Лекция

Двойные интегралы

Приложения двойных интегралов.

Площадь плоской фигуры.

$$S(D)=\iint\limits_D 1\cdot dxdy=\iint\limits_D dxdy\,.$$

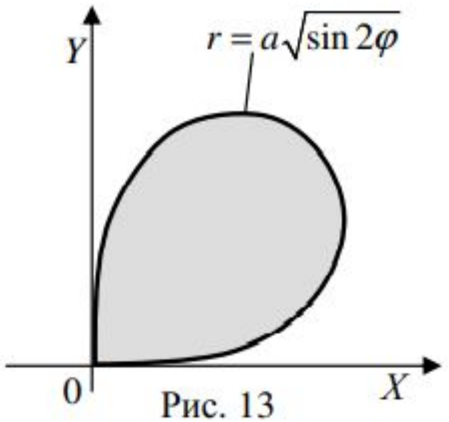


Рис. 13

Пример 4. Найти площадь фигуры, ограниченной одной петлей кривой $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ ($x,\ y\geq 0$, $a=const>0$).

Объем тела в пространстве.

Если тело T проецируется на плоскость XOY в фигуру D и задано неравенствами

$z_{\text{нижн}}(x, y) \le z \le z_{\text{верхн}}(x, y)$, $M(x; y) \in D$,

(см. Рис. 12), то объём тела T вычисляется по формуле:

$$V(T) = \iint\limits_D \left(z_{\text{верхн}}(x, y) - z_{\text{нижн}}(x, y) \right) dxdy .$$

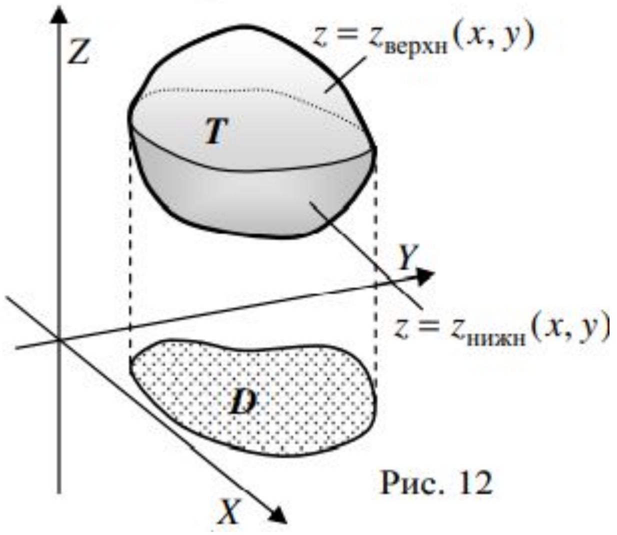


Рис. 12

Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=\sqrt{x^2+y^2}$ (1) и $x^2+y^2-2z^2=-4$ (2).

