

Определение машины Тьюринга





Машина Тьюринга – это строгое математическое построение, математический аппарат, созданный для решения определённых задач.

Машина Тьюринга – абстрактный исполнитель, осуществляющий алгоритмический процесс, созданный для уточнения понятия алгоритма.

Это математический объект, а не физическая машина.

Предложена Аланом Тьюрингом в 1936 году



Структура и описание машины Тьюринга



Машина Тьюринга состоит из:

- бесконечной ленты, разделенной на ячейки;
- каретки (читающей и записывающей головки);
- программируемого автомата (программа в виде таблицы).

Автомат каждый раз “видит” только одну ячейку. В зависимости от того, какую букву он видит, а также в зависимости от своего состояния q автомат может выполнять следующие действия:

- ✓ записать новую букву в обозреваемую ячейку;
- ✓ выполнить сдвиг по ленте на одну ячейку вправо/влево или остаться неподвижным;
- ✓ перейти в новое состояние.

Устройство машины Тьюринга



1) Внешний алфавит

$$A = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$$

Элемент a_0 называется **пустой символ** или **пустая буква** (признак того, что ячейка пуста).

В этом алфавите в виде слова кодируется исходный набор данных и результат работы алгоритма.



Устройство машины Тьюринга

2) Внутренний алфавит

$$Q = \{q_0, q_1, \dots, q_m\}, \{\Pi, \text{Л}, \text{Н!}\}$$



В любой момент времени машина Тьюринга находится в одном из состояний q_0, q_1, \dots, q_m

При этом: q_1 - начальное состояние (машина начинает работу)

q_0 - заключительное состояние (машина закончила работу)

Символы $\{\Pi, \text{Л}, \text{Н!}\}$ – символы сдвига (вправо, влево, на месте)

Виды команд машины Тьюринга



1. Написать новую букву в обозреваемую ячейку
2. Выполнить сдвиг по ленте на одну ячейку вправо/влево или остаться на месте (П, Л, Н)
3. Перейти в новое состояние.

	1	1	1	*	1	1	
--	---	---	---	---	---	---	--

	a_0	a_1	...	a_i	...	a_j
q_0	Указание о смене символа					
q_1						
...				$a_k \{ЛПН\} q_m$		
q_i						
...	Указание о сдвиге каретки				Указание о смене внутреннего состояния	
q_j						

Устройство машины Тьюринга



3) Внешняя память (лента)

Машина имеет ленту, разбитую на ячейки, в каждую из которых может быть записана только одна буква



a_0	a_2	a_1	a_5	a_3	a_0
-------	-------	-------	-------	-------	-------

Устройство машины Тьюринга



3) Внешняя память (лента)

a_0	a_2	a_1	a_5	a_3	a_0
-------	-------	-------	-------	-------	-------

Пустая клетка содержит a_0 .

В каждый момент времени на ленте записано конечное число непустых букв



Лента является конечной, но дополняется в любой момент ячейками слева и справа для записи новых непустых символов.

Это соответствует принципу абстракции потенциальной осуществимости

Устройство машины Тьюринга

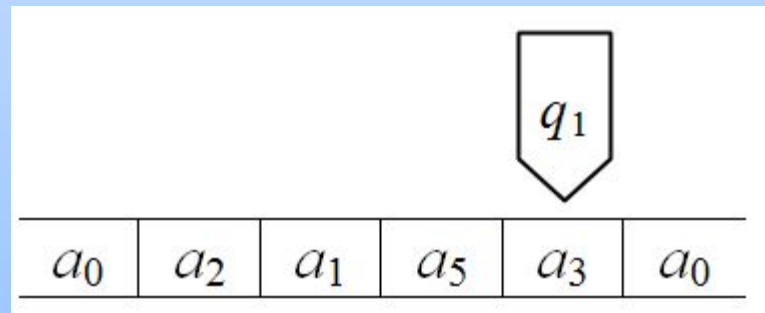


4) Каретка (управляющая головка)



Каретка машины располагается над некоторой ячейкой ленты – воспринимает символ, записанный в ячейке

В одном такте работы каретка сдвигается на одну ячейку (вправо, влево) или остается на месте



Устройство машины Тьюринга



5) Функциональная схема (программа)



Программа машины состоит из команд:

$$\begin{aligned} q_i a_j &\rightarrow q_k a_l X, & X &\in \{П, Л, С\} \\ i &= \overline{1, m}, & j &= \overline{1, n} \\ k &= \overline{1, m}, & l &= \overline{1, n} \end{aligned}$$

Для каждой пары (q_i, a_j) программа машины должна содержать одну команду (детерминированная машина Тьюринга)

