


Логарифмические уравнения с параметром.

Уравнение $\log_a f(x) = \log_b g(x)$, где $a > 0$ ($a \neq 1$), $b > 0$ ($b \neq 1$) будем называть элементарным логарифмическим уравнением.

Областью определения его служит решение системы

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

При $a = b$ мы получим уравнение $f(x) = g(x)$, равносильное исходному.



При $a = b$ мы получим уравнение $f(x) = g(x)$, равносильное исходному.

При $a \neq b$ решение уравнения сводится к решению уравнения

$$\log_a f(x) = \frac{1}{\log_a b} \log_a g(x)$$

Что равносильно

$$[f(x)]^{\log_a b} = g(x)$$



При решении логарифмических уравнений с параметрами необходимо придерживаться следующей схемы:

- 1. Найти область допустимых значений.*
 - 2. Решить уравнение (чаще всего выразить x через a).*
 - 3. Сделать перебор параметра a с учетом ОДЗ.*
 - 4. Проверить, удовлетворяют ли найденные корни уравнения условиям ОДЗ.*
 - 5. Записать ответ.*
-



Типы логарифмических уравнений с параметром:

1. Уравнения, содержащие параметры в логарифмируемом выражении.
2. Уравнения, содержащие параметры в основании.
3. Уравнения, содержащие параметры и в основании, и в логарифмируемом выражении.



$$\log_5(x-2) + \log_5(x^3 - a) + \log_5(x-2)^{-1} = 2$$

1. ОДЗ:
$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x^3 - a > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > \sqrt[3]{a} \end{cases}$$

2.
$$\log_5(x-2)(x^3 - a)(x-2)^{-1} = 2$$

$$x^3 - a = 25$$

$$x = \sqrt[3]{25 + a}$$

3.
$$\sqrt[3]{25 + a} > 2$$

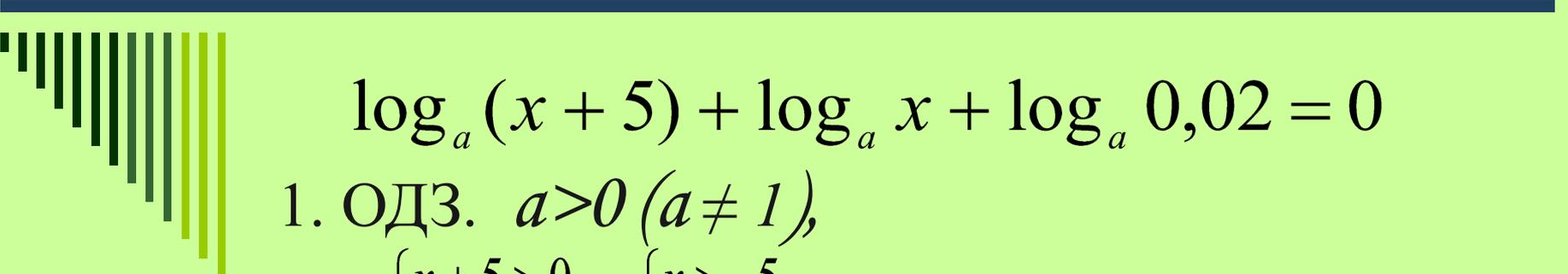
$$25 + a > 8$$

$$a > -17$$

$$a \in (-17, +\infty), x = \sqrt[3]{25 + a}$$

~~Ответ: решений нет.~~

$$a \in (-\infty, -17]$$


$$\log_a (x + 5) + \log_a x + \log_a 0,02 = 0$$

1. ОДЗ. $a > 0$ ($a \neq 1$),

$$\begin{cases} x + 5 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -5 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (0, +\infty)$$

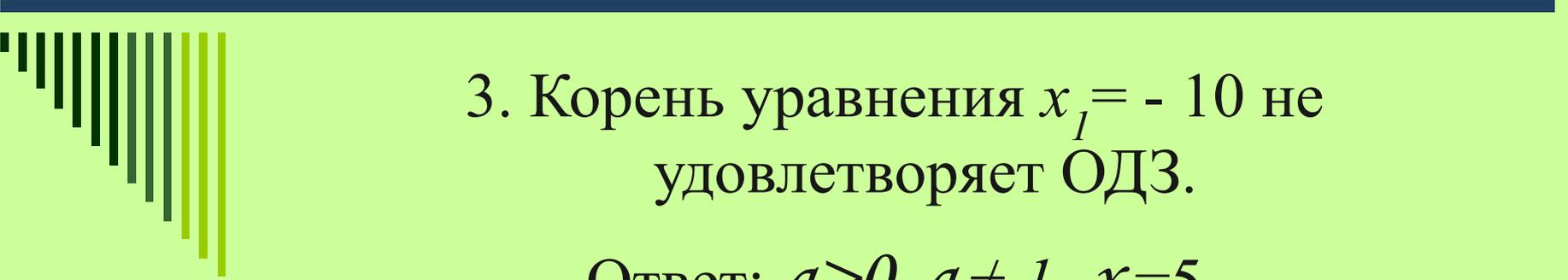
2. $\log_a 0,02(x + 5)x = 0$

$$0,02x(x + 5) = 1$$

$$x^2 + 5x - 50 = 0$$

$$x_1 = -10$$

$$x_2 = 5$$



3. Корень уравнения $x_1 = -10$ не удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: $a > 0, a \neq 1, x = 5$

при $a < 0, a = 1$, решений нет.

$$8\log_{a^2}^2(x-a) - 6\log_{a^2}(x-a) + 1 = 0$$

1. ОДЗ. $x > a$

$$\begin{cases} a^2 > 0 \\ a^2 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow a \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$$

2. Пусть $\log_{a^2}(x-a) = t$, тогда наше уравнение сведется к квадратному:

$$8t^2 - 6t + 1 = 0$$

$$t_1 = \frac{1}{2}$$

$$t_2 = \frac{1}{4}$$


$$\log_{a^2}(x - a) = \frac{1}{2}$$

$$x - a = |a|$$

$$\log_{a^2}(x - a) = \frac{1}{4}$$

$$x - a = |a|^{\frac{1}{2}}$$

Если $a > 0, a \neq 1$, то $x_1 = 2a, x_2 = a + \sqrt{a}$

Если $a < 0, a \neq -1$, то $x_1 = 0, x_2 = a + \sqrt{-a}$

Ответ: Если $a > 0, a \neq 1$, то $x_1 = 2a, x_2 = a + \sqrt{a}$

Если $a < 0, a \neq -1$, то $x_1 = 0, x_2 = a + \sqrt{-a}$