

Линейная алгебра

Метод Гаусса для решения систем
линейных алгебраических уравнений

Лектор: доцент Мелехина Татьяна Леонидовна

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = \end{cases}$$

x_1, x_2, \dots, x_n – неизвестные переменные

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов
 перед переменными

b_1, b_2, \dots, b_m – свободные члены уравнения

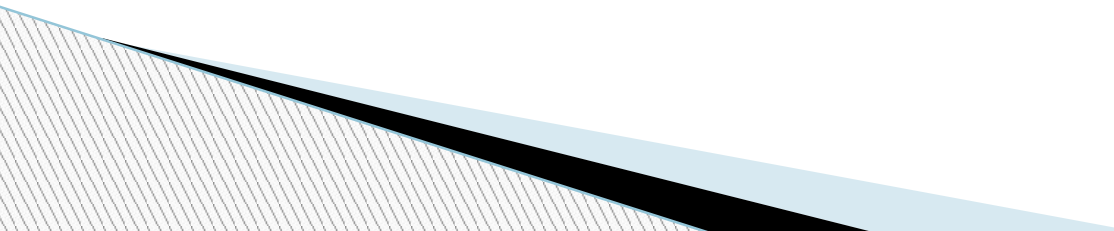
Решение системы уравнений.

□ Решением системы является любой набор значений неизвестных $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$, удовлетворяющих всем уравнениям системы.

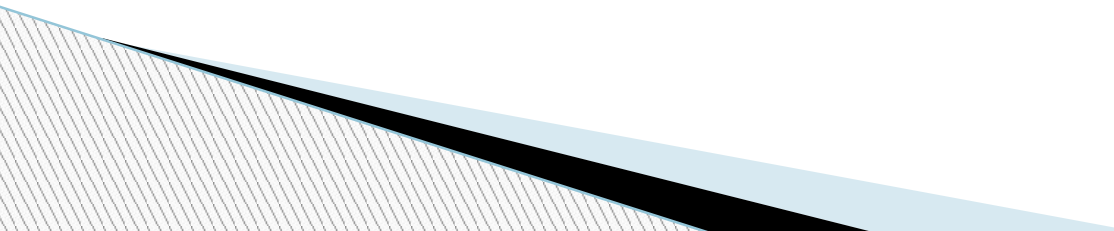
Система, не имеющая ни одного решения, называется ***несовместной***.

Две системы уравнений с одними и теми же неизвестными называются ***равносильными***, если они имеют одно и тоже множество решений.

		...		-
		...		
		...		
...
		...		



Элементарные преобразования

1. Перестановка уравнений
 2. Вычеркивание из системы нулевых уравнений
 3. Умножение обеих частей одного из уравнений системы на число, не равное нулю
 4. Прибавление к обеим частям одного из уравнений системы соответствующих частей другого уравнения.
- 

Метод Гаусса – метод последовательного исключения переменных

▣ *Шаг 1.* Умножая первое уравнение на подходящие числа и прибавляя полученные уравнения соответственно ко второму, третьему, ..., m -му уравнению системы, исключим переменную x_1 из всех последующих уравнений, начиная со второго.

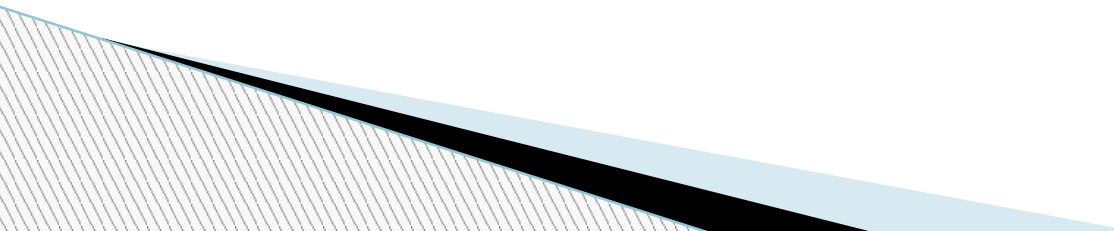
Метод Гаусса

- ▣ *Шаг 2.* Умножая второе уравнение на подходящие числа и прибавляя полученные уравнения соответственно к первому, третьему, четвертому, ..., m -му уравнению системы, исключим переменную x_2 из всех последующих уравнений.

Метод Гаусса

Продолжая процесс последовательного исключения переменных, получим систему уравнений, в которой для каждого уравнения имеется неизвестное, которое входит в это уравнение с коэффициентом, равным единице, а в остальные уравнения – с коэффициентом 0.

Если для каждого уравнения зафиксировано такое неизвестное, то это неизвестное называется **базисным**, а весь набор базисных неизвестных – **базисом неизвестных**.
Остальные неизвестные называются **свободными**.



