

**Решение
заданий
олимпиады
ПРОФИ 2017**

1 Уравнение $x \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = \sin 4\alpha - x$ имеет бесконечное множество решений при всех α из множества ($n \in \mathbb{Z}$)

1 $\frac{\pi}{4} + \pi n$

2 $\frac{\pi}{2} n$

3 $\frac{\pi}{4} n$

4 $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n$

5 \emptyset

Решение.

$$x(1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha) = \sin 4\alpha$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \neq 0 \\ \cos \alpha \neq 0, \\ \sin 4\alpha = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha \neq \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z} \\ \alpha = \frac{\pi}{4} k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: №4

2

Дробь $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 - \sqrt{13}x + 4}$ при $x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ равна

1 $\sqrt{13} + 1$

2 2

3 3

4 4

5 5

Решение.

$$\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{\left(x - \frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{\left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{\frac{13}{4} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 4$$

Ответ: №4

- 3 Прямой, перпендикулярной прямой $x \sin 165^\circ - y \cos 165^\circ = 1$, является
- | | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $x \sin 105^\circ + y \cos 105^\circ = 1$ | 2 | $x \sin 115^\circ - y \cos 115^\circ = 1$ |
| 3 | $x \sin 15^\circ - y \cos 15^\circ = 1$ | 4 | $x \sin 75^\circ + y \cos 75^\circ = 1$ |
| 5 | $y \sin 115^\circ - x \cos 115^\circ = 1$ | | |

Решение. Воспользуемся условием перпендикулярности прямых: произведение угловых коэффициентов равно -1 .

У данной прямой угловой коэффициент равен: $\left(\frac{\sin 165^\circ}{\cos 165^\circ}\right)$

Рассмотрим уравнение прямой под №1, угловой коэффициент равен $\left(-\frac{\sin 105^\circ}{\cos 105^\circ}\right)$.

$$\frac{\sin 165^\circ}{\cos 165^\circ} \cdot \left(-\frac{\sin 105^\circ}{\cos 105^\circ}\right) = -1$$

Ответ: №1

4 Сумма квадратов корней уравнения $x^2 - \frac{x}{\sqrt{4 + 2\sqrt{3} - 2}} + \sqrt{0,1875} = 0$ равна

1 1

2 7

3 4

4 12

5 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Решение.

$$x^2 - \frac{x}{\sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2 - 2}} + \sqrt{\frac{3}{16}} = x^2 - \frac{x}{\sqrt{3} - 1} + \frac{\sqrt{3}}{4} = x^2 - \frac{(\sqrt{3} + 1)x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$x^2 - \frac{(\sqrt{3} + 1)x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0, \quad x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 = 1$$

Ответ №1

5 Сумма целых решений неравенства $\arcsin\left(\log_2\left(\frac{x}{2}\right)\right) > 0$ равна

1 7

2 6

3 9

4 10

5 5

Решение.

$$0 < \log_2\left(\frac{x}{2}\right) \leq 1, \quad x \in (2; 4]$$

Ответ: №1.

6 Найдите площадь трапеции, если ее основания равны 13 и 26, а боковые стороны равны 5 и 12.

1 90

2 60

3 96

4 75

5 36

Решение. (1 способ)

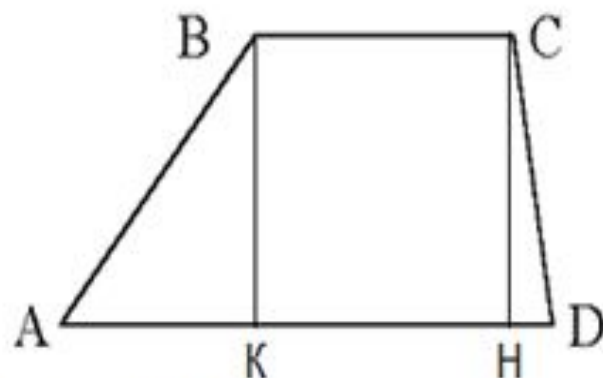
$$AB = 12, CD = 5, BC = KH = 13, AD = 26$$

Пусть $AK = x, HD = 13 - x$.

Т.к. $BK = CH$, то $\sqrt{12^2 - x^2} = \sqrt{5^2 - (13 - x)^2}$, $x = \frac{144}{13}$, $BK = \frac{12 \cdot 5}{13}$

$$S = \frac{13 + 26}{2} \cdot \frac{12 \cdot 5}{13} = 90$$

Ответ: №1.



