- Лекция 13. Аналитическая механика. Обобщенные координаты. Уравнения связей. Возможные перемещения. Идеальные связи. Принцип возможных перемещений. Примеры использования принципа возможных перемещений при определении реакций связей.

Рекомендуемая литература

1. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч.2. М.: Высшая школа. 1977 г. 368 с.
2. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука. 1986 г. 416 с.
3. Сборник заданий для курсовых работ /Под ред. А.А. Яблонского. М.:Высшая школа. 1985 г. 366 с.

.

Лекция 13

- **Аналитическая механика** – устанавливает общие, единые методы изучения движения и равновесия любых самых сложных материальных систем средствами математического анализа. Для этого вводятся новые понятия и обобщаются старые.
- **Связи** – рассматриваются теперь как некоторые условия, налагаемые на систему, которые должны удовлетворяться в процессе движения системы. Они содержат соотношения (уравнения или неравенства) между координатами, компонентами скоростей и ускорений и, возможно, времени.

Классификация связей: *По интегрируемости:*

Голономные (геометрические) – выражаются конечными уравнениями относительно координат или интегрируемыми дифференциальными уравнениями относительно координат:

$$\varphi(x_k, y_k, z_k, t) = 0$$

Неголономные (кинематические) - выражаются неинтегрируемыми дифференциальными уравнениями относительно координат,

т.е. уравнениями, содержащими не только координаты точек системы, но и их производные по времени:

$$\varphi(x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k, t) = 0$$

Неинтегрируемость состоит в том, что их нельзя привести к виду уравнений голономной связи.

По зависимости от времени:

Склерономные (стационарные) – не зависящие от времени:

$$\varphi(x_k, y_k, z_k) = 0$$

Например, уравнение траектории, полученное для некоторой точки шатуна кривошипно-шатунного механизма:

рассматривается как уравнение склерономной голономной связи:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Если на систему N точек в пространстве наложено m голономных связей, то декартовые координаты всегда могут быть выражены конечными соотношениями:

$$
\boxed{\begin{aligned}
&x_1 = x_1(q_1, q_2, \dots, q_n, t);\\
&x_2 = x_2(q_1, q_2, \dots, q_n, t);\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;\\
&x_N = x_N(q_1, q_2, \dots, q_n, t).\\
&\text{Также по } y_i \text{ и } z_i, \text{ где } i = \overline{1,\ n}
\end{aligned}}
$$

Число обобщенных координат равно $n = 3N - m$.

Реономные (нестационарные) –
возбуждение колебаний.

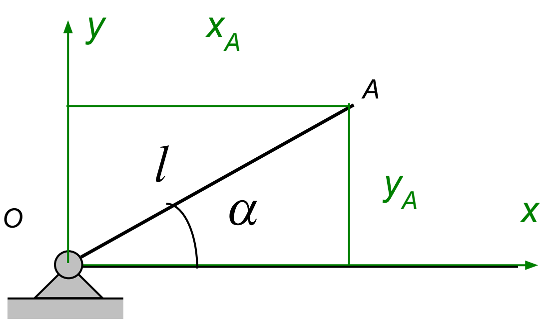
По освобождаемости:

Неосвобождающие (удерживаю
исключающим возможность покид
или поверхности, описываемой у
виде шарнирного стержня.

- **Обобщенные координаты** – независимые параметры, однозначно определяющее положение механической системы при ее движении. Обобщенность состоит в том, что они могут иметь различную природу (линейные или угловые перемещения относительно некоторого начального положения или какие-либо другие величины). Общее обозначение – q_i ($i = 1,\dots,n$).
- **Число степеней свободы** – число независимых обобщенных координат, через которые можно выразить декартовые координаты всех точек системы. Например:

Здесь положение любой точки стержня (например, A) однозначно определяется значением всего *одной* величины – угла α, который является *обобщенной* координатой (q = α). Число степеней свободы равно n = 1.