Пример 1. Решить систему уравнений

□

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$

1	2	3	2
1	-1	-1	-2
1	3	-1	-2

В результате преобразований Гаусса получим таблицу:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & -16 & -16 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

Однородные системы линейных уравнений

- Линейное уравнение называется *однородным*, если свободный член уравнения равен нулю. Система, состоящая из однородных уравнений, сама называется *однородной*.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{array} \right.$$

Однородная система всегда совместна: одно из её решений – нулевое.

Теорема. Однородная система, в которой число уравнений меньше числа неизвестных, всегда имеет ненулевое решение.

Пример 2. Найти общее решение системы уравнений.

□

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 9x_3 = 0, \\ 10x_1 + 3x_2 + 23x_3 = 0, \\ 7x_1 + 2x_2 + 16x_3 = 0. \end{cases}$$

4	1	9	0
10	3	23	0
7	2	16	0

Решим систему методом Гаусса

$$\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 9 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

Перейдем к записи системы уравнений

$$\square \quad \begin{cases} x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 = -x_3, \\ x_1 = -2x_3 \end{cases}$$

Общее решение системы имеет вид:

$$(-2x_3; -x_3; x_3), \quad x_3 \text{ — любое число.}$$

Арифметические векторы и действия над ними. Пространство R^n .

Определение 1. **Арифметическим n -мерным вектором** называется любая последовательность из n действительных чисел $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Определение 2. Два вектора с одним и тем же числом координат $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и

$\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ считают **равными** тогда и только тогда, когда $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$.

Обозначение: $\vec{a} = \vec{b}$.

Действия над векторами

□ **Суммой** двух векторов (с одинаковым количеством координат) называют вектор

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n).$$

Выполняются следующие **свойства** сложения векторов:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
3. $\vec{a} + \vec{o} = \vec{a}$ для любого вектора \vec{a} , где $\vec{o} = (0, 0, \dots, 0)$.
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{o}$, где $-\vec{a} = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$

Действия над векторами

□ **Произведением вектора** $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ **на число** λ называется вектор

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$$

Свойства операции умножения вектора на число:

$$5. \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$$

$$6. (\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$$

$$7. \lambda \cdot (\mu \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \vec{a}$$

$$8. 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}.$$

Определение.

Множество всех n -мерных арифметических векторов, в котором введены указанные выше операции сложения векторов и умножения вектора на число, называется *арифметическим n -мерным векторным пространством* и обозначается R^n .

Системы векторов в линейном пространстве

□ Если при рассмотрении некоторого вопроса приходится иметь дело с несколькими векторами, то, как правило, их обозначают одной и той же буквой с разными индексами $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots$.

Весь набор $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots\}$ называют ***системой векторов***.

Определение

□ Пусть даны векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_s$. Любой вектор \vec{a} вида $\vec{a} = k_1 \vec{a}_1 + k_2 \vec{a}_2 + \dots + k_s \vec{a}_s$

где k_1, k_2, \dots, k_s – какие угодно числа,

называется **линейной комбинацией**

векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_s$.

Также говорят, что вектор \vec{a} **линейно выражается** через векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_s$ или что \vec{a} **разлагается** по векторам $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_s$.

Пример

□ Для системы векторов из R^3
 $\vec{a}_1 = (2; 2; 3)$, $\vec{a}_2 = (0; -4; 5)$, $\vec{a}_3 = (3; 13; -8)$
рассмотрим линейную комбинацию

$$3\vec{a}_1 - 5\vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 = (6; 6; 9) - (0; -20; 25) - (6; 26; -16) = (0; 0; 0).$$

Таким образом, вектор $(0; 0; 0)$ является линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

Определения.

□ Множество всех линейных комбинаций векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_s$ называется **линейной оболочкой** векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_s$ и обозначается $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_s)$.

Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_s$ линейного пространства называется **линейно зависимой**, если существуют такие числа k_1, k_2, \dots, k_s , не равные нулю одновременно, что справедливо равенство

$$k_1 \vec{a}_1 + k_2 \vec{a}_2 + \dots + k_s \vec{a}_s = \vec{o}.$$

Линейная независимость векторов.

□ Если система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_s$ такова, что равенство

$k_1 \vec{a}_1 + k_2 \vec{a}_2 + \dots + k_s \vec{a}_s = \vec{0}$ возможно, только если $k_1 = k_2 = \dots = k_s = 0$, то эта система называется **линейно независимой**.

Два вектора \vec{a} и \vec{b} будут линейно зависимы, если $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$ или $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$ для некоторого числа k . Такие векторы называются **коллинеарными**.

Пример.

- Дана система из четырех векторов в R^5

$$\vec{a}_1 = (-1; 3; 3; 2; 5)$$

$$\vec{a}_2 = (-3; 5; 2; 3; 4)$$

$$\vec{a}_3 = (-3; 1; -5; 0; -7)$$

$$\vec{a}_4 = (-5; 7; 1; 4; 1)$$

Выяснить, является ли эта система линейно зависимой.