6 Найдите площадь трапеции, если ее основания равны 13 и 26, а боковые стороны равны 5 и 12.

1 90

2 60

3 96

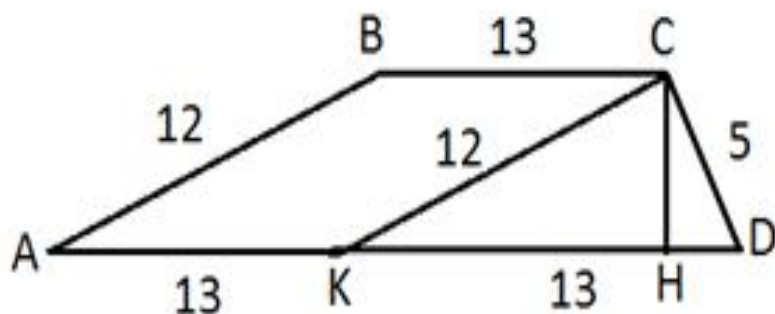
4 75

5 36

Решение. (2 способ)

Проведем СК параллельно АВ.

$\triangle KCD$ –прямоугольный, т.к. $13^2 = 12^2 + 5^2$



CH – высота, проведенная к гипотенузе KD . $CH = \frac{KC \cdot CD}{KD}$.

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot CH = \frac{13 + 26}{2} \cdot \frac{12 \cdot 5}{13} = 90$$

Ответ: №1.

7 Если $f(x) = 5x + 2$ и $f(2g(x) + 5) = 15 - 4x$, то производная $g'(x)$ равна

1 $-0,4$

2 $-0,2$

3 $0,2$

4 $0,4$

5 0

Решение.

$$f(2g(x) + 5) = 5 \cdot (2g(x) + 5) + 2 = 10g(x) + 27$$

$$10g(x) + 27 = 15 - 4x$$

$$g(x) = -\frac{4}{10}x - \frac{12}{10}, g'(x) = -0,4$$

Ответ:№1

8 Все решения неравенства $x \cdot (x - \log_{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}) \cdot (x - \log_{\frac{\pi}{8}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}) > 0$ образуют множество

1 $(-\infty; 0) \cup (\log_{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}; \log_{\frac{\pi}{8}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6})$

2 $(-\infty; \log_{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8})$

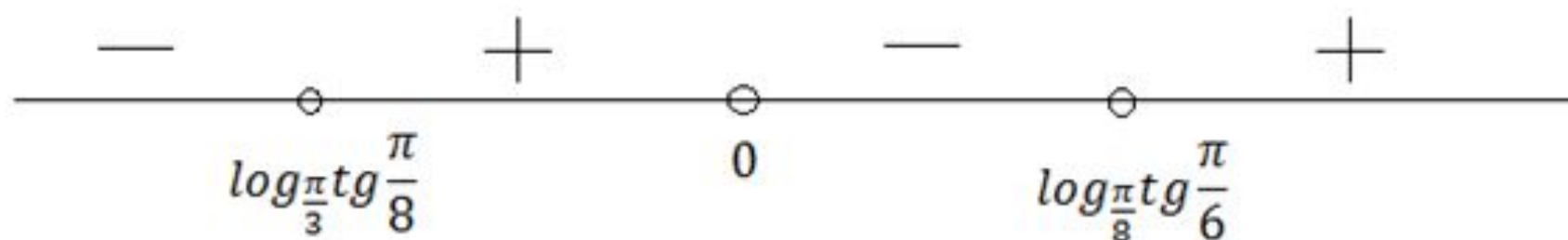
3 $(\log_{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}; \log_{\frac{\pi}{8}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6})$

4 $(\log_{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}; +\infty)$

5 $(\log_{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}; 0) \cup (\log_{\frac{\pi}{8}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}; +\infty)$

Решение.

$$\log_{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} < 0, \quad \log_{\frac{\pi}{8}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} > 0$$



Ответ: №5.