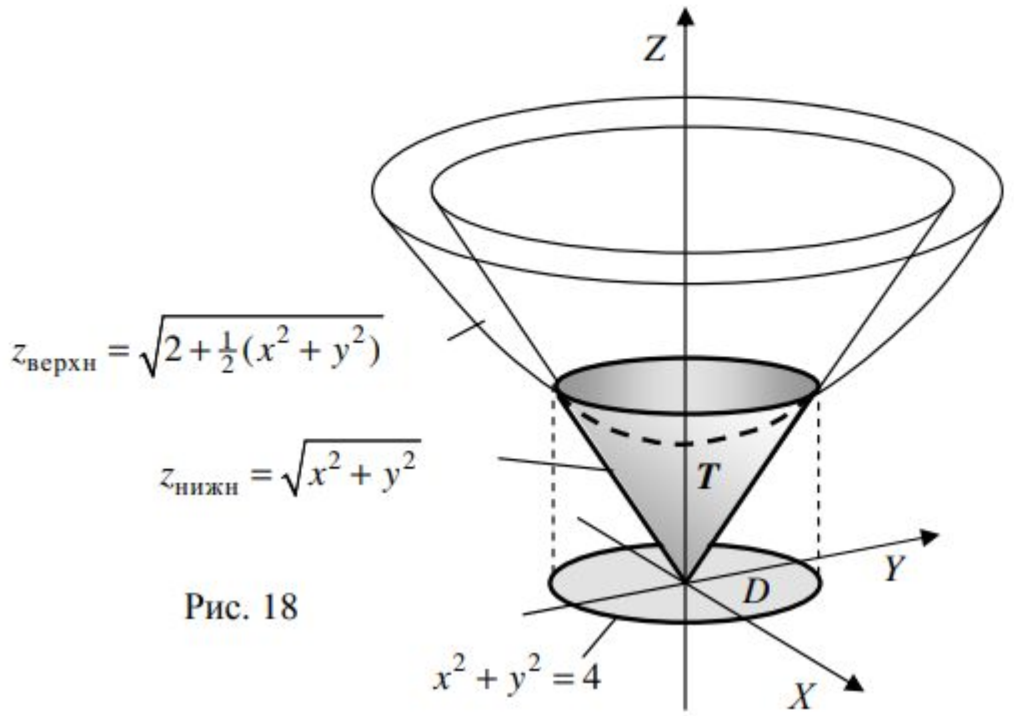


Рис. 18

Площадь поверхности в пространстве. Если поверхность σ задана уравнением $z = f(x, y)$, где $M(x; y) \in D$ (см. Рис. 11), то площадь поверхности σ вычисляется по формуле:

$$S(\sigma) = \iint\limits_D \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2}\, dxdy\,.$$

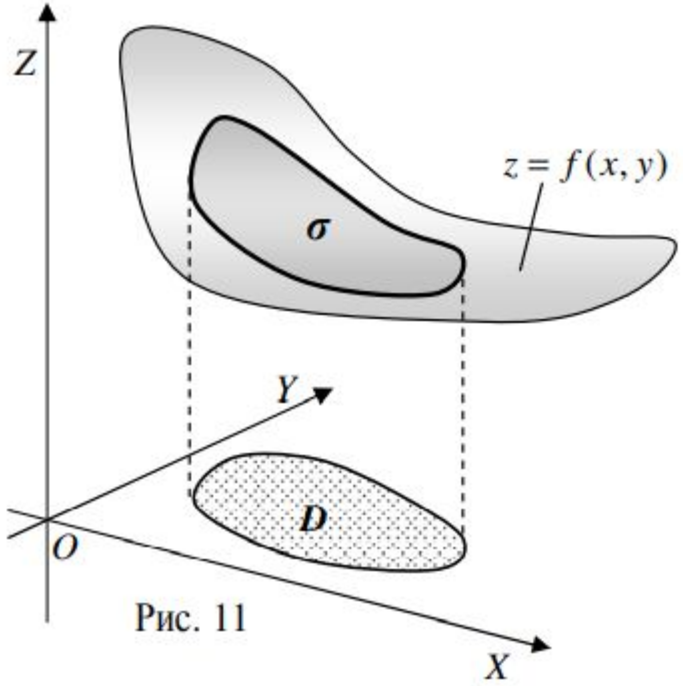


Рис. 11

Найти площадь поверхности кругового цилиндра $x^2 + z^2 = a^2$, вырезаемой параболическим цилиндром $y^2 = a^2 - ax$,