Уравнение связи для рассматриваемой точки A: $\boxed{x^2 + y^2 = l^2}$

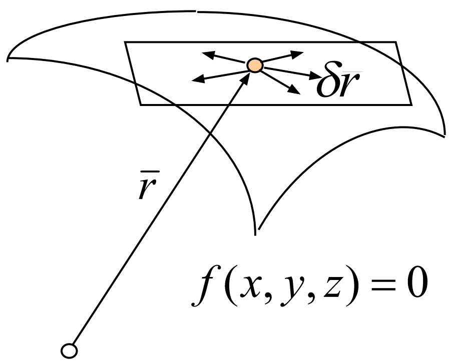


$$
\boxed{\begin{aligned}
x_A &= l\cos\alpha;\\
y_A &= l\sin\alpha
\end{aligned}}
$$

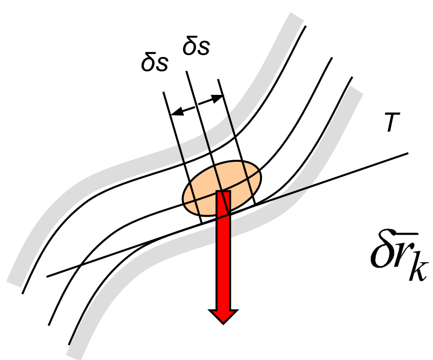
Лекция 13 (продолжение – 13.2)

- **Возможные перемещения – бесконечно малые перемещения, допускаемые наложенными на систему связями (при фиксированном времени).**

С точностью до бесконечно малых **приращения радиуса-вектора** лежат в касательной плоскости к поверхности связи и представляют собой **возможные перемещения**. В случае нестационарной голономной связи $f(x,y,z,t) = 0$ возможные перемещения δr рассматриваются для положения и формы поверхности связи, соответствующих данному моменту времени. **Возможные перемещения не зависят от приложенных к системе сил.**



- **Действительные перемещения – бесконечно малые (элементарные) перемещения dr, действительно (фактически) происходящие за время *dt*, допускаемые наложенными на систему связями**. Действительные перемещения зависят от сил, приложенных к системе, от вида связей (стационарных, нестационарных, голономных, неголономных) и начальных условий. Таким образом, возможные перемещения являются более общим понятием, чем действительные перемещения.



Поскольку вектор положения точки системы можно выразить через обобщенные координаты ,
то возможные перемещения выражаются через приращения обобщенных координат как полный дифференциал:

$$\delta\bar{r}_k = \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_n}\delta q_n \quad \text{или} \quad \boxed{\delta\bar{r}_k = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i.}$$

$$k = 1,\ldots,N$$

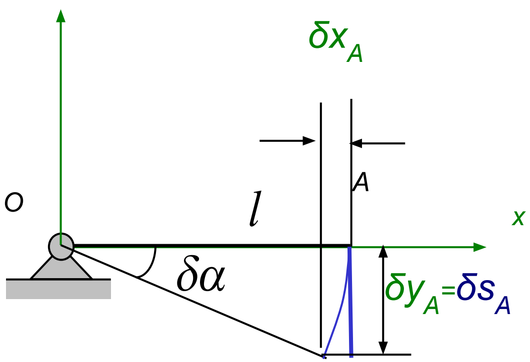
- **Вычисление возможных перемещений:**

Геометрический способ - в силу малости возможных перемещений при повороте твердого тела любая его точка может рассматриваться движущейся не по дуге, а по перпендикуляру к радиусу вращения в сторону угла поворота:

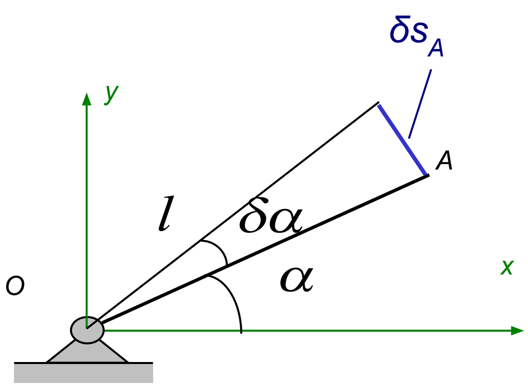
$$\delta x_A = l - l\cos\delta\alpha;$$
$$\delta y_A = l\sin\delta\alpha.$$

Для малых углов cosα ≈ 1, sinα ≈ α, тогда:

$$\boxed{\begin{aligned}\delta x_A &\approx 0;\\ \delta y_A &\approx \delta s_A = l\delta\alpha.\end{aligned}}$$



