



Тема: «Вторая производная и ее физический смысл».

Цели занятия:

- **1.** Формирование знаний о производных второго порядка;
- **2.** Формирование навыков применения второй производной к решению задач.

Повторение

Определение. Производной функции $y = f(x)$ называется конечный предел отношения приращения функции $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ к приращению независимой переменной Δx при стремлении последнего к нулю:

$$y' = f' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Таблица производных.

$$1. C' = 0;$$

$$2. x' = 1;$$

$$3. (Cu)' = C \cdot u';$$

$$4. (x^n)' = nx^{n-1};$$

$$5. (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right)' = -\frac{1}{nx\sqrt[n]{x}}$$

$$6. \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$$

$$7. (\sin x)' = \cos x;$$

$$8. (\cos x)' = -\sin x;$$

$$9. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$10. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

Правила дифференцирования.

$$\text{I. } (u + v)' = u' + v';$$

$$\text{II. } (uv)' = u'v + uv';$$

$$\text{III. } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$

$$\text{IV. } \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

Производная от первой производной называется **производной второго порядка** или второй производной и обозначается:

$$y'', f''(x), \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Физический смысл производной второго порядка.

Пусть тело движется по закону $S = f(x)$.
Как известно, скорость v движения тела
в данный момент времени равна
производной пути по времени, т.е.

$$v = S'(t)$$

Если тело движется неравномерно, то скорость v с течением времени изменяется и является функцией от времени. И, следовательно, от нее также можно найти производную, т.е.

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v' = (S')' = S''$$

Эта величина называется ускорением в данный момент времени и обозначается буквой a .

Таким образом, **ускорение** прямолинейного движения тела в данный момент времени равно второй производной пути по времени, вычисленной для данного момента.

В этом и заключается физический смысл второй производной.

3. Применение понятия производной функции при решении задач.

Тело движется прямолинейно по закону:

$$S = 3t^2 - 3t + 8$$

Найти скорость и ускорение тела в момент времени $t = 4$ с.

Решение.

Для определения скорости движения тела нужно найти первую производную от данной функции при $t = 4$ с.

$$v = S' = (3t^2 - 3t + 8)' = 6t - 3$$

$$v_{t=4} = 6 \cdot 4 - 3 = 21(\text{м} / \text{с})$$

Ускорение тела равно второй производной от функции при $t = 4$ с.

$$a = S'' = (S')' = (6t - 3)' = 6(\text{м} / \text{с}^2)$$

Величина ускорения оказалась постоянной для любого значения t , следовательно движение тела по заданному закону происходит с постоянным ускорением.

Ответ: $v = 21$ м/с, $a = 6$ м/с² .

1. $y = x \cdot \ln x$. Найти вторую производную

Решение.

1. Находим первую производную:

$$y' = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

2. Находим вторую производную:

$$y'' = (\ln x + 1)' = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

2. $y = e^{2x-1}$ Найти $y''\left(\frac{1}{2}\right)$

Решение.

$$y' = 2e^{2x-1} \Rightarrow y'' = 4e^{2x-1}$$

Вычислим значение второй производной при $x = \frac{1}{2}$

Подставим во вторую производную:

$$y''\left(\frac{1}{2}\right) = 4e^{1-1} = 4e^0 = 4$$

Тело движется прямолинейно по закону $S = (t^2 + 2)t - 1$ км. Определить скорость и ускорение движения тела через 6 часов после начала движения.

Решение.

$$v = S' = 3t^2 + 2 \Rightarrow v(6) = 3 \cdot 36 + 2 = 110 \text{ км / час}$$

$$a = v' = S'' = 6t \Rightarrow a(6) = 6 \cdot 6 = 36 \text{ км / час}^2$$

Самостоятельная работа

Найти производные второго порядка от заданных функций:

1. $y = x^3 + \sin x$ 2. $y = e^x - \ln 2$

3. $y = \cos x$ 4. $y = x + \ln x$

5. Тело движется прямолинейно по закону $S = 1 - 2t + t^3$. Определить скорость и ускорение в момент времени $t = 3$.

Критерии оценки:

- «5» - решены правильно все задачи;
- «4» - решены все задачи, но в одной из них допущена ошибка;
- «3» - решены правильно три задачи.