Описание работы машины Тьюринга

К началу работы машины на ленту подается исходный набор данных в виде слова α



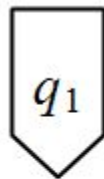
Будем говорить, что непустое слово α в алфавите $A \setminus \{a_0\}$ воспринимается машиной в **стандартном положении**, если:

- оно задано в последовательных ячейках ленты,
- все другие ячейки пусты,
- машина обозревает крайнюю правую ячейку из тех, в которых записано слово α

Описание работы машины Тьюринга

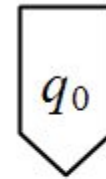


Стандартное положение называется **начальным (заключительным)**, если машина, воспринимающая слово в стандартном положении, находится в начальном состоянии q_1 (стоп-состоянии q_0)



a_0	a_2	a_1	a_5	a_3	a_0
-------	-------	-------	-------	-------	-------

начальное стандартное



a_0	a_2	a_1	a_5	a_3	a_0
-------	-------	-------	-------	-------	-------

заключительное стандартное

Описание работы машины Тьюринга



Находясь в не заключительном состоянии, машина совершает шаг, который определяется текущим состоянием q_i и обозреваемым символом a_j

Описание работы машины Тьюринга



В соответствии с командой $q_i a_j \rightarrow q_k a_l X$ выполняются следующие действия:



1) Содержимое обозреваемой ячейки a_j стирается и в нее записывается символ a_l (который может совпадать с a_j)

2) Машина переходит в новое состояние q_k (оно может совпадать с состоянием q_i)

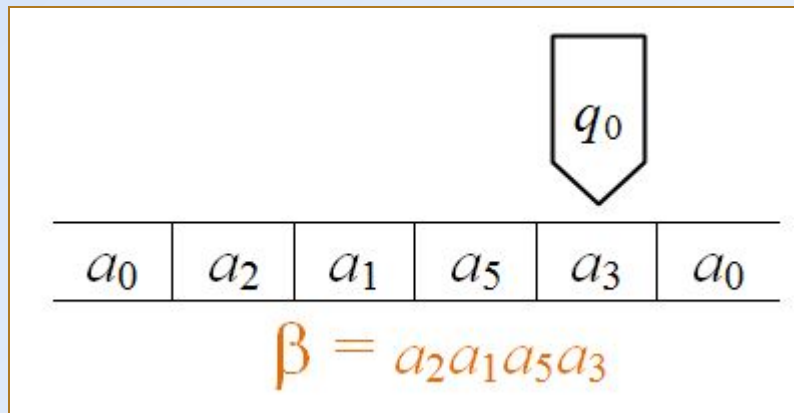
3) Каретка перемещается в соответствии с управляемым символом $X \in \{\Pi, Л, Н!\}$

Описание работы машины Тьюринга



При переходе машины в заключительное состояние q_0 ее работа прекращается

На ленте записан результат работы алгоритма – слово β в алфавите $A \setminus \{a_0\}$



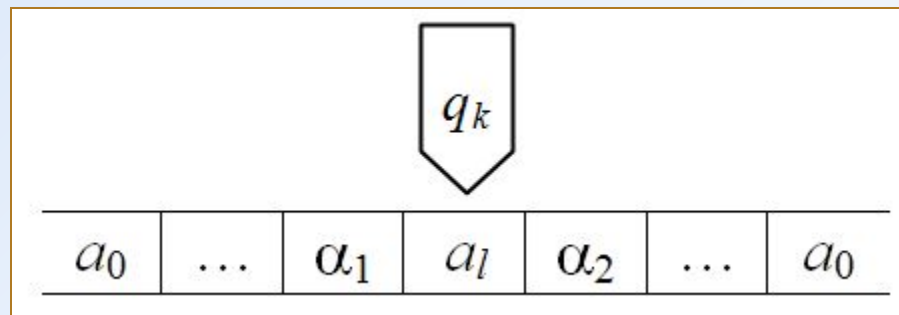


Машинным словом (конфигурацией) машины Тьюринга называется слово вида $\alpha_1 q_k a_l \alpha_2$, где α_1 и α_2 - слова в алфавите A .



Конфигурация $\alpha_1 q_k a_l \alpha_2$ интерпретируется следующим образом:

- машина находится в состоянии q_k
- каретка обозревает на ленте символ a_l
- α_1 и α_2 – это содержимое ленты до и после символа a_l



Ситуации неприменимости машины Тьюринга

Считается, что машина Тьюринга **неприменима** к данному входному слову, если в программе нет клеток останова или машина в процессе работы на них не попадает.

Например:

	a_0	0	1
q_1	$1Hq_0$	$0Пq_1$	$1Пq_1$

Машина Тьюринга **применима** к данному входному слову, если, начав работу над этим входным словом, она рано или поздно дойдёт до одной из клеток останова. Как изменилась программа в примере?