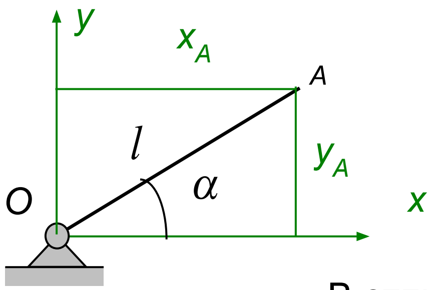
Например, для наклонного стержня:



$$\boxed{\delta s_A = l\delta\alpha.}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\delta x_A &= \delta s_A \sin\alpha = l\sin\alpha\,\delta\alpha;\\ \delta y_A &\approx \delta s_A \cos\alpha = l\cos\alpha\,\delta\alpha.\end{aligned}}$$

Аналитический способ – вычисляется вариация от координат:



$$x_A = l\cos\alpha;$$
$$y_A = l\sin\alpha$$

$$\delta x_A = \frac{\partial}{\partial\alpha}(l\cos\alpha)\delta\alpha = -l\sin\alpha\delta\alpha;$$
$$\delta y_A = \frac{\partial}{\partial\alpha}(l\sin\alpha)\delta\alpha = l\cos\alpha\delta\alpha.$$

В отличие от геометрического способа знаки возможного приращения координат получаются автоматически. При использовании геометрического способа в дальнейших вычислениях, например, работы, необходимо учитывать направление полученного приращения (перемещения).

- **Возможная работа силы** – **элементарная работа силы на том или ином возможном перемещении:** $\boxed{\delta A = \bar{F}\delta\bar{r}.}$

В координатном виде: $\boxed{\delta A = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z.}$

В естественном виде: $\boxed{\delta A = F\delta s\cos(\bar{F},\delta\bar{r}).}$

Лекция 13 (продолжение – 13.3)

- **Идеальные связи – связи, при которых сумма элементарных работ сил реакций связи на любом возможном перемещении равна нулю:**

$$\delta A^R = \sum_{k=1}^{n} \overline{R}_k \delta \overline{r}_k = 0.$$

Примеры идеальных связей: абсолютно гладкая поверхность (при скольжении), абсолютно твердая поверхность (при качении без скольжения). **Любую неидеальную связь можно рассматривать как идеальную, если соответствующие реакции связи (совершающие работу на возможных перемещения) причислить к задаваемым (активным) силам.**

- **Принцип возможных перемещений – Для равновесия материальной системы, подчиненной голономным, стационарным, двухсторонним и идеальным связям необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил на любом возможном перемещении из предполагаемого положения равновесия равнялось нулю:**

$$\delta A^F = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \delta \overline{r}_k = 0.$$

Доказательство необходимости: Система находится в равновесии и для каждой точки удовлетворяется уравнение равновесия:

Умножим скалярно на вектор возможного перемещения точки и сложим:

$$\sum \overline{F}_k \delta \overline{r}_k + \underbrace{\boxed{\sum \overline{R}_k \delta \overline{r}_k}}_{=0} = 0. \Rightarrow \delta A^F = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \delta \overline{r}_k = 0.$$

Доказательство достаточности: Дано: $\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \delta\overline{r}_k = 0.$
Предположим, что равновесия нет.

Тогда каждая из точек под действием активных сил придет в движение, переместится за время *dt* на малое действительное перемещение *d**r***. Рассматривая эти перемещения, как возможные, вычислим работу и просуммируем:

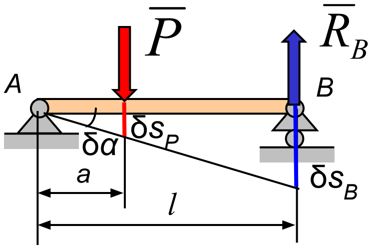
$$(\overline{F}_k + \overline{R}_k)d\overline{r}_k = (\overline{F}_k + \overline{R}_k)\delta\overline{r}_k > 0. \Rightarrow \sum(\overline{F}_k + \overline{R}_k)\delta\overline{r}_k = \sum \overline{F}_k\delta\overline{r}_k + \underbrace{\boxed{\sum \overline{R}_k\delta\overline{r}_k}}_{=0} > 0.$$

Получили противоречие с исходным равенством.
Значит предположение об отсутствии равновесия
неверно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР С ПОМОЩЬЮ ПРИНЦИПА ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ.