9 Сумма первых десяти членов последовательности $a_n = n$, принадлежащих области определения функции $y = \sqrt{\lg \cos(0,5\pi x)}$, равна

1 220

2 240

3 184

4 216

5 224

Решение.

$$\begin{cases} \lg(\cos(0,5\pi x)) \geq 0 \\ \cos(0,5\pi x) > 0 \end{cases},$$

$$\cos(0,5\pi x) \geq 1,$$

$$x = 4\pi k, k \in Z$$

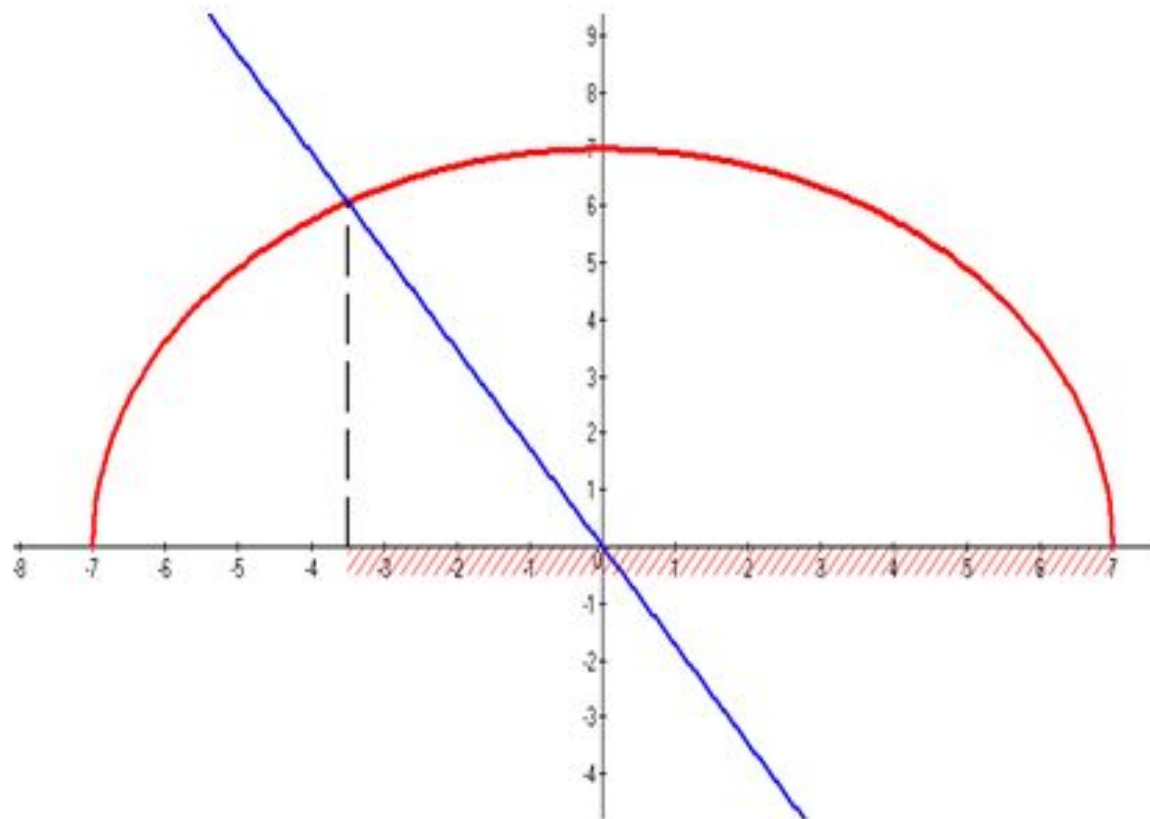
$$a_1 = 4, d = 4, S_{10} = \frac{2 \cdot 4 + 4 \cdot 9}{2} \cdot 10 = 220$$

Ответ: №1.

10 Сумма целых решений неравенства $\sqrt{3} \cdot x + \sqrt{49 - x^2} > 0$ равна
1 22 2 0 3 30 4 18 5 15

Решение.

$$\sqrt{49 - x^2} > -\sqrt{3}x.$$



$x \in (-3,5; 7]$ Сумма целых решений неравенства равна 22.

Ответ: № 1.

- 11 Объем шара, описанного около куба с ребром, равным $\sqrt[6]{\frac{16}{3\pi^2}}$, составляет
- 1 2 2 4 3 3 4 $\frac{4}{\pi\sqrt{3}}$ 5 $\frac{4\sqrt{6}}{9}$

Решение.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{\left(\frac{4}{\pi\sqrt{3}}\right)^3 3\sqrt{3}}{8} = 2$$

Ответ: №1.

