Линейная алгебра

Метод Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений

Лектор: доцент Мелехина Татьяна Леонидовна

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = \end{cases}$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ – неизвестные переменные

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – матрица коэффициентов

перед переменными

$b_1, b_2, \dots, b_m$ – свободные члены уравнения

Решение системы уравнений.

- Решением системы является любой набор значений неизвестных $x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2, \dots ,\ x_n = \alpha_n$, удовлетворяющих всем уравнениям системы.

Система, не имеющая ни одного решения, называется ***несовместной***.

Две системы уравнений с одними и теми же неизвестными называются ***равносильными***, если они имеют одно и тоже множество решений.

		...		-
		...		
		...		
...	...	...	...	...
		...		

Элементарные преобразования

1. Перестановка уравнений
2. Вычеркивание из системы нулевых уравнений
3. Умножение обеих частей одного из уравнений системы на число, не равное нулю
4. Прибавление к обеим частям одного из уравнений системы соответствующих частей другого уравнения.

Метод Гаусса – метод последовательного исключения переменных

- *Шаг 1.* Умножая первое уравнение на подходящие числа и прибавляя полученные уравнения соответственно ко второму, третьему, ..., m –му уравнению системы, исключим переменную x_1 из всех последующих уравнений, начиная со второго.

Метод Гаусса

- *Шаг 2.* Умножая второе уравнение на подходящие числа и прибавляя полученные уравнения соответственно к первому, третьему, четвертому, …, m−му уравнению системы, исключим переменную x_2 из всех последующих уравнений.

Метод Гаусса

Продолжая процесс последовательного исключения переменных, получим систему уравнений, в которой для каждого уравнения имеется неизвестное, которое входит в это уравнение с коэффициентом, равным единице, а в остальные уравнения – с коэффициентом 0.

Если для каждого уравнения зафиксировано такое неизвестное, то это неизвестное называется ***базисным***, а весь набор базисных неизвестных – ***базисом неизвестных***. Остальные неизвестные называются ***свободными***.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$

1	2	3	2
1	-1	-1	-2
1	3	-1	-2

В результате преобразований Гаусса получим таблицу:

1	2	3	2
0	-3	-4	-4
0	1	-4	-4

1	0	11	10
0	0	-16	-16
0	1	-4	-4

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ответ: $x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1.$

Однородные системы линейных уравнений

- Линейное уравнение называется ***однородным***, если свободный член уравнения равен нулю. Система, состоящая из однородных уравнений, сама называется ***однородной***.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна: одно из её решений – нулевое.

<u>Теорема.</u> Однородная система, в которой число уравнений меньше числа неизвестных, всегда имеет ненулевое решение.

Пример 2. Найти общее решение системы уравнений.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 9x_3 = 0, \\ 10x_1 + 3x_2 + 23x_3 = 0, \\ 7x_1 + 2x_2 + 16x_3 = 0. \end{cases}$$

4	1	9	0
10	3	23	0
7	2	16	0

Решим систему методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 9 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Перейдем к записи системы уравнений

- $$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x_2 = -x_3, \\ x_1 = -2x_3 \end{cases}$$

Общее решение системы имеет вид:

$$(-2x_3;\ -x_3;\ x_3), \quad x_3 - \text{любое число.}$$

Арифметические векторы и действия над ними. Пространство R^n.

Определение 1. ***Арифметическим n –мерным вектором*** называется любая последовательность из n действительных чисел $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Определение 2. Два вектора с одним и тем же числом координат $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и

$\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ считают ***равными*** тогда и только тогда, когда $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$.

Обозначение: $\vec{a} = \vec{b}$.

Действия над векторами

Суммой двух векторов (с одинаковым количеством координат) называют вектор

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n).$$

Выполняются следующие ***свойства*** сложения векторов:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
3. $\vec{a}+\vec{o}=\vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$, где $\vec{o}=(0,0,\dots,0)$.
4. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{o}$, где $-\vec{a}=(-a_1,-a_2,\dots,-a_n)$

Действия над векторами

- ***Произведением вектора*** $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ***на число*** λ называется вектор

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$$

Свойства операции умножения вектора на число:

5. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

6. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

7. $\lambda\cdot(\mu\vec{a}) = (\lambda \cdot \mu)\vec{a}$

8. $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$.

