группе окажется меньше n разрядов, то ее надо дополнить справа нулями до нужного числа разрядов.
3) Рассмотреть каждую группу как n-разрядное двоичное число и записать ее соответствующей цифрой в системе счисления с основанием $q=2^n$.

Перевод чисел в кратных системах счисления

Рассмотрим перевод числа из системы счисления с основанием p в систему счисления с основанием q, причем $p > q$ Для перевода необходимо каждую p-ичную цифру заменить k -.разрядным q-ичным числом. Например, при переводе восьмеричного числа $437{,}5_{(8)}$ в двоичную систему счисления достаточно каждую цифру восьмеричного числа записать в виде двоичной триады, т. к. $8 = 2^3$:

$$437{,}5_{(8)} = 100\ \ 011\ \ 111\ ,\ 101_{(2)}.$$

Перевод чисел в кратных системах счисления

При переводе шестнадцатеричного числа $F01,A_{(16)}$ в двоичную систему счисления нужно каждую шестнадцатеричную цифру записать двоичной тетрадой, так как $16=2^4$:

$$F01,A_{(16)} = 1111\ 0000\ 0001,1010_{(2)}.$$

В случае, когда основание исходной системы меньше основания новой системы ($p < q$), для перевода исходное число вправо и влево от запятой разбивается на группы по k разрядов в каждой, неполные группы (справа и слева) дополняются нулями. Затем каждая k-разрядная группа заменяется одной цифрой в новой системе счисления.

Перевод чисел из систем счисления с основанием $q=2^n$ в двоичную систему.

каждую цифру этого числа заменить ее n-значным эквивалентом в двоичной системе счисления.

Пример 1.10. Двоичное число 1011111100000011_2 перевести в восьмеричную систему счисления:

$$1011111100000011_2 =$$
$$= \underbrace{010}_{2}\underbrace{111}_{7}\underbrace{111}_{7}\underbrace{100}_{4}\underbrace{000}_{0}\underbrace{011}_{3} = 277403_8,$$

и шестнадцатеричную систему счисления:

$$1011111100000011_2 =$$
$$= \underbrace{0001}_{1}\underbrace{0111}_{7}\underbrace{1111}_{F}\underbrace{0000}_{0}\underbrace{0011}_{3} = 17F03_{16}.$$

В первом случае группа содержит $n = 3$ цифр и называ-

Перевод чисел в десятичную систему счисления по схеме Горнера

$$a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_{0(p)} =$$
$$= (\ldots((a_n \bullet p + a_{n-1}) \bullet p + a_{n-2}) \bullet p + \ldots) \bullet p + a_1) \bullet p + a_0$$

$231745_8 =$
$2 \cdot 8^5 + 3 \cdot 8^4 + 1 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 + 5 = ((((2 \cdot 8 + 3) \cdot 8 + 1)$
$\cdot 8 + 7) \cdot 8 + 4) \cdot 8 + 5 = 78821$