Раздел: Дифференциальное исчисление для функции нескольких переменных

1. Метрические пространства

1.1 Понятие метрического пространства

Определение1. Пусть M - некоторое множество.

Расстоянием в M называется отображение

$d: M \times M \to \mathbb{R}$, обладающее свойствами:

1. $(\forall \mathrm{x}, \mathrm{y} \in M)\left(d(x,y) \geq 0\right)$,
2. $\left(d(x,y)=0\right) \Leftrightarrow x=y$,
3. $(\forall x, y \in M)\left(d(x,y)=d(y,x)\right)$,
4. $(\forall x, y, z \in M)(d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z))$

Определение 2. Пара (M, d) называется метрическим пространством.

Каждое метрическое пространство естественным образом порождает ряд других метрических пространств. Пусть P - подмножество множества M, на котором введена метрика d_M, и пусть в P определена метрика равенством $d_P(x, y) = d_M(x, y)$, где $x, y \in P$. Тогда P тоже является метрическим пространством. Оно называется подпространством пространства M. При э том говорят, что метрика в P индуцируется метрикой, заданной в M, или что метрика в P заимствована из M.

Пример 1. К - произвольное множество.

Положим $d(x,y)=\begin{cases} 0, \text{ если } x = y, \\ 1, \text{ если } x \neq y. \end{cases}$

Проверим выполнимость аксиом расстояния:

1. $(\forall x, y \in K)(d(x,y) \geq 0)$,
2. $(d(x,y) = 0) \Leftrightarrow x = y$,
3. $(\forall x, y \in M)(d(x,y) = d(y,x))$

поясните, почему выполнимы эти аксиомы расстояния?

4. $(\forall x, y, z \in M)(d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z))$.

Действительно

а) $x = y = z.\ d(x,z) = d(x,y) = d(y,z) = 0 \Rightarrow 0 \le 0 + 0$

б) $\mathrm{x} \ne \mathrm{y} \ne \mathrm{z}.\ d(x,z) = d(x,y) = d(y,z) = 1 \Rightarrow 1 \le 1 + 1$

в) $x = y \ne z.\ d(x,z) = 1,\ d(x,y) = 0,\ d(y,z) = 1 \Rightarrow 1 \le 0 + 1$

г) $x \ne y = z.\ d(x,z) = 1,\ d(x,y) = 1,\ d(y,z) = 0 \Rightarrow 1 \le 1 + 0$

д) $x = z \ne y.\ d(x,z) = 0,\ d(x,y) = 1,\ d(y,z) = 1 \Rightarrow 0 \le 1 + 1$

Итак, (K, d) - метрическое пространство

Пример 2.

$\mathbb{R}$ - множество действительных чисел, $d(x,y)=|x-y|$.

Докажем, $(\mathbb{R}, d)$ - метрическое пространство.

1) $(\forall x,y\in\mathbb{R})\big(d(x,y)=|x-y|\geq 0\big)$;

2) $d(x,y)=|x-y|=0 \Leftrightarrow x=y$;

3) $(\forall x,y\in\mathbb{R})\big(d(x,y)=|x-y|=|y-x|=d(y,x)\big)$;

4) $(\forall x,y,z\in\mathbb{R})\big(|x-z|=|x-y+y-z|\leq|x-y|+|y-z|\big)$

Итак, $(\mathbb{R}, d)$ - метрическое пространство

Пример 3. Множество функций, непрерывных на отрезке $[a;b]$ с расстоянием $d\left(x(t),y(t)\right)=\max\limits_{a\le t\le b}\left|x(t)-y(t)\right|$ образуют метрическое пространство, обозначаемое $C_{[a;b]}$.

Покажем выполнимость всех аксиом расстояния:

1) $\left(\forall x,y\in C_{[a;b]}\right)\left(d(x,z)=\max\limits_{a\le t\le b}\left|x(t)-y(t)\right|\ge 0\right)$

2) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow \max\limits_{a\le t\le b}\left|x(t)-y(t)\right|=0 \Leftrightarrow \left|x(t)-y(t)\right|=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(t)=y(t)$

3) $\left(\forall x, y \in C_{[a;b]}\right)\left(d(x,y) = \max\limits_{a\le t\le b}\left|x(t)-y(t)\right| = \max\limits_{a\le t\le b}\left|y(t)-x(t)\right| =\right.$

$\left. = d(y,x)\right)$

4) $(\forall t \in [a;b])(\ \left|x(t)-z(t)\right| = \left|x(t)-y(t)+y(t)-z(t)\right| \le$

$\le \left|x(t)-y(t)\right| + \left|y(t)-z(t)\right|$

Поскольку неравенство

$\left(\left|x(t)-z(t)\right| \le \left|x(t)-y(t)\right| + \left|y(t)-z(t)\right|\right)$ выполняется

при любом $t \in [a;b]$, то оно выполняется и в той точке

$t_0 \in [a;b]$, в которой $\left|x(t)-z(t)\right|$ принимает наибольшее

значение, т.е.

$$\max_{a\le t\le b}\left|x(t)-z(t)\right| \le \max_{a\le t\le b}\left|x(t)-y(t)\right| + \max_{a\le t\le b}\left|y(t)-z(t)\right|$$

Итак, $C_{[a;b]}$ - метрическое пространство.

1.2. Окрестности точки в метрическом пространстве

Определение 1. Множество точек x метрического пространства M таких, что $d(x,a) < r$, где a - фиксированная точка множества M, r - фиксированное действительное число, называется открытым шаром радиуса r с центром в т. a и обозначается $U(a,r)$

Определение 2. Множество точек $x \in M$, удовлетворяющих неравенству $d(x,a) \leq r$ называется замкнутым шаром и обозначается $\overline{U}(a,r)$

Определение 3. Окрестностью точки $a \in M$ называется любой открытый шар с центром в точке a.

$$U(a,\varepsilon) \; - \; \varepsilon\text{–окрестность точки } a.$$

Определение 4.

Множество F из метрического пространства M называется ограниченным, если в M существует открытый шар, содержащий это множество.

Нетрудно проверить, что данное определение равносильно следующему:
множество F из метрического пространства M называется ограниченным, если существует такое положительное число K, что $d(x, y) \leq K$ для всех $x, y \in F$.

Примеры:

1. $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ - ε-окрестность точки $a \in \mathbb{R}$.

2. $\{x, y \mid x^2 + y^2 < r^2\} = U(0, r)$.

1.3. Внутренние и предельные точки. Сходящиеся последовательности в метрическом пространстве

Определение 1. Точка $a \in A$ называется внутренней точкой множества A, если существует окрестность $U(a)$, содержащаяся в множестве A.

Пример. $A = [a;b)$.

Любая точка $a < x < b$ является внутренней точкой множества A. Точки a,b не являются внутренними точками множества A.

Определение 2. Точка $a \in M$ называется предельной точкой множества $A \subset M$, если в любой проколотой окрестности $U^{*}(a)$ содержится хотя бы одна точка из множества A.

Примеры: Пусть $M = (a;b)$

1) Любая точка $x \in (a;b)$ является его предельной точкой.

2) Точки a, b - тоже предельные точки $(a;b)$, но $a, b \notin (a,b)$

Определение 3. Последовательность (x_n) точек метрического пространства M называется сходящейся в пространстве M, если существует точка $a \in M$, обладающая свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого натурального $n > \delta$ выполняется неравенство $d_M(x_n, a) < \varepsilon$.

В этом случае говорят, что (x_n) сходится к a и пишут $(x_n) \to a$ или $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

Иначе говоря, ($x_n \to a$), если в любой окрестности $\mathrm{U}(a,\varepsilon)$ содержатся все точки последовательности с номерами $n > \delta$.