- **Примеры использования принципа возможных перемещений для определения реакций связей:**

Пример 1. Определить реакцию балки в правой опоре:



Балка неподвижна и не имеет ни возможных, ни действительных перемещений. Отбросим связь, реакция которой отыскивается, и заменим ее реакцией:

Без правой опоры балка может поворачиваться под действием активных сил, реакцию $\boldsymbol{R}_B$ причисляем к активным силам. Зададим малое возможное перемещение:

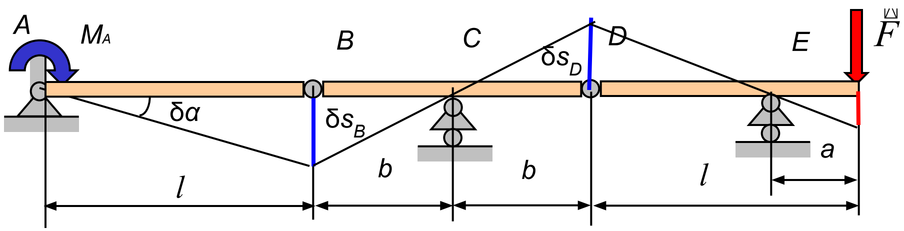
Вычислим возможные перемещения: $\delta s_P = a\delta\alpha; \delta s_B = l\delta\alpha.$

Запишем сумму работ:

$$\delta A^{P+R} = P\delta s_P - R_B\delta s_B = 0. \Rightarrow Pa\delta\alpha - R_B l\delta\alpha = 0. \Rightarrow \boxed{R_B = \frac{Pa\delta\alpha}{l\delta\alpha} = \frac{Pa}{l}.}$$

Пример 2. Определить опорный момент многопролетной составной балке в левой опоре:

Отбросим в жесткой заделке связь, препятствующую повороту балки, и заменим ее парой сил M_A:



Вычислим возможные перемещения:

$$\delta s_B = l\delta\alpha;$$

$$\delta s_D = \delta s_B = l\delta\alpha;$$

$$\delta s_F = \frac{a}{l-a}\delta s_D = \frac{a}{l-a} l\delta\alpha.$$

Запишем сумму работ:

$$\delta A = M_A \delta\alpha + F\delta s_F = 0.$$

$$M_A \delta\alpha + F\frac{a}{l-a} l\delta\alpha = 0.$$

$$\boxed{M_A = -F\frac{a}{l-a} l.}$$

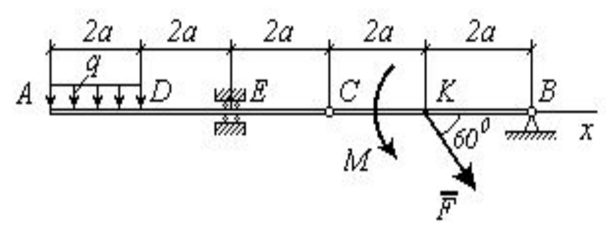
Заметим, что

1. для нахождения опорного момента M_A из уравнений статики потребовалось бы решить как минимум три уравнения равновесия;
2. эпюра возможных перемещений пропорциональна линии влияния усилия;
3. если задать возможное перемещение для искомой реакции равным 1, например, $\delta\alpha$ =1, то эпюра перемещений будет полностью тождественна линии влияния поскольку

$$\delta A = M_A \cdot 1 + 1 \cdot \delta s_F(z) = 0; \quad M_A = -\delta s_F(z).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР С ПОМОЩЬЮ ПРИНЦИПА ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

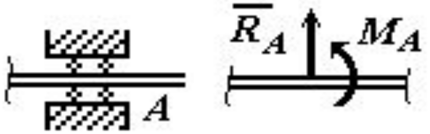
Пример 4. На составную балку *AB* действует распределенная нагрузка интенсивности $q = 2$ кН/м, наклонная сила $F = 4$ кН и пара сил с моментом $M = 5$ кН м. а = 2 м.



Наложены связи: в точке *B* – неподвижная шарнирная опора, в точке *E* – горизонтальная скользящая заделка.

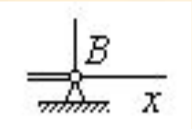
О п р е д е л и т ь: X_B, $У_B$, $У_E$, M_E.

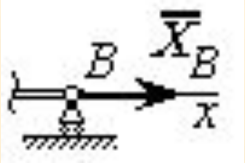
Примечание. Скользящая заделка - это заделка, которая «запрещает» поворот, но не ограничивает поступательное перемещение вдоль направляющих, по которым заделка может скользить. Реакции скользящей заделки: $\vec{R}_A$ – реакция, перпендикулярная направляющим, и реактивный момент – M_A.



