

**РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ СПОСОБОМ РАЗЛОЖЕНИЯ НА
МНОЖИТЕЛИ**



Метод разложения на множители.

- Под разложением на множители понимается представление данного выражения в виде произведения нескольких множителей.
- Если в одной части уравнения стоит несколько множителей, а в другой - 0, то каждый множитель приравнивается к нулю.
- Таким образом, данный множитель можно представить в виде совокупности более простых уравнений.

1. Начнём с уравнения

$$\sin 2x = \cos x.$$

Применяем формулу синуса двойного угла:

$$2\sin x \cos x = \cos x$$

Ни в коем случае не сокращайте на косинус! Ведь может случиться, что $\cos x$ обратится в нуль, и мы потеряем целую серию решений. Переносим всё в одну часть, и общий множитель — за скобки:

$$\begin{aligned} 2\sin x \cos x - \cos x &= 0 \\ \cos x (2\sin x - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Полученное уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $\cos x = 0$ и $2\sin x - 1 = 0$.

Решаем каждое из них и берём объединение множества решений.

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Тригонометрические уравнения.

Пример.

Решить уравнение: $\cos^2(x) + \sin(x)\cos(x) = 0$

Решение:

Вынесем общий множитель: $\cos(x)(\cos(x) + \sin(x)) = 0$

Тогда нам надо решить два уравнения:

$\cos(x)=0$ и $\cos(x)+\sin(x)=0$

$\cos(x)=0$ при $x = \pi/2 + \pi k$;

Рассмотрим уравнение $\cos(x)+\sin(x)=0$ Разделим наше уравнение на $\cos(x)$:

$1+\operatorname{tg}(x)=0 \Rightarrow \operatorname{tg}(x)=-1 \Rightarrow x=\operatorname{arctg}(-1) + \pi k = -\pi/4 + \pi k$

Ответ: $x = \pi/2 + \pi k$ и $x = -\pi/4 + \pi k$

Решение тригонометрических уравнений методом разложения на множители

Пример 2: Решить уравнение: $\cos 2x + \sin x \cdot \cos x = 1$.

Решение. $\cos 2x + \sin x \cdot \cos x - \sin 2x - \cos 2x = 0$,

$$\sin x \cdot \cos x - \sin 2x = 0,$$

$$\sin x \cdot (\cos x - \sin x) = 0,$$

$$1) \sin x = 0,$$

$$x_1 = \pi k, k \in N.$$

$$2) \cos x - \sin x = 0,$$

$$\operatorname{tg} x = 1,$$

$$x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in N.$$

Ответ: $x_1 = \pi k, k \in N; x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in N.$

Метод разложения на множители

Пример. Решите уравнение

$$3 \sin^2 x + \sin 2x = 0.$$

Решение. $3 \sin^2 x + \sin 2x = 0,$

$$3 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = 0,$$

$$\sin x (3 \sin x + 2 \cos x) = 0,$$

$$\sin x = 0 \quad \text{или} \quad 3 \sin x + 2 \cos x = 0 \quad | : \cos x \neq 0,$$

$$x = \pi k, \quad 3 \operatorname{tg} x + 2 = 0,$$

$$k \in \mathbb{Z}; \quad \operatorname{tg} x = -\frac{2}{3},$$

$$x = -\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pi k, k \in \mathbb{Z}; -\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

4. Решение тригонометрических уравнений разложением на множители.

$$\sin 4x = 3 \cos 2x$$

$$\sin 4x - 3 \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 2x \cos 2x - 3 \cos 2x = 0$$

$$\cos 2x(2 \sin 2x - 3) = 0$$

$$\cos 2x = 0 \quad \text{или} \quad 2 \sin 2x - 3 = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$\sin 2x = 1,5$ – не имеет смысла,

потому что $-1 \leq \sin 2x \leq 1$ при $x \in \mathbb{R}$,

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

корней нет.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Домашнее задание:

Решить уравнения:

$$\sin 2x - \sin x = 0$$

$$\sin x \cdot \cos x - \sin^2 x = 0,$$

$$2\sin 2x + \sin x = 0$$

