

Простейшие тригонометрические уравнения

2 семестр

ДЗ решая (шотко презент)
Общая теория тригонометр.
функций

Тема: Простейшие тригонометрические уравнения

Уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$, где x - переменная, $a \in \mathbb{R}$, то есть ур-ие, содержащее переменную под знаком тригонометр. функц-ии - называют простейшими тригонометрическими ур-циями.

• Формулы решений простейших тригонометр. ур-ций:

а) $\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^k \arcsin a + k\pi, & k \in \mathbb{Z}, \text{ если } |a| \leq 1 \\ \text{решений нет} & , \text{ если } |a| > 1 \end{cases}$

Арксинус a (при $|a| \leq 1$) - это число (угол), значение в промежутке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, синус которого равен a

б) $\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \arccos a + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z}, \text{ если } |a| \leq 1 \\ \text{решений нет} & , \text{ если } |a| > 1 \end{cases}$

Арккосинус a (при $|a| \leq 1$) - это число (угол), значение в промежутке $[0; \pi]$, косинус которого равен a

в) $\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi k \quad k \in \mathbb{Z}$

г) $\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arccotg} a + \pi k \quad k \in \mathbb{Z}$

а) и б) при $a \in [-1; 1]$

в) и г) при всех значениях a

$\sin x = 1000$

Не имеет корней, т.к. $1000 \notin [-1; 1]$

Примеры на обратных арг.

#1. $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

• по аркосе число $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и арка от функции \cos .

• $\frac{\cos \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \cos = \frac{\sqrt{3}}{2}$ при угла $\frac{\pi}{6} / 30^\circ$

• $\Rightarrow \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ - ответ

#2. $\arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

• $\text{tg} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ при угла $\frac{\pi}{6} / 30^\circ \Rightarrow \arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$ - ответ

#3. $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

• $\sin = \frac{\sqrt{3}}{2}$ при угла $\frac{\pi}{3} / 60^\circ \Rightarrow \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ - ответ

Для отрицательного числа:

• $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

• $\arctg(-x) = -\arctg x$

• $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

• $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

Примеры

вместе с учебника стр 113-114

1) $\sin x = 0,5$

$x = (-1)^n \arcsin(0,5) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\sin = 0,5$ при при угла $= \frac{\pi}{6} / 30^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ - ответ

$$\textcircled{2) \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z} \text{ - вынеси минус из арксинуса}$$

$$x = (-1)^n \left(-\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z} \text{ - этот минус обознач. знаком на } (-1)$$

$$x = (-1)^n \cdot (-1) \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z} \text{ - по правилам знаков. собери все}$$

$$x = (-1)^{n+1} \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z} \text{ - считаем арксинус}$$

$$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \text{ - Ответ}$$

$$\textcircled{3) \sin x = -0,1}$$

$$x = (-1)^n \arcsin(-0,1) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^{n+1} \arcsin(0,1) + \pi n, n \in \mathbb{Z} \text{ - Ответ}$$

т.к. 0,1 не табличное знач. \rightarrow оставим все так

$$\textcircled{4) \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \left(\pi - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

т.к. есть еще значение $\frac{1}{\sqrt{2}}$, но есть $\frac{\sqrt{2}}{2}$, знач. применим формулу.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \angle \frac{\pi}{4} / \angle 45^\circ$$

$$x = \pm \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \text{ - Ответ}$$

$$\textcircled{5) \frac{1}{\sqrt{2}} x = \sqrt{2}}$$

$$x = \arctg \sqrt{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \text{ т.к. } \sqrt{2} \text{ - не табличное знач. оставим так}$$

$$\textcircled{6} \quad \underline{\text{ctg } x = -\sqrt{3}}$$

$$x = \text{arccotg}(-\sqrt{3}) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi - \text{arccotg}(\sqrt{3}) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi - \frac{\pi}{6} + \pi n = \frac{5\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