Замечание. Сходимость последовательности (x_n) зависит не только от самой последовательности, но и от прстранства, в котором она рассматривается.

Например, $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ сходится в $\mathbb{R}$, но не является сходящимся в $\mathbb{R}^+$.

Теорема 1. Если последовательность (x_n) имеет предел в пространстве M, то он единственный.

Доказательство Т.1

Допустим, что (x_n) имеет в M два предела a и b

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_1 > 0)$$

$$(\forall n \in \mathbb{N})\left(n > \delta_1 \Rightarrow d_M(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = b \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_2 > 0)$$

$$(\forall n \in \mathbb{N})\left(n > \delta_2 \Rightarrow d_M(x_n, b) < \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

что ипользовано?

При каких n будут выполняться оба неравенства

$d_M(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ и $d_M(x_n, b) < \frac{\varepsilon}{2}$?

Выберем $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда при $n > \delta$

$$d_M(a,b) \le d_M(a,x_n) + d_M(x_n,b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

что отсюда следует?

Итак, $a = b$.

Какой метод использован в доказательстве Т.1?

Теорема 2. Для того, чтобы точка a была предельной точкой множества A, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность попарно различных точек (x_n) из A, сходящаяся к a.

Доказать самостоятельно.

1.4. Открытые и замкнутые множества

Определение1. Множество, состоящее только из внутренних точек, называется открытым.

1) (a,b), $\mathbb{R}$, $\varnothing$ - открытые множества
2) $[a,b)$ не является открытым

почему?

Определение 2. Множество, содержащее все свои предельные точки, называется замкнутым.

Примеры:

1) $[a;b]$, $\mathbb{R}$ - замкнутые множества,

2) $[a;b)$ не является замкнутым.

Определение 3. M - метрическое пространство, $A \subset M$. Множество $M \setminus A$ называется дополнением множества A до метрического пространства M и обозначается $C_M A$.

Пример. $\mathbb{R}$ - метрическое пространство, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = J = C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ множество иррациональных чисел.

Теорема 3.

Если $A \subset M$ замкнуто, то $C_M A$ - открыто.

Если $A \subset M$ открыто, то $C_M A$ - замкнуто.

Доказательство

1. Пусть $A \subset M$ замкнуто $\Rightarrow A$ содержит все свои предельные точки.	на основании чего сделано такое утверждение?
Рассмотрим произволньую точку $x \in C_M A,$ она не является предельной для множества $C_M A.$	почему?

Так как A содержит все свои предельные точки. Поскольку x не является предельной для A, то существует $U(x)$ - окрестность точки x, которая не содержит ни одной из множества A, т.е. эта окрестность состоит только из точек множества $C_M A \Rightarrow C_M A$ открыто.

почему?

2. Пусть $A \subset M$ открыто

Докажите самостоятельно, что $C_M A$ замкнуто.

Теорема 4. Объединение любого конечного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество

Доказательство

Пусть $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, где A_i замкнуты.

Рассмотрим произвольную предельную точку a множества A. Это значит, в любой проколотой окрестности $U^*(a)$ содержится хотя бы одна точка $x \in A$.

Так как $A=\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ и $x \in A$, то x принадлежит хотя бы одному из A_i, ?

следовательно a - предельная точка множества A_i ?

Поскольку A_i замкнуто, то $a \in A_i$, значит $a \in A$. Отсюда следует, что A - замкнуто.

Теорема 5. Пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто.

Доказательство

Пусть $E = \bigcap_i A_i$ и x предельная точка множества E.

Это значит, что в любой проколотой окрестности точки x содержится хотя бы одна точка из множества A_i. | почему?

Значит x предельная точка для каждого A_i

и в силу замкнутости множеств A_i

x принадлежит каждому A_i, | ?

значит x принадлежит $E = \bigcap_i A_i$

Следовательно $E = \bigcap_i A_i$ замкнуто. | ?

Теорема 6. Объединение любого числа открытых множеств открыто.

Доказательство

Пусть B_i - открытые множества, $B = \bigcup_i B_i$.

Тогда $C_M B = C_M \bigcup_i B_i = \bigcap_i C_M B_i$. Так как B_i открытые, то $C_M B_i$ замкнуты. Тогда $\bigcap_i \mathrm{C_M} B_i$ замкнуто. | по Т. ?

Следовательно $C_M B$ замкнуто. Но тогда $B = C_M (C_M B)$ - открыто.

Теорема 7. Пересечение любого конечного числа открытых множеств есть множество открытое.

Доказать самостоятельно

1.5. Компактные метрические пространства, их свойства

Определение1. Метрическое пространство M называется компактным(или, короче, компактом) если всякая бесконечная последовательность его элементов содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке этого пространства.

Теорема 8. Всякое компактное подпространство A пространства M замкнуто в M.

Доказательство

Допустим, что A не замкнуто. Тогда в A существует сходящаяся в M последовательность (x_n), предел которой не принадлежит A. Из этой последовательности нельзя извлечь никакой подпоследовательности, сходящейся к некоторому элементу $a \in A$(т.к. иначе эта последовательность имела бы в пространстве M два предела a и b, что невозможно). Но в таком случае A не является компактом, что противоречит условию.

Теорема 9. Всякий компакт M ограничен.

Доказательство

Пусть M не ограничен. Рассмотрим произвольную точку $c \in M$. Ввиду неограниченности M для любого $n \in \mathbb{N}$ найдётся $x_n \in \mathbb{N}$ такое, что $d(x_n, c) > n$. Любая подпоследовательность (x_{n_k}) последовательности (x_n) не ограничена, а потому не может быть сходящейся. Значит из (x_n) нельзя извлечь сходящейся подпоследовательности, что противоречти условию: M - компакт.

Теорема 10. Всякая замкнутая часть A компактного пространства M компактна.

Доказать самостоятельно.

1.6. Предел, непрерывность отображений метрических пространств

<u>Определение1.</u> Пусть X, Y - метрические пространства, $\mathrm{E} \subset X$, $f : E \to Y$, p - предельная точка множества E. говорят, что $\lim\limits_{x \to p} f(x) = q$, если существует такое $q \in Y$, удовлетворяющее свойству: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in E)$ $\left(0 < d_X(x, p) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), q) < \varepsilon\right)$

Теорема 11. Пусть X, Y - метрические пространства, $\mathrm{E} \subset X$, p - предельная точка множества E. $\lim\limits_{x \to p} f(x) = q$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности (x_n) точек пространства X, отличных от p, сходящейся к p, соответствующая последовательность значений функции $\left(f(x_n)\right)$ сходится к q.

Доказательство

1. Пусть $\lim\limits_{x \to p} f(x) = q \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$

$(\forall x \in E)(0 < d_X(x, p) < \delta \;\Rightarrow d_Y(f(x), q) < \varepsilon)$ (*) $\Big|$?

Выберем произвольную последовательность (x_n) точек множества E, отличных от p, сходящуюся к p.

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = p \Leftrightarrow (\forall \delta > 0)(\exists \delta_1 > 0)$

$(\forall n \in \mathbb{N})(n > \delta_1 \Rightarrow d_X(x_n, p) < \delta)$ (**) $\Big|$?

Учитывая (**) и определение предела

функции (*)

получаем при $n > \delta$ $d_Y(f(x_n, q) < \varepsilon)$,

т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = q$?