Пример машин Тьюринга

Требуется построить машину Тьюринга для решения следующей задачи: во входном слове все буквы «а» заменить на буквы «б» и наоборот.

			б	б	р	б	б	у		
--	--	--	----------	----------	----------	----------	----------	----------	--	--

	a_0	а	б	в	...	я
q_1	$a_0 H !$	б Л q_1	а Л q_1	в Л q_1	...	я Л q_1

у → **у** **р** → **р**
б → **а** **а** → **б**
а → **б** **б** → **а**

Реализуйте предложенный алгоритм

Машина Тьюринга прибавляет единицу к числу на ленте. Входное слово состоит из цифр целого десятичного числа, записанного в последовательные ячейки на ленте. В начальный момент машина находится против самой правой цифры числа.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

	a_0	0	1	2	3	4	...	7	8	9
q_1	$1Hq_0$	$1Hq_0$	$2Hq_0$	$3Hq_0$	$4Hq_0$	$5Hq_0$...	$8Hq_0$	$9Hq_0$	$0Lq_1$

Реализуйте предложенный алгоритм

На ленте машины Тьюринга содержится последовательность символов «+». Машина Тьюринга каждый второй символ «+» заменяет на «-». Замена начинается с правого конца последовательности. Автомат в состоянии q_1 обозревает один из символов указанной последовательности.

			a_0			+			-		
q_1			a_0 Л q_2			+ П q_1					
q_2			a_0 Н !			+ Л q_3					
q_3			a_0 Н !			- Л q_2					

q_1 – машина ищет правый конец числа;

q_2 – пропускает знак «+», при достижении конца последовательности – останов;

q_3 – знак «+» заменяет на «-».



Пример

Дана машина Тьюринга с внешним алфавитом $A = \{a_0, 1, * \}$, алфавитом внутренних состояний $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, и следующей функциональной схемой:

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1 \Pi$	$q_1 a_0 \text{Л}$
1	$q_2 a_0 \text{Л}$	$q_2 1 \text{Л}$	$q_3 1 \Pi$
*	$q_0 a_0 \text{С}$	$q_2 * \text{Л}$	$q_3 * \Pi$

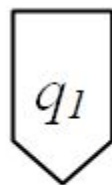
Применить машину Тьюринга к слову $\alpha = 11^*1$, начиная со стандартного начального положения



Решение

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1 \Pi$	$q_1 a_0 \text{Л}$
1	$q_2 a_0 \text{Л}$	$q_2 1 \text{Л}$	$q_3 1 \Pi$
*	$q_0 a_0 \text{С}$	$q_2^* \text{Л}$	$q_3^* \Pi$

1)



a_0	1	1	*	1	a_0
-------	---	---	---	---	-------

$$q_1 1 \rightarrow q_2 a_0 \text{Л}$$



Решение

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1 \Pi$	$q_1 a_0 \text{Л}$
1	$q_2 a_0 \text{Л}$	$q_2 1 \text{Л}$	$q_3 1 \Pi$
*	$q_0 a_0 \text{С}$	$q_2^* \text{Л}$	$q_3^* \Pi$

1)



a_0	1	1	*	1	a_0
-------	---	---	---	---	-------

$$q_1 1 \rightarrow q_2 a_0 \text{Л}$$

1) Заменяем содержимое обозреваемой ячейки 1 на a_0

2)

a_0	1	1	*	a_0	a_0
-------	---	---	---	-------	-------



Решение

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1 \Pi$	$q_1 a_0 \text{Л}$
1	$q_2 a_0 \text{Л}$	$q_2 1 \text{Л}$	$q_3 1 \Pi$
*	$q_0 a_0 \text{С}$	$q_2^* \text{Л}$	$q_3^* \Pi$

1)



a_0	1	1	*	1	a_0
-------	---	---	---	---	-------

$$q_1 1 \rightarrow q_2 a_0 \text{Л}$$

2) Машина переходит в новое состояние q_2

2)



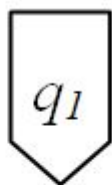
a_0	1	1	*	a_0	a_0
-------	---	---	---	-------	-------



Решение

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1\Pi$	$q_1 a_0 \text{Л}$
1	$q_2 a_0 \text{Л}$	$q_2 1 \text{Л}$	$q_3 1\Pi$
*	$q_0 a_0 \text{С}$	$q_2^* \text{Л}$	$q_3^* \Pi$

1)