- 12 Наибольшее расстояние от точки с целочисленными координатами, принадлежащей кривой $x^2 - 3xy + 2y^2 - 11 = 0$, до начала координат равно
- 1 $\sqrt{541}$ 2 $\sqrt{313}$ 3 $\sqrt{551}$ 4 $\sqrt{181}$ 5 25

Решение.

$$(x - 2y)(x - y) = 11$$

$$\left[\begin{array}{l} \{ x - 2y = 1 \\ \quad x - y = 11 \\ \{ x - 2y = 11 \\ \quad x - y = 1 \\ \{ x - 2y = -1 \\ \quad x - y = -11 \\ \{ x - 2y = -11 \\ \quad x - y = -1 \end{array} \right.$$

$$(21; 10), \quad (-9; -10), \quad (-21; -10), \quad (9; 10)$$

$$d = \sqrt{21^2 + 10^2} = \sqrt{541}$$

Ответ: №1.

- 13 Сумма корней уравнения $\log_{\cos x}(\sin x) + \log_{\sin x}(\cos x) = 2$ на промежутке $(-1, 8\pi; 2, 5\pi)$ составляет
- 1 $\frac{3}{4}\pi$ 2 $\frac{3}{8}\pi$ 3 $\frac{3}{2}\pi$ 4 $\frac{5}{4}\pi$ 5 уравнение не имеет решений

Решение.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \\ \sin x \neq 1 \\ \cos x \neq 1 \\ \log_{\cos x}(\sin x) + \frac{1}{\log_{\cos x}(\sin x)} = 2 \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \\ \sin x \neq 1 \\ \cos x \neq 1 \\ \frac{(\log_{\cos x}(\sin x) - 1)^2}{\log_{\cos x}(\sin x)} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \\ \sin x \neq 1 \\ \cos x \neq 1 \\ \sin x = \cos x \end{array} \right. , \quad x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Корни удовлетворяющие условию задания: $\frac{\pi}{4} - 2\pi, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + 2\pi$.

Ответ: №1.

14 Произведение корней уравнения $\cos(2 \operatorname{arctg} x) = 0$ равно

1 -1

2 $-\frac{1}{2}$

3 0

4 1

5 $\frac{1}{2}$

Решение.

$$2 \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n$$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} \text{ или } \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{4}$$

$$x = \pm 1$$

Ответ: №1.

15 Все решения неравенства $\sqrt{x+7} + \sqrt{11-x} \geq \log_2(x^2 - 4x + 68)$ принадлежат промежутку

1 $(-7; 3)$

2 $(3; 11)$

3 \emptyset

4 $(7; 11)$

5 $(-7; 0)$

Решение.

$$y = \sqrt{x+7} + \sqrt{11-x}$$

$$y = \log_2(x^2 - 4x + 68)$$

Найдем область значений функции $y = \sqrt{x+7} + \sqrt{11-x}$ с использованием производной. $y \in [\sqrt{18}; 6]$.

$$y = \log_2((x-2)^2 + 64), \quad y \in [6; +\infty)$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} + \sqrt{11-x} = 2 \\ \log_2(x^2 - 4x + 68) = 2 \end{cases}$$

$$x = 2$$

Ответ: №1.

16

Для заполнения бассейна используют 2 насоса. Известно, что если включить первый на 3 ч, а затем только второй на 4 ч, бассейн будет заполнен не меньше чем на 50% и не более чем на 80%. Если включить первый на 2 ч, затем только второй на 6 ч бассейн будет наполнен не меньше чем на 55% и не больше чем на 70%. Все возможные значения процента заполнения бассейна после работы первого насоса в течении 1 ч образуют множество

- 1 [10%; 28%] 2 [8%; 20%] 3 [2%; 26%] 4 [1%; 10%] 5 [1%; 25%]

Решение.

x – производительность 1 – го насоса

y – производительность 2 – го насоса

V – объем бассейна.

$$\begin{cases} 0,5V \leq 3x + 4y \leq 0,8V \\ 0,55V \leq 2x + 6y \leq 0,7V \end{cases} \quad \begin{cases} 1,5V \leq 9x + 12y \leq 2,4V \\ 1,4V \geq 4x + 12y \geq 1,1V \end{cases} \text{ " - "}$$

$$0,1V \leq 5x \leq 1,3V$$

$$0,02V \leq x \leq 0,26V.$$

Ответ: №3.