Итак, из сходимости $(x_n) \to p$ вытекает

сходимость $f(x_n) \to q$

2. Пусть теперь

$$\left(\forall \underset{x_{n \neq p}}{(x_n)} \subset E\right)\left((x_n) \to p \Rightarrow (f(x_n)) \to q\right)$$

Предположим противное, т. е.

$\lim\limits_{x \to p} f(x) \neq q$ или $\overline{\lim\limits_{x \to p} f(x) = q}$.

Запишите отрицание $\overline{\lim\limits_{x \to p} f(x) = q}$.

$$\overline{\lim_{x\to p} f(x) = q} \Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in E)$$

$$\left(0 < d_X(x,p) < \delta \wedge d_Y(f(x),q) > \varepsilon\right) \quad (***)$$

Рассмотрим последовательность $(\delta_n) \to 0$

Для неё найдётся последовательность

$(x_n) \subset E$, такая, что $0 < d_X(x_n, p) < \delta$ и

$d_Y(f(x_n), q) > \varepsilon$ в силу (***).

Последнее противоречит тому, что

$(f(x_n)) \to q$ при $(x_n) \to p$.

Теорема 12. Если $f: E \to Y (E \subset X)$ имеет предел, то этот предел единственный.

Задание:

Доказать это утверждение самостоятельно.

Определение 2. Пусть X, Y - метрические пространства, $E \subset X$, p - предельная точка множества E и $f : E \to Y$. Функция f называется непрерывной в т. p, если выполнено условие:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in E)\left(d_X(x, p) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon\right)$$

Теорема 13. Функция $f : E \to Y$ непрерывна в точке p – предельной для E тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$.

Задание: Доказать это утверждение самостоятельно.

Теорема 14.

Образ компакта при непрерыном отображении компактен.

Доказательство.

Пусть M - компакт и $f: M \xrightarrow{на} T$ - непрерывное отображение. Возьмем в T произвольную последовательность (x'_n) и обозначим через x_n какой-либо прообраз точки $x'_n \in T$. Получим последовательность точек x_n из M. Так как M - компакт, то из этой последовательности можно ...?

Можно выделить подпоследовательность (x_{nk}), сходящуюся к некоторой точке $c \in M$. При отображении $f(x_{nk})$ перейдет в подпоследовательность (x'_{nk}) последовательности (x'_n). В силу непрерывности отображения f в точке c:

$$\lim_{k\to\infty} x'_{nk} = \lim_{k\to\infty} f(x_{nk}) = f\left(\lim_{k\to\infty} x_{nk}\right) = f(c) \in T.$$

Итак, каждая последовательность точек из T содержит подпоследовательность, сходящуюся в T. Что это означает?

Теорема 15. (Т. Вейерштрасса).

Числовая функция, определенная и непрерывная на некотором компакте, ограничена и принимает на нем свое наибольшее и наименьшее значения.

1.7. Действительная функция *n* действительных переменных

Рассмотрим множество $\mathbb{R}^n$, его элементами x являются упорядоченные n-ки действительных чисел $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Определим в $\mathbb{R}^n$ расстояние $d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2}$ (1). Докажем выполнимость всех аксиом расстоянтя. Выполнимость аксиом 1-3 очевидна.

Проверим выполнение аксиомы 4:

$\left(\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n\right)\left(d(x,z) = d(x,y) + d(y,z)\right)$, которая

записывается в виде:

$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - z_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k - z_k)^2}$ (2). Полагая $x_k - y_k = a_k$,

$y_k - z_k = b_k$, получаем $x_k - z_k = a_k + b_k$ и неравенство (2) примет вид

$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$ (3). Это неравенство вытекает из

неравенства Коши-Буняковского $\boxed{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2}$ (4)

Действительно, в силу неравенства (4) имеем

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2}+\sum_{k=1}^{n}b_k^2==\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}\right)^2.$$

Итак, справедливость (3) доказана, а следовательно, справедливость аксиомы 4.

<u>Определение 1.</u> Пара $(\mathbb{R}^n, d)$ называется n-мерным евклидовым пространством.

Теорема 16. Подпространство T n-мерного евклидового пространства $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда компактно, когда оно в $\mathbb{R}$ замкнуто и ограничено.

Определение 2.

Пусть $E \subseteq \mathbb{R}^n$, отображение $f : E \to \mathbb{R}$ называется действительной функцией n действительных переменных.

Эта функция каждой точке $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ставит в соответствие единственное действительное число y.
Записывают $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.
Если $a = (a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n)$, то $f(a) = f(a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n)$ - значение функции в точке $a = (a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n)$

Вспомните общее определение функции и скажите: когда считается заданной функция n переменных?

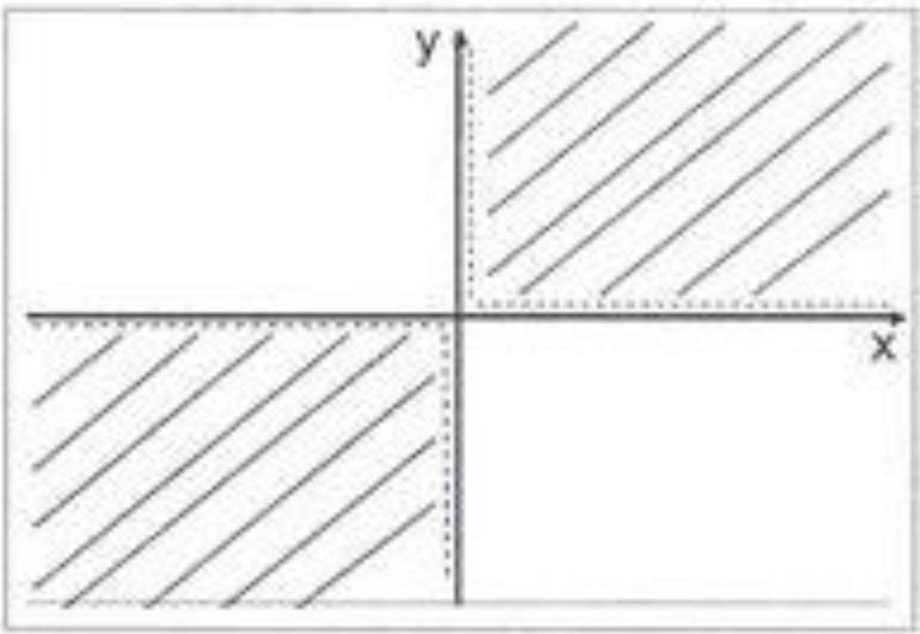
Функция n переменных считается заданной, если указанна область определения функции и закон соответствия, по которому каждому элементу $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из области определения ставится в соответствие единственное значение y.

В случае аналитического задания функции область определения может не указываться.

В этом случае можно ставить задачу отыскания естественной области определения функции $D(f)$, которая представляет собой множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, для которых выполнены все операции, указанные в задании функции f.

Пример 1. $f(x,y)=\ln(x,y)$

$$D(f)=\{(x,y)\,|\,xy>0\}=\{x,y\,|\,(x>0\wedge y>0)\vee(x<0\wedge y<0)\}$$



Определение 3. Графиком действительной функции n действительных переменных $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, определённой на множестве $E \subseteq \mathbb{R}^n$ называется множество

$$G_f = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1, x_2, ..., x_n \in E \wedge y = f(x_1, x_2, ..., x_n)) \right\}$$

Определение 4. Если f определена на $E \subseteq \mathbb{R}^2$, то каждая точка $x \in E$ определяется двумя координатами $x = (x_1, x_2)$. Такую функцию называют функцией двух переменных.
$y = f(x_1, x_2)$.
Для функции двух переменных $z = f(x, y)$, определённой на $E \subseteq \mathbb{R}^2$, график $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in E \wedge z = f(x, y)\}$

Пример 2. $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ $D(f)=\{(x,y)\,|\,4-x^2-y^2\geq 0\}=$

$=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 4\}$ – круг с центром $(0,0)$, радиусом $r=2$.

