Логарифмические уравнения с параметром.

Уравнение $\log_a f(x) = \log_b g(x)$, где $a>0$ $(a \neq 1)$, $b>0$ $(b \neq 1)$ *будем называть элементарным логарифмическим уравнением.*

Областью определения его служит решение системы

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

При $a = b$ *мы получим уравнение* $f(x) = g(x)$, *равносильное исходному.*

При $a = b$ мы получим уравнение f(x) = g(x), равносильное исходному.

При $a \neq b$ решение уравнения сводится к решению уравнения

$$\log_a f(x) = \frac{1}{\log_a b} \log_a g(x)$$

Что равносильно

$$\left[f(x)\right]^{\log_a b} = g(x)$$

При решении логарифмических уравнений с параметрами необходимо придерживаться следующей схемы:

1. Найти область допустимых значений.
2. Решить уравнение (чаще всего выразить х через а).
3. Сделать перебор параметра a с учетом ОДЗ.
4. Проверить, удовлетворяют ли найденные корни уравнения условиям ОДЗ.
5. Записать ответ.

Типы логарифмических уравнений с параметром:

1. Уравнения, содержащие параметры в логарифмируемом выражении.
2. Уравнения, содержащие параметры в основании.
3. Уравнения, содержащие параметры и в основании, и в логарифмируемом выражении.

$$\log_5(x-2)+\log_5(x^3-a)+\log_5(x-2)^{-1}=2$$

1. ОДЗ: $\begin{cases} x-2>0 \\ x^3-a>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x>\sqrt[3]{a} \end{cases}$

2\.

$$\log_5(x-2)(x^3-a)(x-2)^{-1}=2$$

$$x^3-a=25$$

$$x=\sqrt[3]{25+a}$$

3\.

$$\sqrt[3]{25+a}>2$$

$$25+a>8$$

$$a>-17$$

$$a\in(-17,+\infty),\ x=\sqrt[3]{25+a}$$

Ответ: решений нет.

$$a\in(-\infty,-17]$$

$$\log_a(x+5)+\log_a x+\log_a 0{,}02=0$$

1. ОДЗ. *a>0 (a≠ 1),*

$$\begin{cases} x+5>0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-5 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow x \in (0,+\infty)$$

2. $\log_a 0{,}02(x+5)x=0$

$$0{,}02x(x+5)=1$$

$$x^2+5x-50=0$$

$$x_1=-10$$

$$x_2=5$$

3. Корень уравнения $x_1 = -10$ не удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: $a>0,\ a \neq 1,\ x=5$

при $a<0,\ a = 1$, *решений нет*.

$$8\log^2_{a^2}(x-a)-6\log_{a^2}(x-a)+1=0$$

1. ОДЗ.

$$x>a$$

$$\begin{cases} a^2>0 \\ a^2\neq 1 \end{cases} \Rightarrow a\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$$

2. Пусть $\log_{a^2}(x-a)=t$, тогда наше уравнение сведется к квадратному:

$$8t^2-6t+1=0$$

$$t_1=\frac{1}{2}$$

$$t_2=\frac{1}{4}$$

$$\log_{a^2}(x-a)=\frac{1}{2}$$

$$x-a=|a|$$

$$\log_{a^2}(x-a)=\frac{1}{4}$$

$$x-a=|a|^{\frac{1}{2}}$$

Если $a>0, a\neq 1$, то $x_1=2a, x_2=a+\sqrt{a}$

Если $a<0, a\neq -1$, то $x_1=0, x_2=a+\sqrt{-a}$

Ответ: Если $a>0, a\neq 1$, то $x_1=2a, x_2=a+\sqrt{a}$

Если $a<0, a\neq -1$, то $x_1=0, x_2=a+\sqrt{-a}$