Решение тригонометрических уравнений способом разложения на множители

Метод разложения на множители.

- Под разложением на множители понимается представление данного выражения в виде произведения нескольких множителей.
- Если в одной части уравнения стоит несколько множителей, а в другой – 0, то каждый множитель приравнивается к нулю.
- Таким образом, данный множитель можно представить в виде совокупности более простых уравнений.

1. Начнём с уравнения

$$\sin 2x = \cos x.$$

Применяем формулу синуса двойного угла:

$$2\sin x \cos x = \cos x$$

Ни в коем случае не сокращайте на косинус! Ведь может случиться, что cos *x* обратится в нуль, и мы потеряем целую серию решений. Переносим всё в одну часть, и общий множитель – за скобки:

$$2\sin x \cos x - \cos x = 0$$
$$\cos x\,(2\sin x - 1) = 0.$$

Полученное уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $\cos x = 0$ и $2\sin x - 1 = 0.$

Решаем каждое из них и берём объединение множества решений.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Тригонометрические уравнения.

Пример.

Решить уравнение: $\cos^2(x) + \sin(x)\cos(x) = 0$

Решение:

Вынесем общий множитель: $\cos(x)(\cos(x) + \sin(x)) = 0$

Тогда нам надо решить два уравнеия:
cos(x)=0 и cos(x)+sin(x)=0

cos(x)=0 при x= п/2 + пk;
Рассмотрим уравнение cos(x)+sin(x)=0 Разделим наше уравнение на cos(x):
1+tg(x)=0 => tg(x)=-1 => x=arctg(-1) +пk= -п/4+пk

Ответ: x= п/2 + пk и x= -п/4+пk

Решение тригонометрических уравнений методом разложения на множители

Пример 2: Решить уравнение: $\cos 2x + \sin x \cdot \cos x = 1.$

Решение. $\cos 2x + \sin x \cdot \cos x - \sin 2x - \cos 2x = 0,$

$\sin x \cdot \cos x - \sin 2x = 0,$

$\sin x \cdot (\cos x - \sin x) = 0,$

1) $\sin x = 0,$

$x_1 = \pi k, k \in N.$

2) $\cos x - \sin x = 0,$

$tg\, x = 1,$

$x_2 = \frac{x}{4} + \pi n, n \in N.$

Ответ: $x_1 = \pi k, k \in N; x_2 = \frac{x}{4} + \pi n, n \in N.$

Метод разложения на множители

Пример. ***Решите уравнение***

$$3\sin^2 x + \sin 2x = 0.$$

Решение. $3\sin^2 x + \sin 2x = 0,$

$$3\sin^2 x + 2\sin x\cos x = 0,$$

$$\sin x\,(3\sin x + 2\cos x) = 0,$$

$\sin x = 0$ *или* $3\sin x + 2\cos x = 0 \,\big|\, : \cos x \neq 0,$

$x = \pi k,$ $3\,\mathrm{tg}\,x + 2 = 0,$

$k \in \mathbb{Z};$ $\mathrm{tg}\,x = -\frac{2}{3},$

$$x = -\,\mathrm{arctg}\frac{2}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pi k,\ k \in \mathbb{Z};\ -\,\mathrm{arctg}\frac{2}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

4. *Решение тригонометрических уравнений разложением на множители.*

$$\sin 4x = 3\cos 2x$$

$$\sin 4x - 3\cos 2x = 0$$

$$2\sin 2x\cos 2x - 3\cos 2x = 0$$

$$\cos 2x(2\sin 2x - 3) = 0$$

$\cos 2x = 0$ *или* $2\sin 2x - 3 = 0$

$2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi\kappa, \kappa \in Z$

$x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi\kappa}{2}, \kappa \in Z$

$\sin 2x = 1{,}5$ – не имеет смысла,

потому что $-1 \le \sin 2x \le 1$ при $x \in \Re$,

корней нет.

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi\kappa}{2}, \kappa \in Z$.

Домашнее задание:

Решить уравнения:

$$\sin 2x - \sin x = 0$$

$$\sin x \cdot \cos x - \sin^2 x = 0,$$

$$2\sin 2x + \sin x = 0$$