Алгебраические действия над комплексными числами

"Комплексное число – это тонкое и поразительное средство божественного духа, почти амфибия между бытием и небытием".

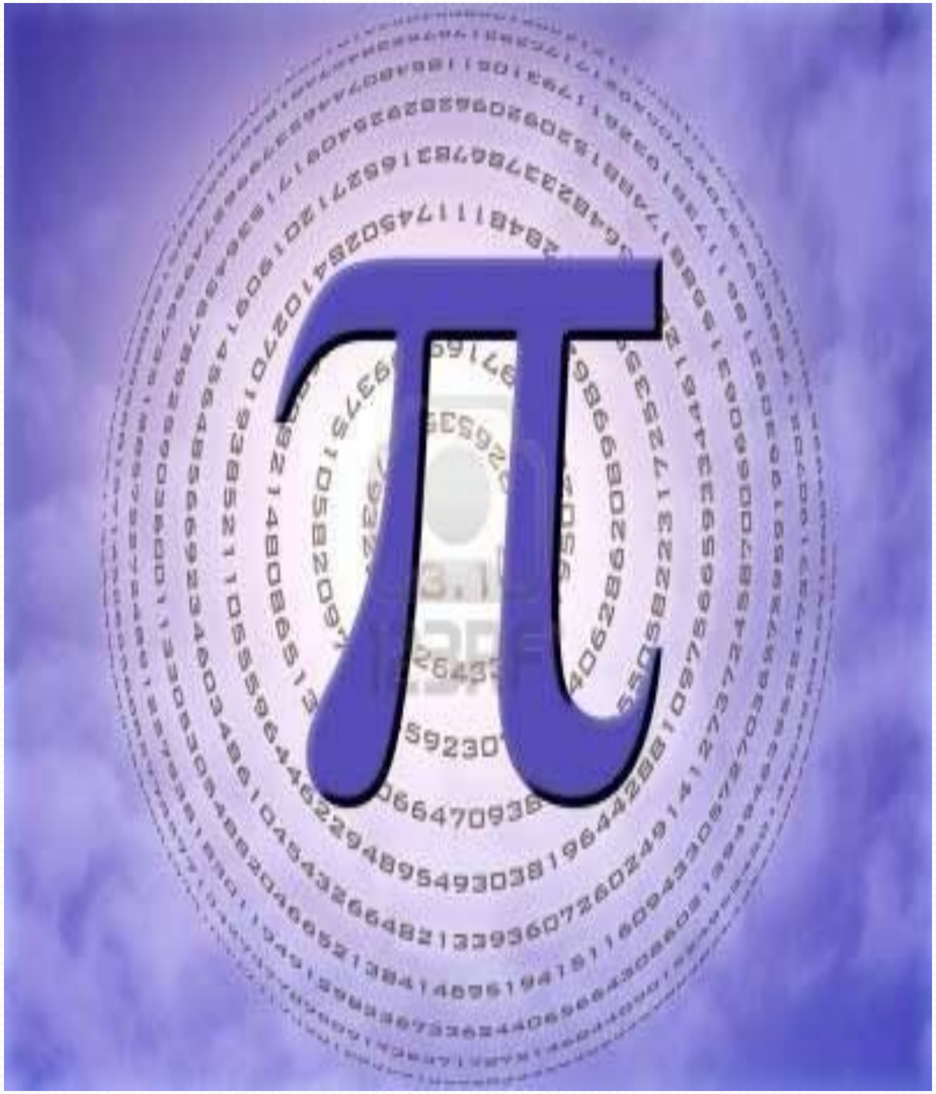
Г. Лейбниц

- Лейбниц Готфрид Вильгельм (1.7.1646 – 14.11.1716) – немецкий математик, физик и философ.

Многовековая история развития представления человека о числах –
одна и самых ярких сторон развития человеческой культуры.

Дроби появились очень рано – уже у *египтян и вавилонян* – в связи с переходом к более мелким единицам измерения. Их связь с делением натуральных чисел понималась более смутно и вторично.

Греки осознавали числа через процесс геометрического измерения: именно так они себе уяснили существование **иррациональных чисел**.



Отрицательные числа появились в 5-6 веках в индийской и арабской математике. **Отрицательные числа** **рассматривали как «воображаемые» , ненастоящие числа.**

История возникновения комплексных чисел

Первое упоминание в истории комплексных чисел , можно отнести к 50 веку до нашей эры.

Тогда студент <u>**Герон**</u> из Александрии, пытаясь вычислить объём пирамиды, столкнулся с тем, что должен был вычислить квадратный корень из разности

81-144.

История возникновения комплексных чисел

«Звездный час» комплексных чисел настал в **1545 году** , когда итальянский математик **<u>Джироламо Кордано</u>** предложил создать новый вид чисел

Girolamo Cardano
(1501-1576)

История возникновения комплексных чисел

в 1572 году

итальянский учёный ***Бомбелли*** *выпустил книгу, в которой были установлены первые правила арифметических операций над комплексными числами, вплоть до извлечения из них кубических корней.*

История возникновения комплексных чисел

Термин **«комплексные числа»** был введен **Гауссом в 1831 году**.