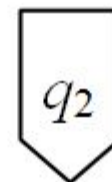


a_0	1	1	*	1	a_0
-------	---	---	---	---	-------

$$q_1 1 \rightarrow q_2 a_0 \text{Л}$$

3) Каретка перемещается влево

2)



a_0	1	1	*	a_0	a_0
-------	---	---	---	-------	-------

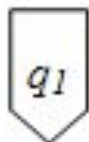


Решение

Полное подробное решение

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1 \Pi$	$q_1 a_0 \text{Л}$
1	$q_2 a_0 \text{Л}$	$q_2 1 \text{Л}$	$q_3 1 \Pi$
*	$q_0 a_0 \text{С}$	$q_2^* \text{Л}$	$q_3^* \Pi$

1)



a_0	1	1	*	1	a_0
-------	---	---	---	---	-------

$$q_1 1 \rightarrow q_2 a_0 \text{Л}$$

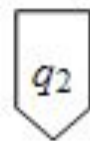
2)



a_0	1	1	*	a_0	a_0
-------	---	---	---	-------	-------

$$q_2 * \rightarrow q_2^* \text{Л}$$

3)



a_0	1	1	*	a_0	a_0
-------	---	---	---	-------	-------

$$q_2 1 \rightarrow q_2 1 \text{Л}$$

4)



a_0	1	1	*	a_0	a_0
-------	---	---	---	-------	-------

$$q_2 1 \rightarrow q_2 1 \text{Л}$$

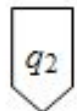


Решение

Полное подробное решение

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1 \Pi$	$q_1 a_0 \Pi$
1	$q_2 a_0 \Pi$	$q_2 1 \Pi$	$q_3 1 \Pi$
*	$q_0 a_0 \Sigma$	$q_2^* \Pi$	$q_3^* \Pi$

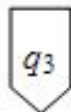
5)



a_0	1	1	*	a_0	a_0
-------	---	---	---	-------	-------

$q_2 a_0 \rightarrow q_3 1 \Pi$

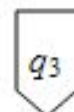
6)



a_0	1	1	1	*	a_0	a_0
-------	---	---	---	---	-------	-------

$q_3 1 \rightarrow q_3 1 \Pi$

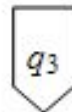
7)



a_0	1	1	1	*	a_0	a_0
-------	---	---	---	---	-------	-------

$q_3 1 \rightarrow q_3 1 \Pi$

8)



a_0	1	1	1	*	a_0	a_0
-------	---	---	---	---	-------	-------

$q_3^* \rightarrow q_3^* \Pi$



Решение

Полное подробное решение

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1\Pi$	$q_1 a_0 \text{Л}$
1	$q_2 a_0 \text{Л}$	$q_2 1 \text{Л}$	$q_3 1\Pi$
*	$q_0 a_0 \text{С}$	$q_2^* \text{Л}$	$q_3^* \Pi$

9)

q_3

a_0	1	1	1	*	a_0	a_0
-------	---	---	---	---	-------	-------

$$q_3 a_0 \rightarrow q_1 a_0 \text{Л}$$

10)

q_1

a_0	1	1	1	*	a_0	a_0
-------	---	---	---	---	-------	-------

$$q_1 * \rightarrow q_0 a_0 \text{С}$$

11)

q_0

a_0	1	1	1	a_0	a_0	a_0
-------	---	---	---	-------	-------	-------

$$\underline{\beta = 111}$$



Решение

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1\Pi$	$q_1 a_0 \text{Л}$
1	$q_2 a_0 \text{Л}$	$q_2 1 \text{Л}$	$q_3 1\Pi$
*	$q_0 a_0 \text{С}$	$q_2^* \text{Л}$	$q_3^* \Pi$

Решение, записанное с помощью конфигураций
(в строчку)

$$\begin{aligned}
 &a_0 1 1 * q_1 1 a_0 \Rightarrow a_0 1 1 q_2 * a_0 \Rightarrow a_0 1 q_2 1 * a_0 \Rightarrow a_0 q_2 1 1 * a_0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow a_0 q_2 a_0 1 1 * a_0 \Rightarrow a_0 1 q_3 1 1 * a_0 \Rightarrow a_0 1 1 q_3 1 * a_0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow a_0 1 1 1 q_3 * a_0 \Rightarrow a_0 1 1 1 * q_3 a_0 \Rightarrow a_0 1 1 1 q_1 * a_0 \Rightarrow a_0 1 1 1 q_0 a_0
 \end{aligned}$$


$$\alpha = 1^*11$$

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1\Pi$	$q_1 a_0 \Pi$
1	$q_2 a_0 \Pi$	$q_2 1 \Pi$	$q_3 1 \Pi$
*	$q_0 a_0 \text{C}$	$q_2^* \Pi$	$q_3^* \Pi$

Ответ: $\beta = 111$