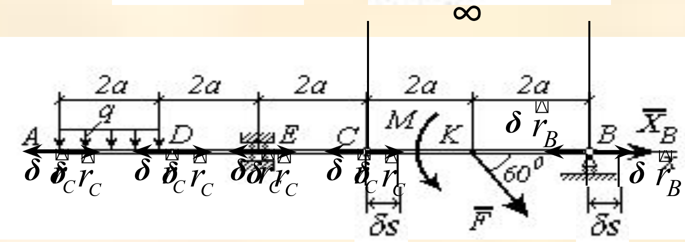
А) Определим горизонтальную реакцию в шарнире В

1. Заменим неподвижный шарнир *В* подвижным шарниром и реакцией $\vec{X}_B$.





2. Сообщим балке *АВ* возможное перемещение.



Часть балки *АС* может поступательно перемещаться влево или вправо по горизонтали на $\delta \vec{r}_C$. Обозначим $|\delta \vec{r}_C| = \delta s$.

Шарнир *В* может перемещаться влево или вправо на $\delta \vec{r}_B$.

Перемещения $\delta \vec{r}_C$ и $\delta \vec{r}_B$ направлены по соответствующим возможным скоростям $\delta \vec{V}_C$ и $\delta \vec{V}_B$. М.ц.с. для *ВС* лежит в ∞.

Т.е. $\delta \vec{V}_C = \delta \vec{V}_B = \delta \vec{V}$ и $\delta \vec{r}_C = \delta \vec{r}_B = \delta \vec{r}$. Или $|\delta \vec{r}_C| = |\delta \vec{r}_B| = |\delta \vec{r}| = \delta s$. Возможное перемещение балки будет поступательным на δ*s*.

3. Сумма возможных работ всех сил и пар сил, действующих на балку, по принципу Лагранжа должна быть равна нулю.

$$\Sigma \delta A_k = X_B\, \delta s + F \cos(60^0)\, \delta s = 0,$$

Поделим уравнение (1) на $\delta s \neq 0$ и получим

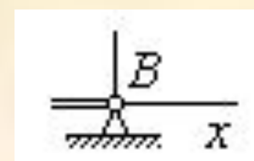
$$X_B + F\cos(60^0) = 0.$$

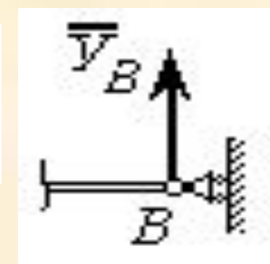
Откуда находим $X_B = -F\cos(60^0) = -F/2 = -2$ (кН).

Знак минус указывает на то, что реакция направлена влево.

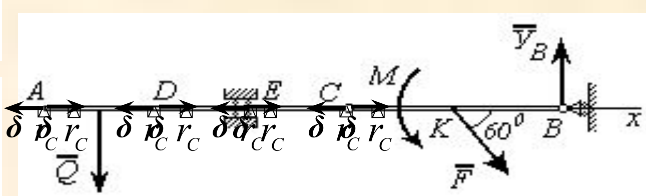
В) Определим* вертикальную *реакцию в шарнире В.

1. Заменим неподвижный шарнир *В* подвижным шарниром и реакцией $\overline{Y}_B$.



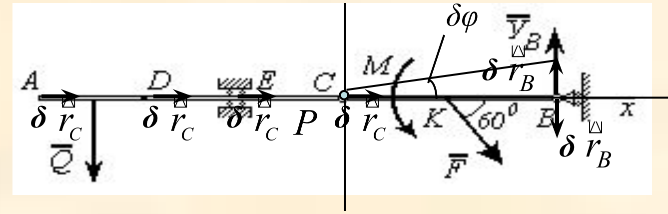


2. Сообщим балке *АВ* возможное перемещение.



Часть балки *АС* может перемещаться только поступательно влево или вправо, так как в точке *Е* скользящая заделка.

Шарнир *B* может перемещаться только вертикально на $\delta \vec{r}_B$, $(|\delta \vec{r}_B| = \delta s_B)$.



М. ц. с. для части балки *CB* будет в точке *C*.