Определение.

Множество всех n−мерных арифметических векторов, в котором введены указанные выше операции сложения векторов и умножения вектора на число, называется ***арифметическим $\boldsymbol{n}$ −мерным векторным пространством*** и обозначается $\boldsymbol{R}^n$.

Системы векторов в линейном пространстве

- Если при рассмотрении некоторого вопроса приходится иметь дело с несколькими векторами, то, как правило, их обозначают одной и той же буквой с разными индексами $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots$.

Весь набор $\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots\}$ называют ***системой векторов***.

Определение

- Пусть даны векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_s}$. Любой вектор $\vec{a}$ вида $\vec{a} = k_1\overrightarrow{a_1} + k_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + k_s\overrightarrow{a_s}$

где $k_1, k_2, \dots, k_s$ – какие угодно числа, называется *линейной комбинацией* векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_s}$.

Также говорят, что вектор $\vec{a}$ *линейно выражается* через векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_s}$ или что $\vec{a}$ *разлагается* по векторам $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_s}$.

Пример

- Для системы векторов из $\boldsymbol{R}^3$

$\overrightarrow{a_1} = (2; 2; 3)$, $\overrightarrow{a_2} = (0; -4; 5)$, $\overrightarrow{a_3} = (3; 13; -8)$ рассмотрим линейную комбинацию

$$3\overrightarrow{a_1} - 5\overrightarrow{a_2} - 2\overrightarrow{a_3} = (6;\ 6;\ 9) - (0;\ -20;\ 25) - (6;\ 26;\ -16) = (0;\ 0;\ 0).$$

Таким образом, вектор (0; 0; 0) является линейной комбинацией векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$.

Определения.

- Множество всех линейных комбинаций векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_s}$ называется ***линейной оболочкой*** векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_s}$ и обозначается $L(\overrightarrow{a_1, \overrightarrow{a_2}}, \dots, \overrightarrow{a_s})$.

Система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_s}$ линейного пространства называется ***линейно зависимой***, если существуют такие числа k_1, k_2, …, k_s, не равные нулю одновременно, что справедливо равенство

$$k_1\overrightarrow{a_1} + k_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + k_s\overrightarrow{a_s} = \vec{o}.$$

Линейная независимость векторов.

- Если система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_s}$ такова, что равенство $k_1\overrightarrow{a_1} + k_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + k_s\overrightarrow{a_s} = \vec{o}$ возможно, только если $k_1 = k_2 = \ldots = k_s = 0$, то эта система называется ***линейно независимой.***

Два вектора $\vec{a}$ и $\overrightarrow{b}$ будут линейно зависимы, если $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$ или $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$ для некоторого числа k. Такие векторы называются ***коллинеарными***.

Пример.

- Дана система из четырех векторов в $\boldsymbol{R}^5$
$\overrightarrow{a_1} = (-1;\ 3;\ 3;\ 2;\ 5)$
$\overrightarrow{a_2} = (-3;\ 5;\ 2;\ 3;\ 4)$
$\overrightarrow{a_3} = (-3;\ 1;\ -5;\ 0;\ -7)$
$\overrightarrow{a_4} = (-5; 7; 1; 4; 1)$

Выяснить, является ли эта система линейно зависимой.

Необходимо решить уравнение:

$$x_1\overrightarrow{a_1} + x_2\overrightarrow{a_2} + x_3\overrightarrow{a_3} + x_4\overrightarrow{a_4} = \vec{o}.$$

Решение.

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 7x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \qquad + 4x_4 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 - 7x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Найдем решение системы методом Гаусса.

Базис линейного пространства

Определение. Система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_s}$ называется ***базисом*** линейного пространства V, если выполнены следующие условия:

1) эти векторы линейно независимы;

2) любой вектор $\vec{a}$ из V является линейной комбинацией векторов данной системы, т.е. $\vec{a} = k_1\overrightarrow{a_1} + k_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + k_s\overrightarrow{a_s}$.

При этом равенство называется ***разложением вектора*** $\vec{a}$ по данному базису.

