

Лекция № 13

Постановка задачи фильтрации

Задача фильтрации:

$$\hat{X}(t) = \hat{S}(t) + \hat{N}(t) \quad (1.1)$$

Желаемый выход фильтра:

$$\hat{Y}_0(t) = \hat{S}(t + \Delta), \Delta \geq 0 \quad (1.2)$$

Выходной сигнал реального фильтра:

$$\hat{X}_p(t) = \hat{S}_p(t + \Delta) \quad (1.3)$$

Характеристики фильтра

$$M \hat{X}_p^2(t) = M \hat{S}^2(t + \Delta) - \hat{S}_p^2(t + \Delta) \quad (1.4)$$

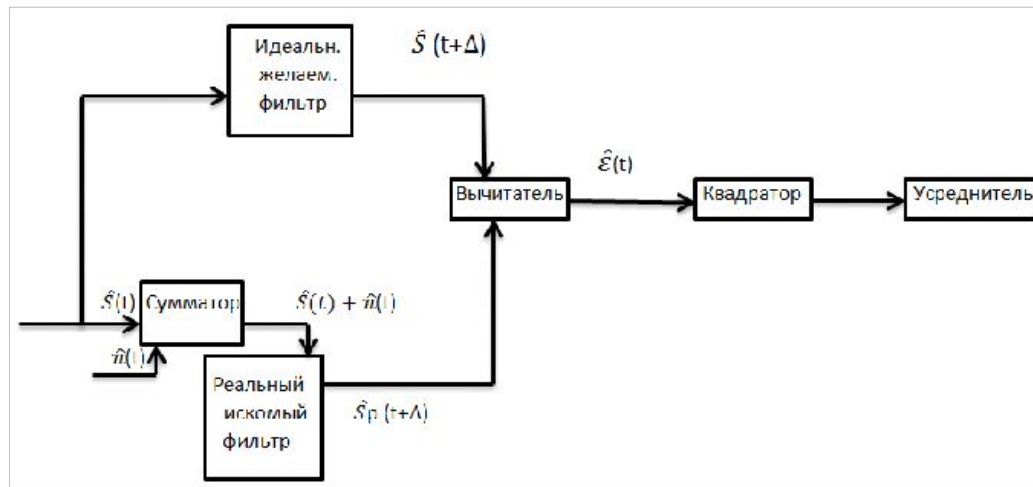


Рис. 1.1 – Схема фильтра с минимальной среднеквадратической погрешностью

Выходной сигнал реального фильтра:

$$S_p(t + \Delta) = \int_0^{\infty} h(\tau) S(t - \tau) dt \quad (1.5)$$

Среднее значение квадрата ошибки фильтрации:

$$\begin{aligned} E^2(t) = & \int_0^{\infty} S(t + \Delta) - S_p(t + \Delta) dt = \int_0^{\infty} S^2(t + \Delta) dt - 2 \int_0^{\infty} S(t + \Delta) \times \\ & \times \int_0^{\infty} h(\tau) S(t - \tau) dt + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\tau) h(\gamma) S(t - \tau) S(t - \gamma) dt d\gamma \end{aligned} \quad (1.6)$$

Усредняя левую и правую части:

$$\begin{aligned} M E^2(t) = & M \int_0^{\infty} S^2(t + \Delta) dt - 2 \int_0^{\infty} h(\tau) M \int_0^{\infty} S(t - \tau) S(t + \Delta) dt + \\ & + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\tau) h(\gamma) M \int_0^{\infty} S(t - \tau) S(t - \gamma) dt d\gamma \end{aligned} \quad (1.7)$$

Поскольку сигнал и шум стационарны

$$M \int_0^{\infty} S^2(t) dt = M \int_0^{\infty} S^2(t + \Delta) dt = M \int_0^{\infty} S^2 dt = \sigma_S^2 \quad (1.8)$$

$$M \int_0^{\infty} S(t - \tau) S(t + \Delta) dt = B_{SS}(\Delta) \quad (1.9)$$

$$M \int_0^{\infty} S(t - \tau) S(t - \gamma) dt = B_S(\tau - \gamma) \quad (1.10)$$

Среднее значение квадрата ошибки фильтрации:

$$\begin{aligned} M E^2 = & \sigma_S^2 - 2 \int_0^{\infty} h(\tau) B_{SS}(\Delta) dt + \\ & + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\tau) h(\gamma) B_S(\tau - \gamma) dt d\gamma \end{aligned} \quad (1.11)$$

Среднеквадратическая ошибка фильтра с импульсной характеристикой:

$$M\sigma_f^2 = \sigma_g^2 - 2 \int_0^\infty \sigma_{\text{опт}}(\tau) \tau d\tau + \int_0^\infty \int_0^\infty B_{gg}(\tau + \Delta) d\tau + \\ + \int_0^\infty \int_0^\infty \sigma_{\text{опт}}(\tau) \tau d\tau + \int_0^\infty \int_0^\infty \sigma_{\text{опт}}(\tau) \gamma d\tau + \int_0^\infty \int_0^\infty \gamma B_{gg}(\tau - \gamma) d\tau d\gamma \quad (1.12)$$

Минимальна среднеквадратическая ошибка:

$$Q = \int_0^\infty \sigma_{\text{опт}}(\tau) \tau B_{gg}(\tau + \Delta) d\tau - \int_0^\infty \int_0^\infty \sigma_{\text{опт}}(\tau) \tau \gamma B_{gg}(\tau - \gamma) d\tau d\gamma \quad (1.13)$$

$$L = \int_0^\infty \int_0^\infty \sigma_{\text{опт}}(\tau) \tau \gamma B_{gg}(\tau - \gamma) d\tau d\gamma \quad (1.14)$$