Графиком данной функции является

$G_f=\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D(f), z=f(x,y)\}$ –

верхняя полусфера.

Замечание. Значительно проще осуществляется плоское графическое изображение функции двух переменных.

Пусть $z = f(x, y)$ изображена некоторой поверхностью P. Различные точки этой поверхности находятся на различном расстоянии от плоскости XOY.

Естественно, изучая поверхность, выделить точки, находящиеся на одном расстоянии $z = h$ от плоскости XOY. Эти точки образуют линию пересечения поверхности P с плоскостью $z = h$.

Обозначим эту линию C', а её проекцию на плоскость XOY - C.

Уравнение C': $\begin{cases} z = f(x, y); \\ z = h. \end{cases}$; $C : h = f(x, y)$

Линию С называют линией уровня. Придавая h различные значения, построим плоскости, паралельные плоскости XOY, и различные сечения поверхности $z = f(x, y)$ плоскостями $z = h$. Спроектировав сечения на плоскость XOY получим сеть линий уровня поверхности P. Нетрудно увидеть, что если h образует арифметическую прогрессию, то сгущение линий уровня будет характеризовать крутизну подъёма поверхности P, а разрежение будет соответствовать пологим склонам.

Пример 3. $z=x^2+y^2$. Область определения $D=R^2$.

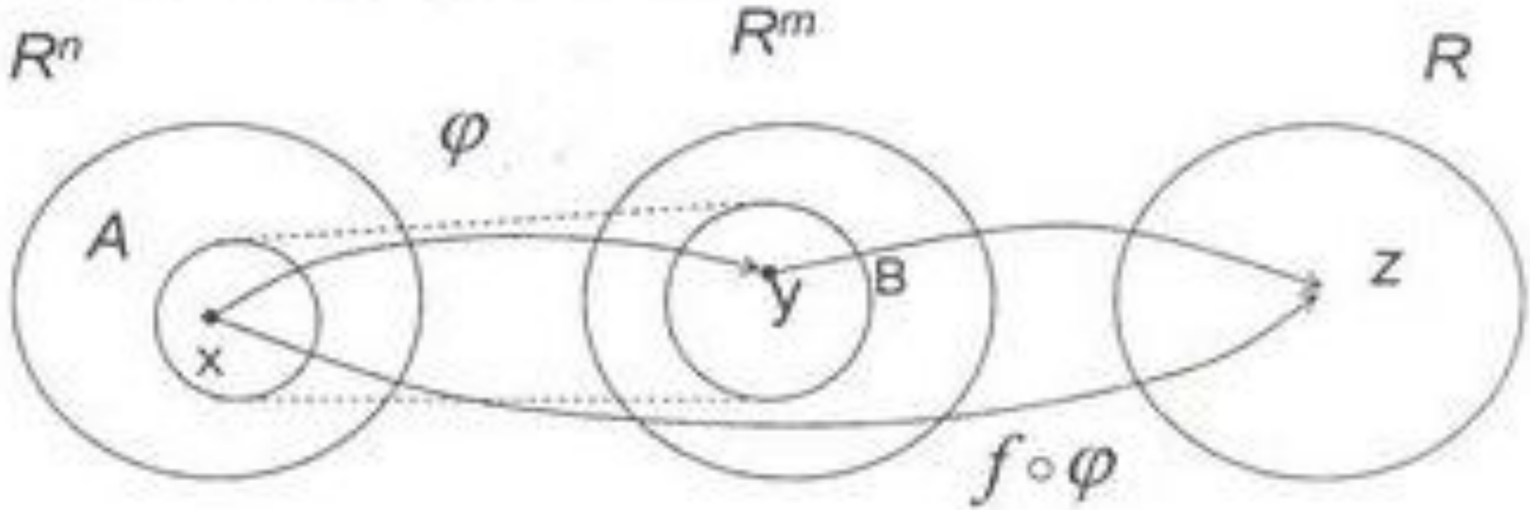
Положим $z=h$, получим $h=x^2+y^2$ $(h \geq 0)$.

Семейство линий уровня-семейство окружностей с центром $(0,0)$ и радиусом $r=\sqrt{h}$.

1.8. Сложная функция нескольких переменных

Определение 1. Пусть $E \subseteq R^n$. Отображение $f : E \to R^m$ называется векторнозначной функцией n переменных. Эта функция каждой точке $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$ ставит в соответствие единственную точку $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in R^m$. Каждая компонента $y_1, y_2, \ldots, y_m$ является функцией от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), i = \overline{1, m})$. Задание векторнозначной функции равносильно заданию m действительных функций n действительных переменных.

Определение 2. Пусть $\varphi : A \xrightarrow{на} B$, где $A \subseteq R^n$, $B \subseteq R^m$, $f : B \to R$. Тогда $f \circ \varphi$ – отображение множества $A \subseteq R^n$ в R.



Композиция отображений φ и f : $f \circ \varphi$ каждому элементу $x \in A (A \subseteq R^n)$ ставит в соответсвие единственный элемент $z \in R$, что записывают $z = f(\varphi(x))$ или $z = f(\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n))$.

Пример 1.

$u = \sin(x + 3y + z^2)$, $x = \sqrt{t_1}$, $y = tg(t_1 - t_2)$,

$z = e^{t_2}$. $u = \sin(\sqrt{t_1} + 3tg(t_1 - t_2) + e^{2t_2})$ - сложная функция двух переменных t_1 и t_2.

Пример 2.

$t=\cos\left(\sqrt{x^2-y^2}+3\ln(2x^2+2y^2)\right)$ - сложная функция двух основных аргументов x и y и двух промежуточных u и v. $t=\cos(u+3v)$, где $u=\sqrt{x^2+y^2}$, $v=\ln(2x^2+2y^2)$.

$D(t)=\{(x,y)\,|\,x^2-y^2\geq 0 \wedge x^2+y^2>0\}$.

Глава 2. Дифференцируемые функции нескольких переменных

2.1. Частные производные

Определение 1. Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$ с областью определения $D(f)$. Пусть $(x_0, y_0) \in D(f)$. Выберем еще одну точку $(x_1, y_1) \in D(f)$. Разность $f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)$ называется приращением функции в точке (x_0, y_0) и обозначается Δz: $\Delta z = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)$

Определение 2. Пусть $(x_0, y_0) \in D(f)$, рассмотрим точку $(x_1, y_0) \in D(f)$. Разность $f(x_1, y_0) - f(x_0, y_0)$ называется частным приращением функции f в точке (x_0, y_0) и обозначается $\Delta_x z$.

$\Delta_y z = f(x_0, y_1) - f(x_0, y_0)$ – частное приращение функции f по переменной y.

Замечание. В отличие от $\Delta_x z$ и $\Delta_y z$ Δz называют полным приращением функции f в точке (x_0, y_0).

Определение 3. Пусть задана функция $z = f(x, y)$. Зафиксируем точку $(x_{0,} y_0) \in D(f)$. Дадим аргументу x приращение Δx такое, что $(x_0 + \Delta x, y_0) \in D(f)$. Найдем частное приращение функции $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_{0,} y_0)$ и составим отношение $\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_{0,} y_0)}{\Delta x}$. Если существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_{0,} y_0)}{\Delta x}$, то он называется частной производной от функции $f(x, y)$ по переменной x в точке $(x_{0,} y_0)$

Частная производная от функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) обозначается

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\bigg|_{(x_0, y_0)} = z'_x(x_0, y_0)$$

Аналогично определяется частная производная $f'_y(x_0, y_0)$.