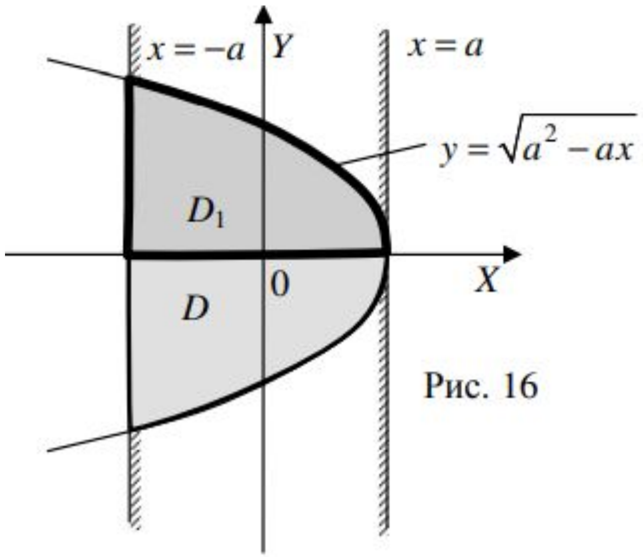
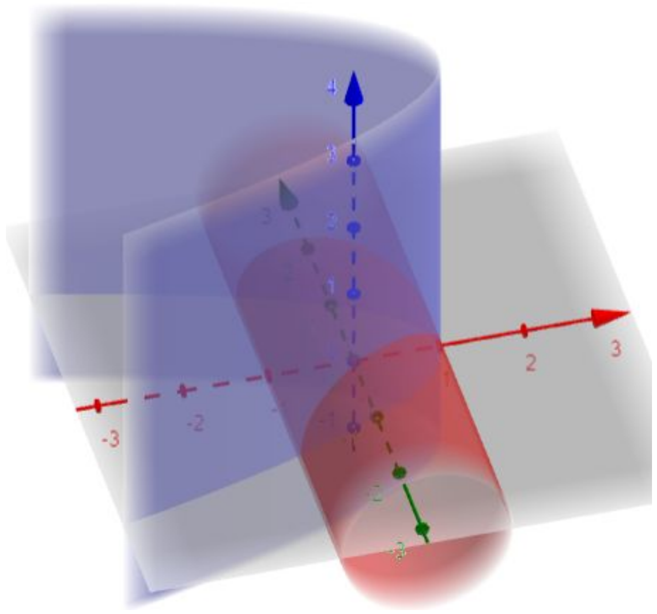


Рис. 16



Масса плоской материальной пластинки.

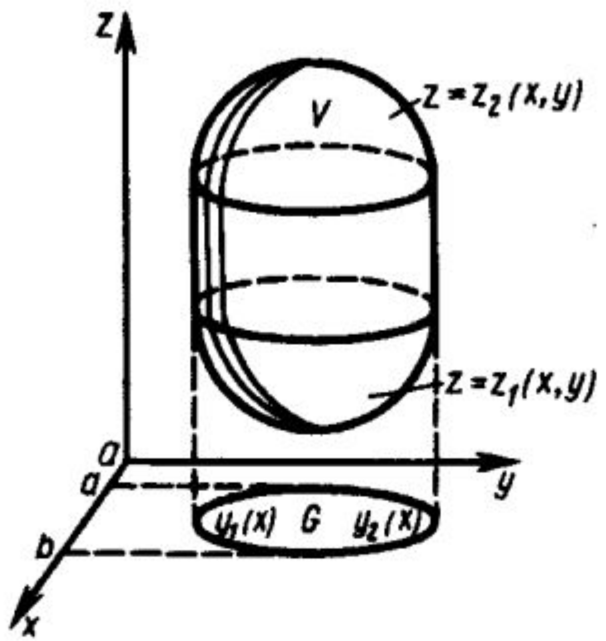
Если плоская материальная пластинка D расположена в плоскости XOY и имеет переменную плотность $\mu(x, y)$, то масса пластинки D вычисляется по формуле

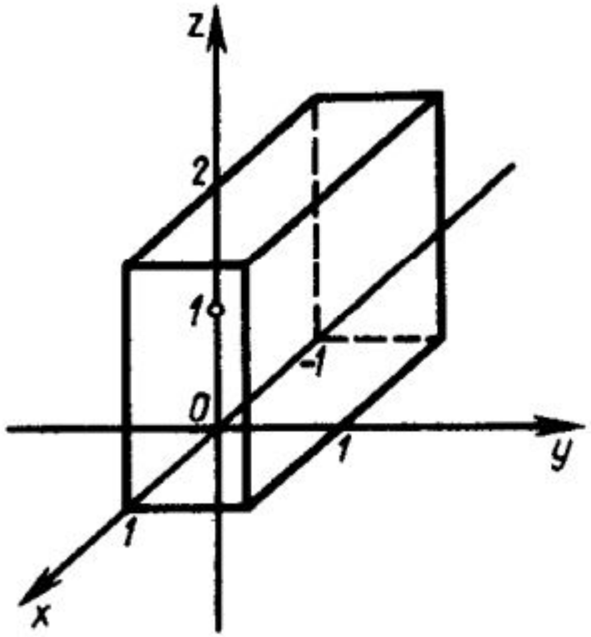
$$m(D) = \iint_D \mu(x, y)dxdy .$$

Координаты <u>центра масс</u>([14]) плоской материальной пластинки. Координаты центра масс $C(x_0; y_0)$ плоской материальной пластинки D, имеющей переменную плотность $\mu(x, y)$, находятся по формулам:

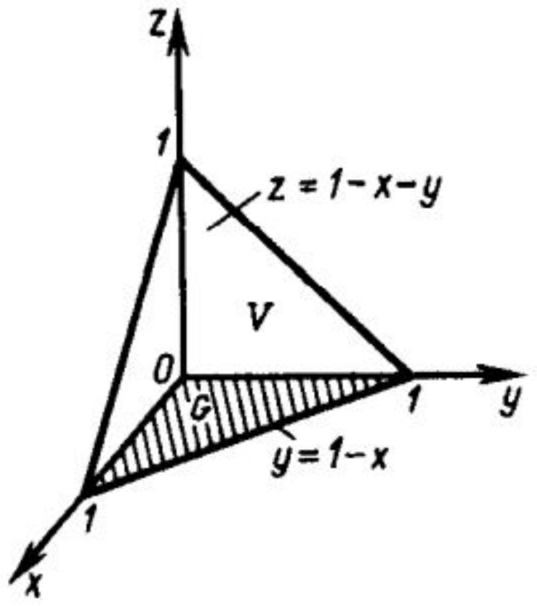
$$x_0 = \frac{M_x}{m(D)}, \ \ y_0 = \frac{M_y}{m(D)}, \text{ где}$$

$$M_x = \iint_D x \cdot \mu(x, y)\, dxdy, \quad M_y = \iint_D y \cdot \mu(x, y)\, dxdy, \ \ m(D) = \iint_D \mu(x, y)dxdy ;$$


z
V
z = z_2(x, y)
z = z_1(x, y)
0
a
b
y
x
y_1(x)
G
y_2(x)


z
2
1
-1
0
1
y
1
x

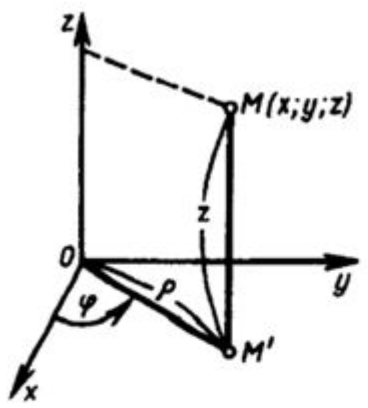
Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$, где V — пирамида, ограниченная плоскостью $x+y+z=1$ и координатными плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$ (рис. 196).

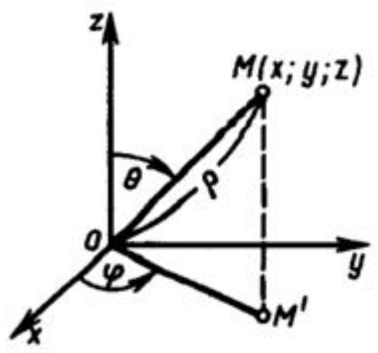


Замену переменных в тройном интеграле производят по следующему правнлу.

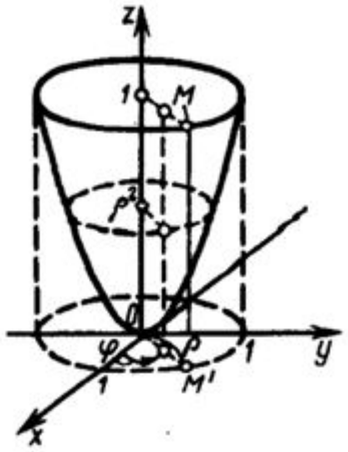
Если ограниченная замкнутая область V пространства (x, y, z) взаимно однозначно отображается на область V^* пространства (u, v, w) с помощью непрерывно дифференцируемых функций $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ и якобиан J в области V^* не обращается в нуль:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \partial z & \partial z & \partial z \end{vmatrix} \neq 0,$$


z
M(x;y;z)
z
0
y
ρ
φ
M'
x


z
M(x; y; z)
θ
ρ
0
y
φ
M'
x

Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$ переходом к цилиндрическим координатам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=z$, где V — область, ограниченная поверхностями $z=x^2+y^2$ и $z=1$



Вычислнть ннтеграл $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, где V — шар $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$