Формулу (1.12) можно переписать так:

$$M\sigma_f^2 = M\sigma_g^2 - 2Q + L \quad (1.15)$$

Условие минимума $M\sigma_f^2$ имеет вид:

$$\frac{\partial M\sigma_f^2}{\partial \sigma_{\text{опт}}} = -2Q + 2L = 0 \quad (1.16)$$

Следовательно,

$$Q = \int_0^\infty \sigma_{\text{опт}}(\tau) \tau B_{gg}(\tau + \Delta) d\tau - \int_0^\infty \int_0^\infty \sigma_{\text{опт}}(\tau) \gamma q(\tau) \tau B_{gg}(\tau - \gamma) d\tau d\gamma = \\ = \int_0^\infty \sigma_{\text{опт}}(\tau) \tau \int_0^\infty \sigma_{\text{опт}}(\gamma) \gamma B_{gg}(\tau - \gamma) d\gamma - B_{gg}(\tau + \Delta) \tau d\tau = 0 \quad (1.17)$$

Имея в виду, что (1.17) должно выполняться при любой функции $q(\tau)$ можно записать следующее условие:

$$\int_0^\infty \sigma_{\text{опт}}(\gamma) \gamma B_{gg}(\tau - \gamma) d\gamma - B_{gg}(\tau + \Delta) \tau = 0 \quad (1.18)$$

$$B_{gg}(\tau + \Delta) = \int_0^\infty \sigma_{\text{опт}}(\gamma) \gamma B_{gg}(\tau - \gamma) d\gamma \quad (1.19)$$

Физически реализуемый реальный фильтр:

$$h_{\text{опт}}(t) = 0 \quad \text{при } t < 0 \quad (1.20)$$

Решение уравнения (1.21):

$$h_{\text{опт}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_d(\omega) e^{j\omega t}}{S_n(\omega) + S_d(\omega)} d\omega \quad (1.21)$$

Частотная характеристика фильтра:

$$H_{\text{опт}}(\omega) = \frac{S_d(\omega)}{S_n(\omega) + S_d(\omega)} \quad (1.22)$$

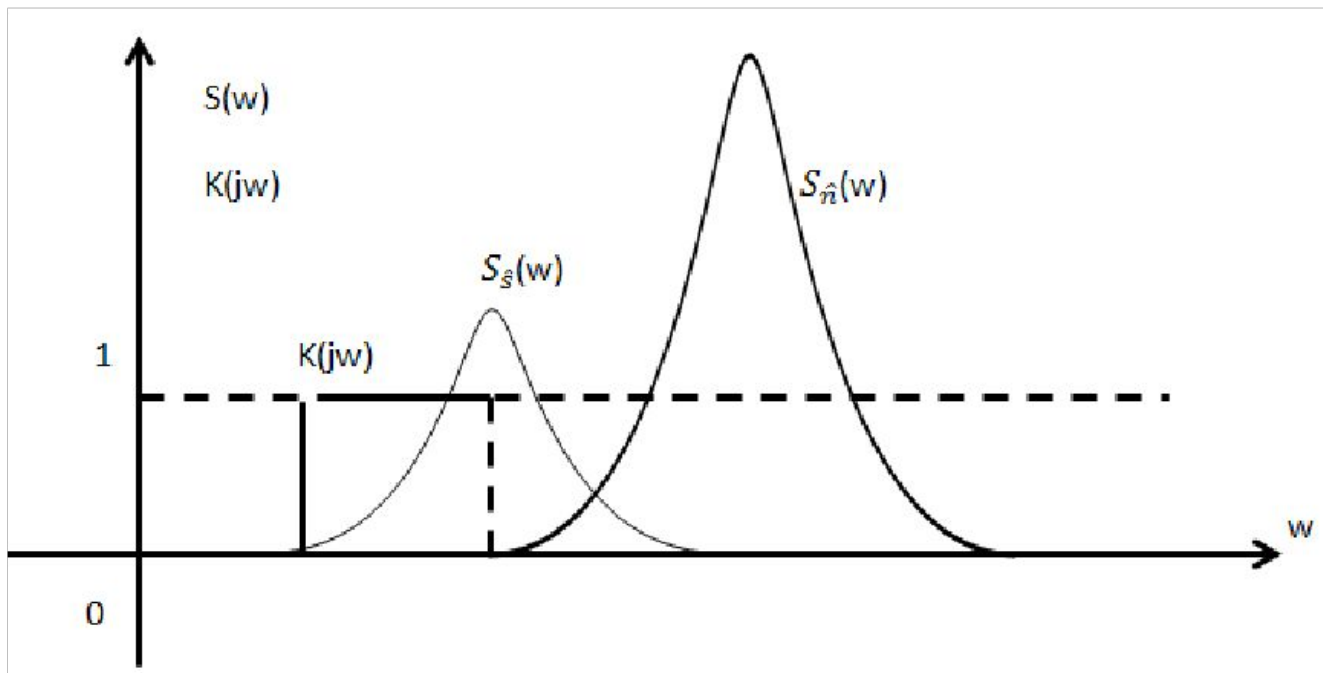


Рис. 1.2 – Характеристики оптимального фильтра

Если на импульсную характеристику фильтра $h(t)$ наложено условие физической осуществимости, то она находится из уравнения:

$$h(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (1.23)$$

Где:

$$h(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(\tau)}{t - \tau} \delta(t - \tau + \Delta) \delta(t - \tau - \Delta) dt \quad (1.24)$$

Можно несколько упростить выражение:

$$h(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{h(t)}{t} + \dots \right] \quad (1.25)$$