Комплексные числа

Определение 1. Числа вида $a + bi$,

где a и b – действительные числа,

i – мнимая единица,

называются *комплексными*.

a - *действительная часть* комплексного числа,

bi – *мнимая часть* комплексного числа,

b – *коэффициентом при мнимой части.*

Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Сложение, вычитание, умножение комплексных чисел в алгебраической форме производят по правилам соответствующих действий над многочленами.

Сложение

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

Вычитание

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

Умножение

$$(a+bi)(c+di)=$$

$$=ac+adi+bci+bdi^2=$$

$$=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Сложение, вычитание, умножение комплексных чисел в алгебраической форме производят по правилам соответствующих действий над многочленами.

Пример. Даны комплексные числа $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 5 - 7i$. Найти:

а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$; в) $z_1 z_2$.

Решение.

а) $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (5 - 7i) = 2 + 3i + 5 - 7i = (2 + 5) + (3i - 7i) = 7 - 4i$;

б) $z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (5 - 7i) = 2 + 3i - 5 + 7i = (2 - 5) + (3i + 7i) = -3 + 10i$;

в) $z_1 z_2 = (2 + 3i)(5 - 7i) = 10 - 14i + 15i - 21i^2 = 10 - 14i + 15i + 21 = (10 + 21) + (-14i + 15i) = 31 + i$

(здесь учтено, что $i^2 = -1$).

При выполнении умножения можно использовать формулу:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$

Пример. Выполнить действия:

а) $(2 + 3i)^2$; б) $(3 - 5i)^2$.

Решение.

а) $(2 + 3i)^2 = 4 + 2 \cdot 2 \cdot 3i + 9i^2 = 4 + 12i - 9 =$

$= -5 + 12i$;

б) $(3 - 5i)^2 = 9 - 2 \cdot 3 \cdot 5i + 25i^2 = 9 - 30i - 25 =$

$= -16 - 30i$;

так как $i^2 = -1$.

Рассмотрим применение формулы:

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ (*)

Пример. Выполнить действия:

a) $(5 + 3i)(5 – 3i)$;

b) $(1 + i)(1 – i)$.

Решение.

a) $(5 + 3i)(5 – 3i)=5^2 – (3i)^2 = 25 – 9i^2 = 25+9=34$;

b) $(1 + i)(1 – i)=1^2 – i^2 =1 + 1=2$.

Два комплексных числа называются сопряженными, если они отличаются друг от друга только знаками перед мнимой частью.

Чтобы выполнить деление, произведем дополнительное действие: умножим делимое и делитель на комплексное число, сопряженное делителю.

Пример. Выполнить деление: $\frac{2+3i}{5-7i}$

Решение. Произведем умножение для делимого и делителя в отдельности:

$(2 + 3i)(5 + 7i) = 10 + 14i + 15i + 21i^2 = -11 + 29i$;
$(5 - 7i)(5 + 7i) = 25 - 49i^2 = 25 + 49 = 74$.

Итак,

$$\frac{2+3i}{5-7i} = \frac{-11+29i}{74}$$

Домашнее задание

Выполнить алгебраические действия над комплексными числами:

1) $(3+5i) + (7 - 3i)$

2) $(5 - 4i) - (8 + 2i)$

3) $(6 + 8i)(2 - 3i)$

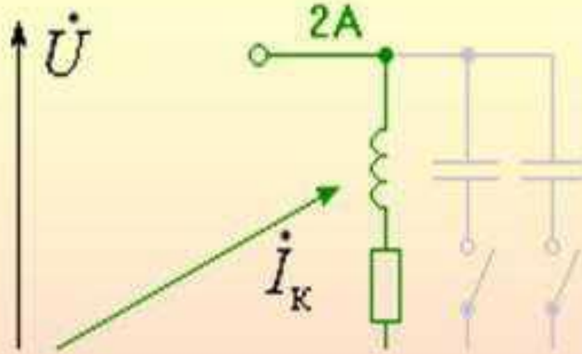
4) $(2 - 3i)^2$

5) $\dfrac{5 + 9i}{3 - 4i}$

«Мы приходим к выводу, что не существует никаких абсурдных , иррациональных, неправильных, необъяснимых или глухих чисел, но что среди чисел существует такое совершенство и согласие, что нам надо размышлять дни и ночи над их удивительной законченностью».

Симон Стевин

Симон Стевин (1548-1620) – нидерландский математик и инженер. Преподавал в Лейденском университете, служил инженером в армии принца Оранского. Как инженер Стевин сделал значительный вклад в механику. Важнейшие из его работ в области математики: «Десятина» (1585 г.) и «Математические комментарии», в 5-ти томах (1605-1608 гг.)



Комплексные
числа имеют
прикладное значение
во многих областях
науки, являются
основным аппаратом
для расчетов
в электротехнике и
связи.