Следовательно, $|\delta \vec{r}_C| = \delta s = 0$, т.е., связи, наложенные на балку, у ее части *AC* не допускают возможных перемещений.

Часть балки *BC* может поворачиваться вокруг м. ц. с. (т. *C*) на угол $\delta\varphi$.

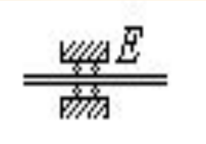
3. Сумма возможных работ всех сил и пар сил, действующих на балку, по принципу Лагранжа должна быть равна нулю.

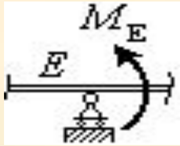
Примечание. Применим выражение для работы силы, приложенной к вращающемуся телу: $\delta A = \pm M_{0Z}(F) \cdot \delta\varphi$.

Откуда находим $Y_B = F \cos(30^0) / 2 - M / (4a) = 1{,}12$ (кН).

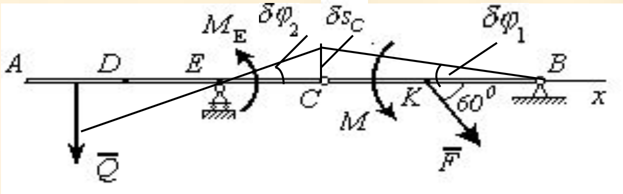
C) Найдем момент пары сил, возникающей в скользящей заделки, наложенной в точке E.

1. Заменим скользящую заделку шарнирно подвижной опорой и неизвестным реактивным моментом M_E.





2. Сообщим балке *AB* возможное перемещение.



Связи допускают только поворот части балки *BC* вокруг шарнира *B* на угловое перемещение $\delta\varphi_1$.

М.ц.с. для части балки *AC* будет в точке *E*.
Обозначим угол поворота *AC* вокруг м. ц. с. через $\delta\varphi_2$.

3. Составим уравнение возможных работ (1).

$$\Sigma\delta A_k = -M\,\delta\varphi_1 - F\cos(30^0)\,2a\,\delta\varphi_1 + M_E\,\delta\varphi_2 + Q\,3a\,\delta\varphi_2 = 0. \quad (3)$$

Выразим $\delta\varphi_2$ через $\delta\varphi_1$.

$\delta s_c = 4a\,\delta\varphi_1 = 2a\,\delta\varphi_2$, т. е. $\delta\varphi_2 = 2\,\delta\varphi_1$.

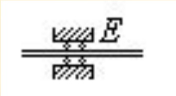
Подставляя последнее соотношение в уравнение (3) и разделив на $\delta\varphi_1$, получим:

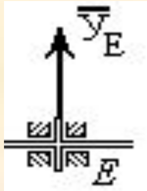
$$-M - F\cos(30^0)\,2a + 2M_E + Q\,3a\,2 = 0,$$

Откуда найдем: $M_E = M/2 + F\cos(30^0)\,a - Q\,3a = -38{,}57$ (кНм).

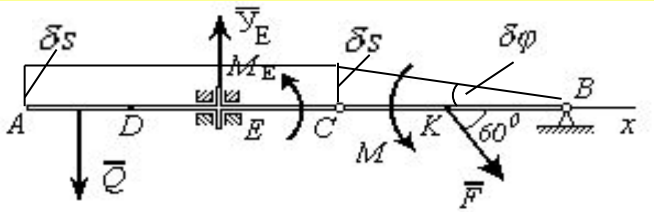
D) Определим вертикальную реакцию в скользящей заделке, наложенной на точку E балки.

1. Заменим скользящую заделку двойной скользящей заделкой, и вертикальной реакцией $\overset{\rightharpoonup}{Y}_E$.





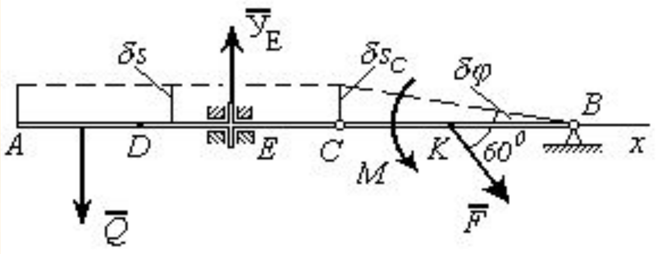
2. Сообщим балке AB возможное перемещение.