Сформулируйте определение $f'_y(x_0, y_0)$.

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$$ (если этот предел существует).

Частные производные $f'_x(x_0, y_0)$ и $f'_y(x_0, y_0)$ характеризуют скорость изменения функции в направлении оси OX и OY соответственно.

Определение 4.

Частной производной от функции $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ по переменной x_i $(i = \overline{1, n})$ называется предел (если он существует) отношения частного приращения функции по переменной x_i к приращению Δx_i, когда $\Delta x_i \to 0$. $f'_{x_i}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) =$

$$= \lim_{\Delta i \to 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_i^0 + \Delta x_i, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_i, x_n^0)}{\Delta x_i}.$$

Обратите внимание: в определении частной производной от функции f в точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ по переменной x_i, приращение получает только переменная x_i, остальные остаются неизменными. Исходя из этого постарайтесь сформулировать правило нахождения частной производной от функции $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по переменной x_i.

Так как при определении какой - либо производной от функции нескольких переменных все переменные, кроме выбранной, остаются постоянными, то соответствующая частная производная может быть найдена как обычная производная функции одной переменной, т.е. функции, полученной из данной, если в ней все переменные кроме выбранной считать постоянными $\overline{f}(x_i) = f(\ x_1^0, x_2^0, \ldots, x_i, x_n^0)$.

Пример.

$f(x,y)=x^y \sin y$. Найдем $f'_x(1,0)$, $f'_y(1,0)$.

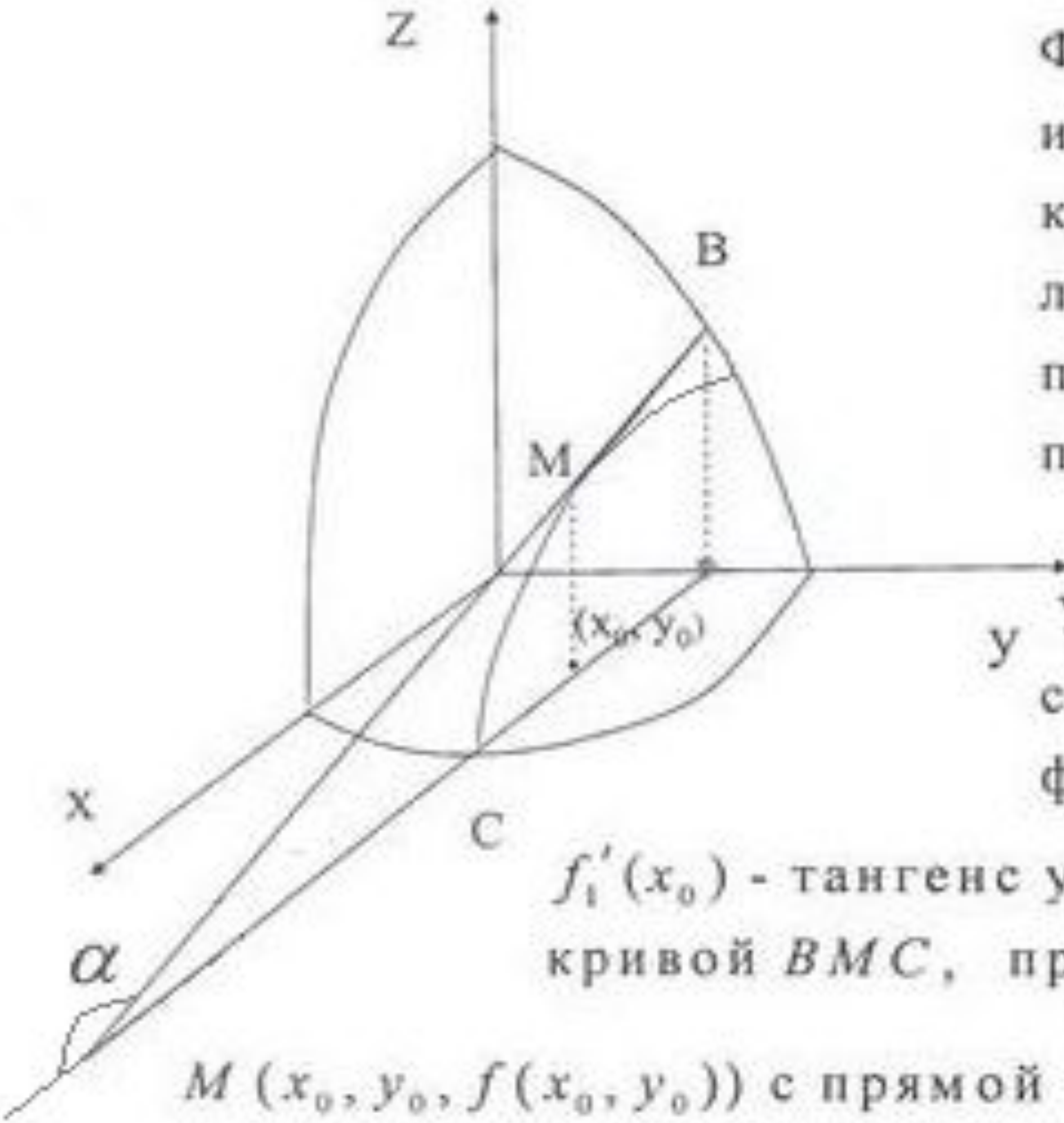
Находя $f'_x(x,y)$, будем считать y постоянным.

$f'_x(x,y)=yx^{y-1}\sin y$, $f'_x(1,0)=0$.

$f'_y(x,y)=x^y \ln x \sin y + x^y \cos y$, $f'_y(1,0)=1$.

Выясним геометрический смысл частных производных функции двух переменных $z = f(x, y)$. Пусть f непрерывная функция, представляемая геометрически некоторой поверхностью.

Зафиксируем точку $(x_0, y_0) \in D(f)$, ей на поверхности соответствует $M(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. При нахождении частной производной по x в точке (x_0, y_0) предполагается, что y_0 остается неизменным и функцию f можно рассматривать как функцию одной переменной x: $z = f(x, y_0) = f_1(x)$. Поэтому $f'_x(x_0, y_0) = f'_1(x_0)$.



Функция $z = f_1(x)$ изображается геометрически кривой BMC, являющейся линией пересечения поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $y = y_0$.

Учитывая геометрический смысл производной от функции одной переменной, $f_1'(x_0)$ - тангенс угла наклона касательной к кривой BMC, проведенной в точке $M\ (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ с прямой $\begin{cases} z = 0 \\ y = y_0 \end{cases}$, параллельной оси OX. Итак, $f_x'(x_0, y_0) = tg\alpha$.

Задание:

сформулируйте геометрический смысл частной производной $f_y'(x_0, y_0)$.

2.2. Дифференцируемость и дифференциал функции нескольких переменных

Вспомните определения дифференцируемости функции одной переменной, ее дифференциала и характеристические свойства дифференциала.

Как известно функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x, если ее приращение в этой точке представимо в виде $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, где $A - const$. относительно Δx, а $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Дифференциал функции $y = f(x)$ определяется как главная часть приращения функции, линейная относительно приращения аргумента, $dy = A \cdot \Delta x$.