Пример.

- В пространстве $\boldsymbol{R}^n$ в качестве базиса может быть выбрана система из ***n единичных векторов***

$$\overrightarrow{e_1} = (1; 0; 0; \dots; 0),$$
$$\overrightarrow{e_2} = (0; 1; 0; \dots; 0),$$
....
$$\overrightarrow{e_n} = (0; 0; 0; \dots; 1).$$

Любой вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ можно представить $\vec{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{e_n}$.

Основные утверждения.

- Координаты вектора в данном пространстве определены **однозначно**.
- Число векторов базиса линейного пространства V определено **однозначно**.
- *Размерностью* линейного пространства V называется число векторов его базиса.
- Линейно независимая система векторов в n –мерном линейном пространстве V является **базисом** тогда и только тогда, когда число этих векторов равно n.

Примеры.

1. Система векторов:

$$\overrightarrow{p_1} = (7; 3; -2;),$$
$$\overrightarrow{p_2} = (0; 2; 1),$$
$$\overrightarrow{p_3} = (0; 0; 4;)$$ является базисом в $\boldsymbol{R}^3$.

2. Векторы:

$$\overrightarrow{p_1} = (0; 0; 0; 1),$$
$$\overrightarrow{p_2} = (7; 1; 3; -2),$$
$$\overrightarrow{p_3} = (0; 0; -2; 6),$$
$$\overrightarrow{p_4} = (0; -1; 2; 0)$$ образуют базис в $\boldsymbol{R}^4$.

Ранг и базис системы векторов.

- Отметим, что линейная оболочка $L(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_s})$ векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_s}$ пространства V является **подпространством**.
- Размерность этого подпространства называется ***рангом системы векторов*** $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_s}$ и обозначается $rk(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_s})$.
- Подсистема $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_r}$ системы векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_s}$ называется ***базисом этой системы***, если она является базисом линейной оболочки $L(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_s})$.

Пример.

- Дана система из четырех векторов в $\boldsymbol{R}^5$:

$$\overrightarrow{a_1} = (-1;\ 3;\ 3;\ 2;\ 5),$$
$$\overrightarrow{a_2} = (-3;\ 5;\ 2;\ 3;\ 4),$$
$$\overrightarrow{a_3} = (-3;\ 1;\ -5;\ 0;\ -7),$$
$$\overrightarrow{a_4} = (-5; 7; 1; 4; 1).$$

Найти ранг и базис этой системы.

Евклидовы пространства.

Определение. Говорят, что на линейном пространстве V задано скалярное произведение векторов, если имеется правило, по которому любым двум векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сопоставляется число $(\vec{a},\vec{b})$, удовлетворяющее следующим четырем аксиомам:

1. $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$;
2. $(k\cdot\vec{a},\vec{b})=k\cdot(\vec{a},\vec{b})$;

3. $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$;

4. $(\vec{a}, \vec{a}) > 0$, если $\vec{a} \neq \vec{o}$, и если $(\vec{a}, \vec{a}) = 0$, то $\vec{a} = \vec{o}$.

Определение. Линейное пространство, на котором задано скалярное произведение, называется ***евклидовым пространством***.

В евклидовом пространстве скалярное произведение векторов $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ задается соотношением:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Выполнение всех аксиом скалярного произведения очевидно.

Справедливо равенство:

$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha.$ И как следствие:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}.$$

Ортогональные системы векторов

Определение. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в евклидовом пространстве называются *ортогональными* (друг другу), если их скалярное произведение равно нулю:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 0.$$

Система векторов в евклидовом пространстве называется *ортогональной*, если все векторы в ней попарно ортогональны.

Ортонормированные системы векторов

Определение. Ортогональная система векторов в евклидовом пространстве называется ***ортонормированной***, если модуль любого вектора системы равен единице.

Задача.

Проверить, что векторы $\overrightarrow{a_1} = (1; -1; 2)$, $\overrightarrow{a_2} = (-1; 1; 1)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; 1; 0)$ образуют ортогональный базис пространства $\boldsymbol{R}^3$. Найти координаты вектора $\vec{x} = (3, 5, 4)$ в этом базисе.