Часть балки *BC* может повернуться вокруг шарнира *B*. Обозначим это угловое перемещение ***δφ***.

Тогда другая часть балки *AC* переместится поступательно на величину ***δs*** вверх.

3. Составим уравнение возможных работ (1).



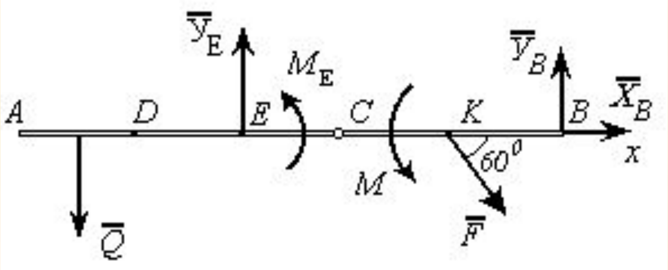
$$\Sigma\delta A_k = -M\,\delta\varphi - F\cos(30^0)\,2a\,\delta\varphi - Q\,\delta s + Y_E\,\delta s = 0. \qquad (4)$$

Учитывая, что $\delta s = 4a\cdot\delta\varphi$, из уравнения (4) найдем

$$Y_E = M/4a + F\cos(30^0)/2 + Q = 10{,}36\ (кН).$$

Е) Сделаем проверку.

Заменим все внешние опоры их реакциями.



Используем уравнения равновесия в основной форме:

$$\Sigma F_{kX} = 0, \quad \Sigma F_{kY} = 0, \quad \sum M_C(\vec{F}_k) = 0.$$

$$\Sigma F_{kX} = X_B + F\cos 60^0 = 0, \qquad (1)$$
$$\Sigma F_{kY} = Y_B + Y_E - Q - F\cos 30^0 = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_C(\vec{F}_k) = Q\,5a - Y_E\,2a + M_E + M - F\cos(30^0)\,2a + Y_B\,4a = 0. \ (3)$$

Примечание 1. В тех вариантах, где нет жесткой заделки или скользящей заделки, уравнение (3) ($\Sigma M_C = 0$) можно не составлять.

Примечание 2. В качестве моментной точки в уравнении (3) необходимо всегда выбирать точку *C*, что позволит проверить все вертикальные реакции и реактивный момент.

Подставляя в уравнение (1) найденную реакцию X_B, получим:

$$\Sigma F_{kX} = X_B + F\cos(60^0) = -2 + 4/2 \equiv 0.$$

Подставляя в уравнение (2) реакции $У_B$ и $У_E$, найдем:

$$\Sigma F_{kУ} = У_B + У_E - Q - F\cos 30^0 = 1{,}12 + 10{,}36 - 8 - 3{,}48 \equiv 0.$$

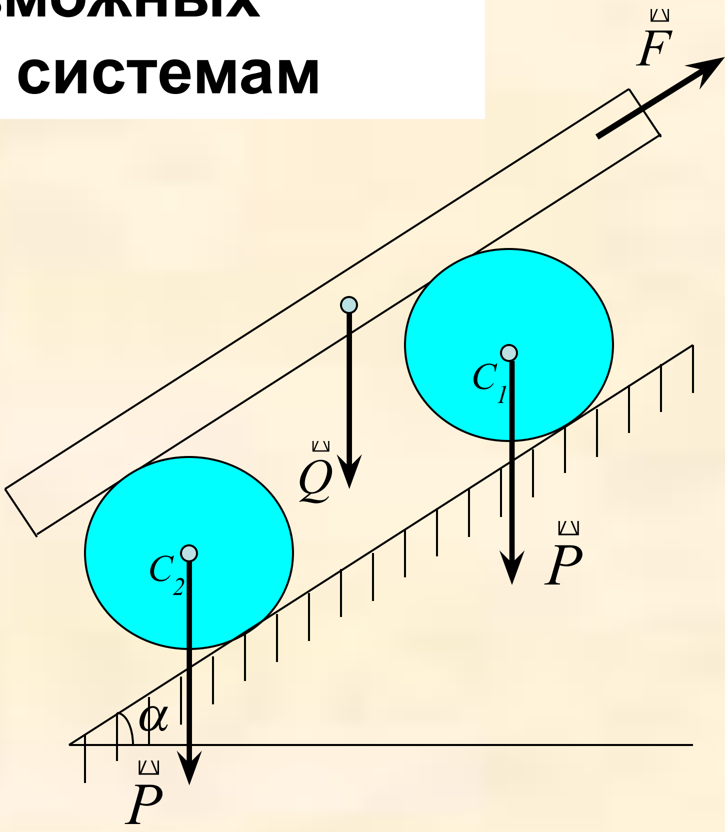
Подставляя в уравнение (3) реакции $У_B$, $У_E$ и момент M_E, найдем:

$$\sum M_C(\vec{F}_k) = 8 \cdot 5 \cdot 2 - 10{,}36 \cdot 2 \cdot 2 - 38{,}57 + 5 - 4 \cdot 2 \cdot 2 / 2 + 1{,}12 \cdot 4 \cdot 2 =$$
$$= 93{,}96 - 93{,}88 = 0{,}08 \approx 0.$$

Ответ: $У_B = 1{,}12$кН, $X_B = -2$кН, $У_E = 10{,}36$кН, $M_E = -38{,}57$кНм.

Применение принципа возможных перемещений к простейшим системам

Пример 5. Вес бревна *Q*, вес каждого из двух цилиндрических катков, *P*. Определить, какую силу $\vec{F}$ надо приложить к бревну, чтобы удержать его в равновесии на наклонной плоскости при данном угле наклона *α*. Трение катков о плоскость и бревно обеспечивает отсутствие скольжения.

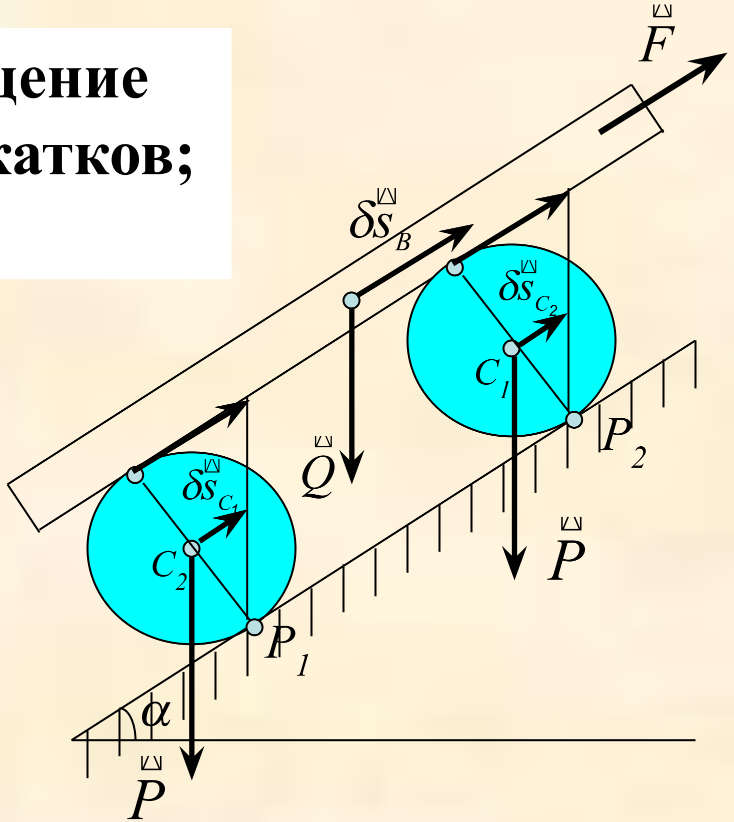


Решение.

1. Определим число степеней свободы системы.

Если пренебречь трением качения, то плоскость для катков будет идеальной связью. При качении без скольжения у системы одна степень свободы.

2.Сообщим системе возможное перемещение $\delta s_C = \delta s_{C1} = \delta s_{C2}$ – перемещения центров катков; δs_B – перемещение бревна.



3.Запишем уравнение возможных работ:

$$F\,\delta s_B - Q\,\sin\alpha\,\delta s_B - 2P\,\sin\alpha\,\delta s_C = 0.$$

4. Выразим перемещение δs_C через перемещение бревна δs_B:

$$\delta s_C = \delta s_B / 2.$$

5. Подставляя перемещение $\delta s_B \neq 0$ в уравнение возможных перемещений, и поделив на него, получим:

$$F - (Q + P)\,\sin\alpha = 0.$$

Из последнего выражения находим:

$$F = (Q + P)\,\sin\alpha.$$