Дифференциал функции одной переменной, характеризуется свойствами :

1. Он линеен отностительно Δx: $dy = A \cdot \Delta x$;

2. $\Delta y - dy = \alpha \cdot \Delta x = 0(\Delta x)$ – бесконечно малая высшего порядка относительно Δx.

При построении дифференциала функции двух переменных будем исходить из аналогичных соображений.

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$ с областью определения D(f). Зафиксируем точку $(x_0, y_0) \in D(f)$ и дадим приращения аргументам Δx и Δy такие, чтобы $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D(f)$, и найдем приращение $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

Определение 1.

Функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке $(x_0, y_0) \in D(f)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

(1) $\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$, где A и B не зависят от Δx и Δy, $\alpha, \beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Равенство (1) выражает условие дифференцируемости функции.

Определение 2. Функцию f, дифференцируемую в каждой точке множества $M \subseteq D(f)$, называют дифференцируемой на M.

Пример 1. $z = x^3 - 5xy$. Покажем, что эта функция дифференцируема в каждой точке $(x_0, y_0) \in R^2$. Найдем

$$\Delta z = (x_0 + \Delta x)^3 - 5(x_0 + \Delta x)\cdot(y_0 + \Delta y) - x_0^3 + 5x_0 y_0 = x_0^3 + 3x_0^2\Delta x +$$

$$+3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 5x_0 y_0 - 5y_0\Delta x - 5x_0\Delta y - 5\Delta x\Delta y - x_0^3 + 5x_0 y_0 =$$

$$= \underbrace{(3x_0^2 - 5y_0)}_{A}\Delta x - \underbrace{5x_0}_{B}\Delta y + \underbrace{(3x_0\Delta x + (\Delta x)^2)}_{\alpha}\Delta x - \underbrace{5\Delta x}_{\beta}\Delta y.$$

Замечание. Условие дифференцируемости функции можно записать в несколько ином виде, введя обозначение $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Ясно, что при $\Delta x \to 0$ и при $\Delta y \to 0$, $\rho \to 0$.

Обратно: при $\rho \to 0 \quad \Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

$$\alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y = \frac{\alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y}{\rho} \cdot \rho = \underbrace{\left(\alpha \frac{\Delta x}{\rho} + \beta \frac{\Delta y}{\rho} \right)}_{\varepsilon} \cdot \rho = \varepsilon \cdot \rho.$$

При $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0 \quad \varepsilon \to 0$.

Действительно, при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0 \;\; \alpha \to 0, \;\; \beta \to 0, \left| \frac{\Delta x}{\rho} \right| < 1,$

$\left| \frac{\Delta y}{\rho} \right| < 1$. Итак, (2) $\Delta z = A \cdot \Delta x + \mathrm{B} \cdot \Delta y + \varepsilon \cdot \rho$, где $\varepsilon \to 0$ при $\rho \to 0$.

Обратно, если Δz представимо в виде

(2) $\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \ \varepsilon \cdot \rho$, где

$\varepsilon \to 0$ при $\rho \to 0$, то оно представимо в виде (1).

Для обоснования этого преобразуем $\varepsilon \cdot \rho$:

$$\varepsilon \cdot \rho = \frac{\varepsilon \cdot \rho^2}{\rho} = \frac{\varepsilon((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)}{\rho} =$$

$$= \underbrace{\varepsilon \cdot \frac{\Delta x}{\rho}}_{\alpha} \cdot \Delta x + \underbrace{\varepsilon \cdot \frac{\Delta y}{\rho}}_{\beta} \cdot \Delta y = \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y.$$

Нетрудно доказать, что $\alpha, \beta \to 0$ при $\Delta x, \Delta y \to 0$.

Сумма $A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$ линейна относительно Δx и Δy и называется главной частью приращения функции;

Слагаемое $\varepsilon \cdot \rho$ – бесконечно малая относительно ρ.

Определение 3. Главная часть полного приращения Δz функции $z = f(x, y)$, дифференцируемой в точке (x_0, y_0), линейная относительно приращения аргументов Δx и Δy, т.е. выражение $A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$ называется полным дифференциалом функции f в точке (x_0, y_0) и обозначается dz или $df(x, y)$.

$$dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$$

Пример 2.

Функция $z = x^3 - 5xy$ имеет полный диференциал $dz = (3x^2 - 5y)\Delta x - 5x\Delta y$.

Замечание.

Понятие дифференциала функции двух переменных введено лишь для дифференцируемой функции.

2.3. Непрерывность дифференцируемой функции

Теорема 1.

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то она непрерывна в этой точке.

Пусть f дифференцируема в точке (x_0, y_0), тогда ее приращение представимо в виде

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y,$$

где $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha = 0$ и $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta = 0$.

На основании чего это записано?

Найдем

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y) = 0 \ \Big|?$$

$$|\Delta z| = d_R(f(x,y); f(x_0,y_0)); \ d_{R^2}((x,y),(x_0,y_0)) =$$

$$= \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \rho.$$

При $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ $\rho \to 0$ тогда ,

$d_R(f(x,y); f(x_0,y_0)) = |\Delta z| \to 0$, что означает

по определению непрерывного отображения

f непрерывна в точке (x_0, y_0).

2.4. Выражение дифференциала через частные производные

Теорема 2.

Если функция f дифференцируема в точке $(x_0, y_0) \in D(f)$, то она имеет в точке (x_0, y_0) обе частные производные.

Доказательство Т.2.

Представим полное приращение функции $z = f(x, y)$, в виде:

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y,$$

где A, B не зависят от $\Delta x, \Delta y$, а $\alpha, \beta \to 0$ при $\Delta x, \Delta y \to 0$.

Почему такое представление возможно?

Положим $\Delta x \neq 0,\ \Delta y = 0.$

Найдем $\Delta_x z = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x.$

Составим $\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \alpha$

Почему Δy положили равным 0?

Найдем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \alpha) =$$

Для чего находим этот предел и чему он равен?

$= A.$ Итак, $f'_x(x_0, y_0) = A.$

Аналогично доказывается существование

$f'_y(x_0, y_0) = B.$

Учитывая доказанное предложение скажите в каком виде можно записать полный дифференциал функции двух переменных?

Следствие.

Если выражение $A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$ представляет полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0), то коэффициенты A и B выражаются в нем однозначно $A = f'_x(x_0, y_0)$, $B = f'_y(x_0, y_0)$. Тогда получаем выражение полного дифференциала через частные производные: $dz = f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y$.

Или в произвольной точке из области дифференцируемости функции

$$dz = f'_x(x, y) \cdot \Delta x + f'_y(x, y) \cdot \Delta y.$$

2. 5. Достаточное условие дифференцируемости функции двух переменных

Теорема 3. Если функция f имеет в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) частные производные $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$, непрерывные в точке (x_0, y_0), то данная функция дифференцируема в этой точке, т.е. имеет дифференциал.

Доказательство Т.3

Рассмотрим полное приращение функции f в точке (x_0, y_0): $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$, где $(x_0, y_0) \in D(f)$, $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D(f)$.

Представим Δz в виде

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \underbrace{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)} +$$

$$+ \underbrace{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)} =$$

Как получено такое представление?

$$= f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x +$$

$$+ f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta y,$$

где $0 < \theta_1 < 1,\ 0 < \theta_2 < 1$

Почему такое представление возможно?

Что использовано, чтобы его получить?

При $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$

$x_0 + \theta_1 \Delta x \to x_0$ и $y_0 + \theta_2 \Delta y \to y_0$

?
(θ_1 и θ_2-ограничены)

Далее

$$f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + y) = f'_x(x_0, y_0) + \alpha,$$

$$f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x_0, y_0) + \beta,$$

где $\alpha, \beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$

Почему?