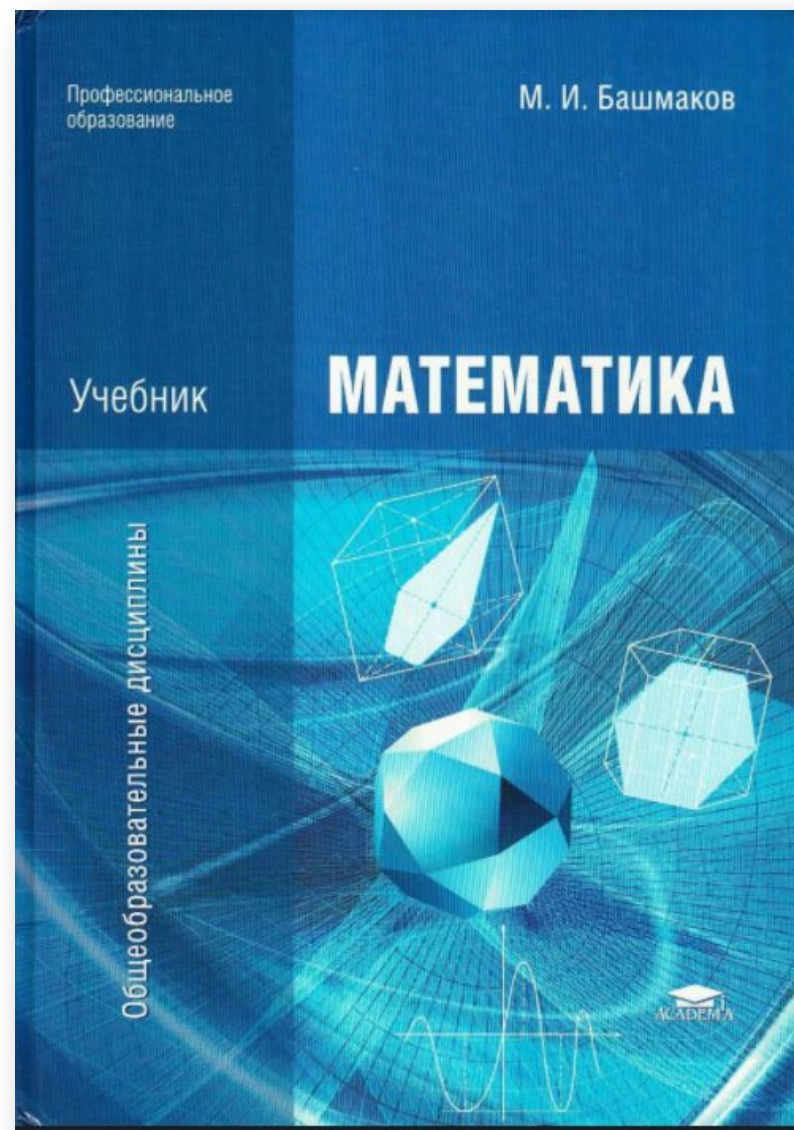
$$\textcircled{7} \quad \underline{\text{ctg } x = 1}$$

$$x = \text{arccotg } 1 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

<https://drive.google.com/file/d/0BwulwquUtZ1KU0NtaXBEUnM3WVv/view>

Стр 113, Занятие 5 «Тригонометрические уравнения»



Формулы корней простых тригонометрических уравнений

1. $\cos t = a$, где $|a| \leq 1$

$$\begin{cases} t = \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ t = -\arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

или

$$t = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи

1) $\cos t = 0$
 $t = \pi/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

2) $\cos t = 1$
 $t = 0 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

3) $\cos t = -1$
 $t = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

2. $\sin t = a$, где $|a| \leq 1$

$$\begin{cases} t = \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ t = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

или

$$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи

1) $\sin t = 0$
 $t = 0 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

2) $\sin t = 1$
 $t = \pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

3) $\sin t = -1$
 $t = -\pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

3. $\operatorname{tg} t = a, a \in \mathbb{R}$

$$t = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

4. $\operatorname{ctg} t = a, a \in \mathbb{R}$

$$t = \operatorname{arcctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Формулы корней простых тригонометрических уравнений

$$\sin t = a$$

$$t = (-1)^k \cdot \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos t = a$$

$$t = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи

$$\sin t = 0 \quad t = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin t = 1 \quad t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin t = -1 \quad t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos t = 0 \quad t = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos t = 1 \quad t = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos t = -1 \quad t = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} t = a$$

$$t = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} t = a$$

$$t = \operatorname{arcctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$