Необходимо решить уравнение:

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3 + x_4 \vec{a}_4 = \vec{0}.$$

Решение.

$$\square \quad \begin{cases} -x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 7x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \quad \quad \quad + 4x_4 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 - 7x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Найдем решение системы методом Гаусса.

Базис линейного пространства

Определение. Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_s$ называется **базисом** линейного пространства V , если выполнены следующие условия:

- 1) эти векторы линейно независимы;
- 2) любой вектор \vec{a} из V является линейной комбинацией векторов данной системы, т.е. $\vec{a} = k_1 \vec{a}_1 + k_2 \vec{a}_2 + \dots + k_s \vec{a}_s$.

При этом равенство называется **разложением вектора** \vec{a} по данному базису.

Пример.

- В пространстве R^n в качестве базиса может быть выбрана система из ***n* ЕДИНИЧНЫХ ВЕКТОРОВ**

$$\vec{e}_1 = (1; 0; 0; \dots; 0),$$

$$\vec{e}_2 = (0; 1; 0; \dots; 0),$$

.....

$$\vec{e}_n = (0; 0; 0; \dots; 1).$$

Любой вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ МОЖНО представить $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_n \vec{e}_n$.

Основные утверждения.

- ▶ Координаты вектора в данном пространстве определены однозначно.
- ▶ Число векторов базиса линейного пространства V определено однозначно.
- ▶ **Размерностью** линейного пространства V называется число векторов его базиса.
- ▶ Линейно независимая система векторов в n -мерном линейном пространстве V является базисом тогда и только тогда, когда число этих векторов равно n .

Примеры.

1. Система векторов:

$$\vec{p}_1 = (7; 3; -2;),$$

$$\vec{p}_2 = (0; 2; 1),$$

$$\vec{p}_3 = (0; 0; 4;) \text{ является базисом в } \mathbf{R}^3 .$$

2. Векторы:

$$\vec{p}_1 = (0; 0; 0; 1),$$

$$\vec{p}_2 = (7; 1; 3; -2),$$

$$\vec{p}_3 = (0; 0; -2; 6),$$

$$\vec{p}_4 = (0; -1; 2; 0) \text{ образуют базис в } \mathbf{R}^4 .$$

Ранг и базис системы векторов.

- ▶ Отметим, что линейная оболочка $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_s)$ векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_s$ пространства V является подпространством.
- ▶ Размерность этого подпространства называется **рангом системы векторов** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_s$ и обозначается $rk(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_s)$.
- ▶ Подсистема $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_r$ системы векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_s$ называется **базисом этой системы**, если она является базисом линейной оболочки $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_s)$.

Пример.

- Дана система из четырех векторов в R^5 :

$$\vec{a}_1 = (-1; 3; 3; 2; 5),$$

$$\vec{a}_2 = (-3; 5; 2; 3; 4),$$

$$\vec{a}_3 = (-3; 1; -5; 0; -7),$$

$$\vec{a}_4 = (-5; 7; 1; 4; 1).$$

Найти ранг и базис этой системы.

Евклидовы пространства.

Определение. Говорят, что на линейном пространстве V задано **скалярное произведение векторов**, если имеется правило, по которому любым двум векторам \vec{a} и \vec{b} сопоставляется число (\vec{a}, \vec{b}) , удовлетворяющее следующим четырем аксиомам:

1. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$;
2. $(k \cdot \vec{a}, \vec{b}) = k \cdot (\vec{a}, \vec{b})$;

3. $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$;

4. $(\vec{a}, \vec{a}) > 0$, если $\vec{a} \neq \vec{o}$, и если $(\vec{a}, \vec{a}) = 0$, то $\vec{a} = \vec{o}$.

Определение. Линейное пространство, на котором задано скалярное произведение, называется ***евклидовым пространством***.

□ В евклидовом пространстве скалярное произведение векторов $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ задается соотношением:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Выполнение всех аксиом скалярного произведения очевидно.

Справедливо равенство:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha. \quad \text{И как следствие:}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}.$$

Ортогональные системы векторов

Определение. Векторы \vec{a} и \vec{b} в евклидовом пространстве называются **ортогональными** (друг другу), если их скалярное произведение равно нулю:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 0.$$

Система векторов в евклидовом пространстве называется **ортогональной**, если все векторы в ней попарно ортогональны.

Ортонормированные системы векторов

Определение. Ортогональная система векторов в евклидовом пространстве называется **ортонормированной**, если модуль любого вектора системы равен единице.

Задача.

Проверить, что векторы $\vec{a}_1 = (1; -1; 2)$, $\vec{a}_2 = (-1; 1; 1)$, $\vec{a}_3 = (1; 1; 0)$ образуют ортогональный базис пространства R^3 . Найти координаты вектора $\vec{x} = (3, 5, 4)$ в этом базисе.