Такое представление возможно, т.к. f'_x, f'_y непрерывны в точке (x_0, y_0). Тогда

$$\Delta z = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y.$$

Последнее означает, что f дифференцируема в точке (x_0, y_0).

Пример. Проверим является ли дифференцируемой в области определения функция $u = \ln^2(x-y)$, $D = \{(x, y) \mid x - y > 0\}$.

$$u'_x = \frac{2\ln(x-y)}{x-y}, \; u'_y = \frac{2\ln(x-y)}{x-y} \cdot (-1).$$

u'_x и u'_y непрерывны в D, следовательно функция дифференцируема в D.

Замечание. Понятие дифференцируемости и дифференциала функции нескольких переменных вводится аналгично.

Определение 1. Функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется дифференцируемой в точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, если ее полное приращение в этой точке представимо в виде:

$\Delta z = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \cdots + A_n\Delta x_n + \varepsilon_1\Delta x_1 + \varepsilon_2\Delta x_2 + \cdots + \varepsilon_n\Delta x_n$,

где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ не зависят от $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$,

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \to 0$ при $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n \to 0$.

Определение 2.

Главная часть полного приращения дифференцируемой функции f, линейная относительно приращений аргументов, называется полным дифференциалом функции f.

$$dz = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \cdots + A_n\Delta x_n.$$

Учитывая справедливость теорем, аналогичным Т.2 и Т.3 для функции нескольких переменных

$$dz = f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)\Delta x_1 + f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)\Delta x_2 + \cdots$$

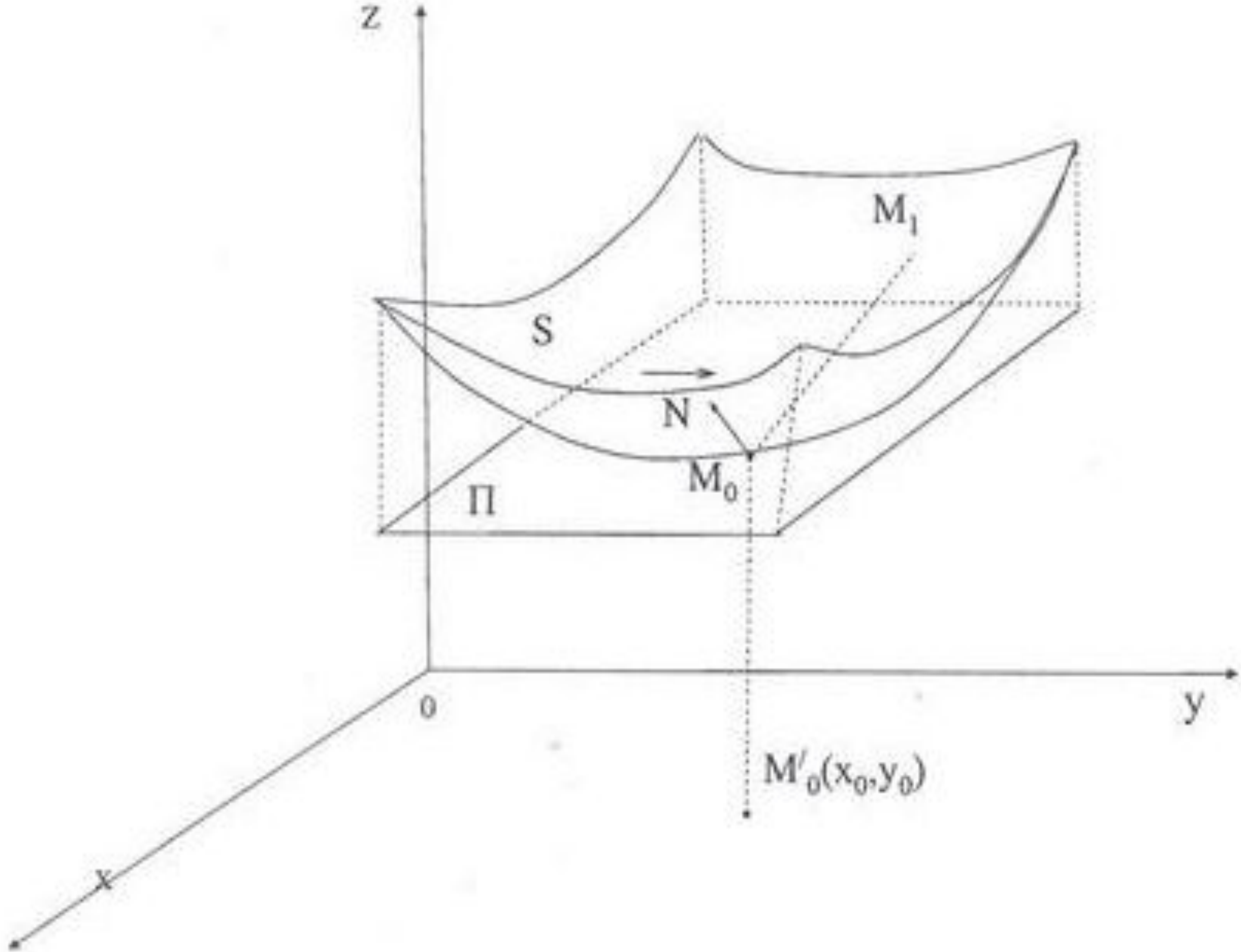
$$\cdots + f'_{x_n}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)\Delta x_n.$$

2. 6. Касательная плоскость к поверхности

В случае функции двух переменных $z = f(x, y)$ условие дифференцируемости можно проиллюстрировать геометрически.
Введем с этой целью понятия касательной плоскости к поверхности.

Вспомните определение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0)$. !

Определение. Плоскость П, проходящая через точку M_0 поверхности S называется касательной плоскостью к поверхности S в этой точке, если угол между этой плоскостью и секущей, проходящей через точку M_0 и любую точку M_1 поверхности S стремится к нулю, когда точка M_1 стремится к M_0 по поверхности.


z
y
x
0
S
N
M_1
M_0
Π
$M'_0(x_0,y_0)$

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0'(x_0, y_0)$. Убедимся, что в этом случае к графику функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ существует касательная плоскость. Положим $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$, $z - z_0 = \Delta z$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Вспомните определение дифференцируемой функции в точке (x_0, y_0) и запишите условие дифференцируемости.

Условие дифференцируемости функции

$z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) можно записать:

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$$

или $z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) + \varepsilon\rho$,

где A и B не зависят от Δx и Δy,

$\varepsilon \to 0$ при $\rho \to 0$.

$$\left(\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right),$$

$$A = f'_x(x_0, y_0),\ B = f'_y(x_0, y_0)$$

?

Рассмотрим уравнение: $z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$.

Совершите экскурсию в аналитичекую геометрию и скажите:

Какой объект определяет это уравнение?

Это уравнение определяет плоскость П, проходящую через точку (x_0, y_0, z_0) и имеющую нормальный вектор $\overrightarrow{N}\ (A, B, -1)$. Докажем, что эта плоскость является касательной плоскостью к поверхности S.

Что для этого следует доказать?

Для этого достаточно доказать:

(1) Плоскость П проходит через точку $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$;

(2) Угол φ между нормальным вектором $\overrightarrow{N}$ и секущей $\overrightarrow{M_0 M_1}$ стремится к $\frac{\pi}{2}$ при $M_0 \to M_0$ по поверхности.

Приступим к проверке этих утверждений.

Утверждение (1) верно | почему?

Для обоснования справедливости (2) найдем cos угла φ между векторами $\vec{N}$ и $\overrightarrow{M_0M_1} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$.

$$\cos\varphi = \frac{A(x-x_0)+B(y-y_0)-(z-z_0)}{\sqrt{A^2+B^2+1}\cdot\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}.$$

Утверждаем

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)-1(z-z_0)=\varepsilon\cdot\rho$$

из чего это вытекает?

Действительно, по условию дифференцируемости $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0); $z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) + \varepsilon \cdot \rho$, откуда и получаем последнее равенство $A(x - x_0) + B(y - y_0) - 1(z - z_0) = -\varepsilon \cdot \rho$.

Далее $\dfrac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\rho^2+(\Delta z)^2}}=$

$=\dfrac{1}{\rho\sqrt{1+\left(\frac{\Delta z}{\rho}\right)^2}}=\dfrac{1}{\rho\sqrt{1+tg^2\gamma}}=\dfrac{|\cos\gamma|}{\rho}$, где γ – угол между

секущей $\overrightarrow{M_0M_1}$ и плоскостью XOY. Тогда

$$\cos\varphi=\frac{A(x-x_0)+B(y-y_0)-(z-z_0)}{\sqrt{A^2+B^2+1}\cdot\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}=$$

$$=\frac{\varepsilon\cdot\rho}{\sqrt{A^2+B^2+1}}\cdot\frac{|\cos\gamma|}{\rho}\Rightarrow\lim_{\rho\to0}\cos\varphi=0\Rightarrow\lim_{\rho\to0}\varphi=\frac{\pi}{2}.$$

Итак, дифференцируемость функции f в точке (x_0, y_0) означает существование касательной плоскости к графику функции в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Учитывая, что $A = f'_x(x_0, y_0)$, $B = f'_y(x_0, y_0)$, уравнение касательной плоскости можно записать:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(X - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(Y - y_0).$$

2.7. Производная сложной функции

Пусть $u = f(x, y)$ с областью определения $D(f)$ и $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ – функции, определенные на D_1 образуют сложную функцию $u = f(\varphi(t), \psi(t))$.

Где она определена?

Теорема 4. Если в точке $t \in D_1$ существуют производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$, а функция $u = f(x, y)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $(\varphi(t), \psi(t))$ то существует производная

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \qquad (*)$$

Доказательство Т.4

Дадим аргументу $t \in D_1$ приращение $\Delta t \neq 0$ такое, что $t + \Delta t \in D_1$, тогда x и y получают приращения Δx и Δy, а u получит приращение Δu.

Из дифференцируемости функции u следует

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y, \text{ где } \alpha, \beta \to 0$$

при $\Delta x, \Delta y \to 0$. Составим

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Так как $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют производные в точке t, то они непрерывны в этой точке и при $\Delta t \to 0$ $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$. Откуда α и β стремятся к 0 при $\Delta t \to 0$. $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$,

$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}$. Итак, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$.

Пример 1. $u = x^2 + xy + y^2$, где $x = e^{3t}$, $y = \cos 2t$.

Для того, чтобы воспользоваться формулой (*),

найдем $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + y$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x + 2y$, $\dfrac{dx}{dt} = 3e^{3t}$,

$\dfrac{dy}{dt} = -2\sin 2t$. Подставляя найденные производные

в формулу (*), получаем

$$\frac{dy}{dt} = (2x + y)\cdot 3e^{3t} + (x + 2y)\cdot(-2\sin 2t)$$

Частный случай формулы (*).

Пусть $u = f(t, y),\ y = \varphi(t)$.

Тогда $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dt}$. (**)

Пример 2. $u = e^{tyz}, y = \sin^2 t, z = arctgt$.

$\dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \cdot \dfrac{dz}{dt}$. Тогда

$$\frac{du}{dt} = e^{tyz} \cdot yz + e^{tyz} \cdot tz(2\sin t \cos t) + e^{tyz} \cdot ty \cdot \frac{1}{1+t^2}.$$

Теорема 5. Если функции $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ имеют частные производные в точке (u, v),а функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в окрестности точки $(\varphi(u,v), \psi(u,v))$,то в точке (u, v) существуют частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \quad (***)$$

Пример 3.

$$u=\sqrt{x^2+y^2},\ \ x=t\cos\tau,\ y=\tau\sin t.\ \ \frac{\partial u}{\partial t}-?\ \ \frac{\partial u}{\partial \tau}-?$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial t}=$$

$$=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cos\tau+\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\tau\cos t.$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \tau}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \tau}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial \tau}=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot(-t\sin\tau)+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\sin t.$$

2.8. Инвариантная форма полного дифференциала

Если $z = f(x, y)$, то $dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y$ (1)

Определение. Положим $dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y$.

Тогда получим следующую форму полного дифференциала: $dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$ (2)

Пусть теперь $z = f(x, y)$, $x = \varphi(t, \tau)$, $y = \psi(t, \tau)$ образует сложную функцию. Тогда $dz = \frac{\partial z}{\partial t} dt + \frac{\partial z}{\partial \tau} d\tau$, где

$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$; $\frac{\partial z}{\partial \tau} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \tau}$. Откуда

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) \cdot dt + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \tau} \right) \cdot d\tau =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x} \left(\underbrace{\frac{\partial x}{\partial t} dt + \frac{\partial x}{\partial \tau} d\tau}_{dx} \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\underbrace{\frac{\partial y}{\partial t} dt + \frac{\partial y}{\partial \tau} d\tau}_{dy} \right) = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Видим форма дифференциала не изменилась, поэтому ее называют инвариантной.

2.9. Теорема существования неявной функции.

Частные производные неявной функции

Теорема 6. Пусть:

1). Функция $F(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки (x_0, y_0);

2). $F(x_0, y_0) = 0$;

3). $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда:

1). В некоторой окрестности $U(x_0,\ \varepsilon)$ уравнение $F(x, y) = 0$ задает функцию $y = f(x)$;

2). $f(x_0) = y_0$;

3). В $U(x_0,\ \varepsilon)$ f непрерывна и имеет непрерывную производную

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

Пример 1. Пусть имеем уравнение $5x^2+2y-3=0$.

Выясним задает ли оно y как функцию от x?

$F(x,y)=5x^2+2y-3$ – определена и непрерывна на R^2

$F(x,y)=0$ всюду на R^2.

$F'_y(x,y)=2\neq 0$ на R^2.

Значит существует $y=f(x)$ на R и $y'_x=-\dfrac{10x}{2y}=-5\dfrac{x}{y}$.

Теорема 7. Пусть

1. Функция $F(x, y, z)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0);
2. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$;
3. $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Тогда:

1) в некоторой окрестности $U((x_0, y_0), \varepsilon)$ уравнение $F(x, y, z) = 0$ задает функцию $z = f(x, y)$;

2) $f(x_0, y_0) = z_0$;

3) в окрестности $U((x_0, y_0),\ \varepsilon)$ функция $z = f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывные производные:

$$z'_x = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)},\ z'_y = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}.$$

Пример 1. Дано уравнение $e^z - xyz = 0$.

Выясним задает ли оно на некотором множестве y как функцию от x.

1) Функция $F(x,y,z) = e^z - xyz$ определена и непрерывна на R^3.

2) $F(x,y,z) = 0$ всюду на R^3.

3) $F'_z(x,y,z) = e^z - xy$.

$F'_z \neq 0$ на $D = \{(x,y,z) \in R^3 \mid e^z \neq xy\}$.

Тогда на множестве D существует функция $z = f(x, y)$.

Найдем $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-yz}{e^z - xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-xz}{e^z - xy}$