- 16** Для заполнения бассейна используют 2 насоса. Известно, что если включить первый на 3 ч, а затем только второй на 4 ч, бассейн будет заполнен не меньше чем на 50% и не более чем на 80%. Если включить первый на 2 ч, затем только второй на 6 ч бассейн будет наполнен не меньше чем на 55% и не больше чем на 70%. Все возможные значения процента заполнения бассейна после работы первого насоса в течении 1 ч образуют множество
- 1** [10%; 28%] **2** [8%; 20%] **3** [2%; 26%] **4** [1%; 10%] **5** [1%; 25%]

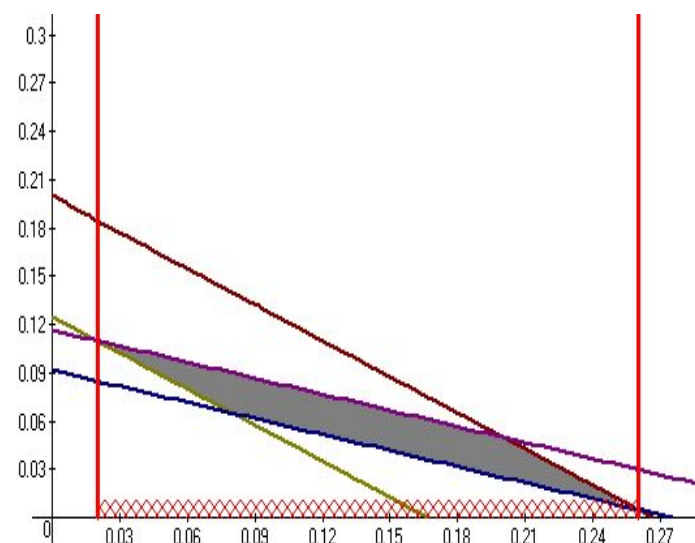
Решение. (2 способ)

x – производительность 1 – го насоса
 y – производительность 2 – го насоса

Пусть V – объем бассейна.

$$\begin{cases} 0,5 \leq 3x + 4y \leq 0,8 \\ 0,55 \leq 2x + 6y \leq 0,7 \end{cases}$$

Построим область удовлетворяющую системе неравенств. Спроецируем полученную область на ось абсцисс.



Ответ: №3.

17 В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром, равным $\sqrt{3}$, расстояние от точки B_1 до плоскости $A_1 C_1 D$ составляет

1 1

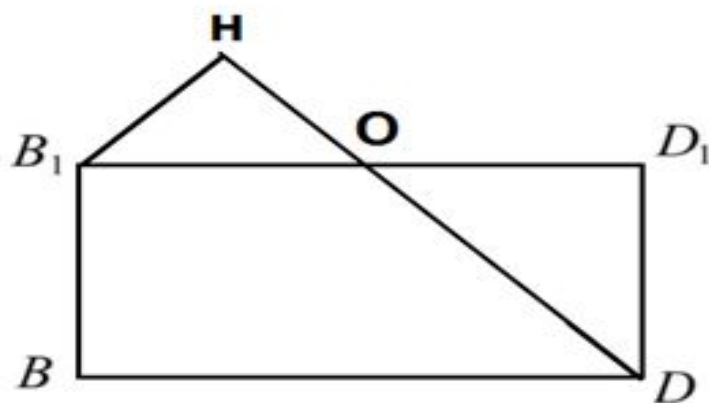
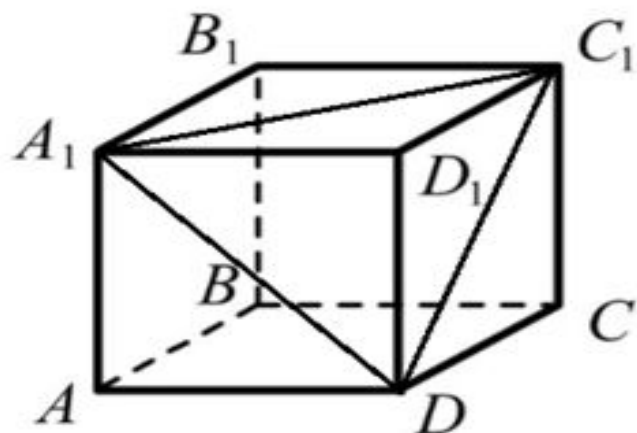
2 2

3 3

4 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

5 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Решение.



O – середина $A_1 C_1$, $B_1 H$ – перпендикуляр к OD . $\triangle B_1 H O$ подобен $\triangle D D_1 O$.

Пусть $B_1 B = a$, тогда $B_1 D_1 = a\sqrt{2}$, $DO = a\sqrt{\frac{3}{2}}$

$$\frac{B_1 H}{D D_1} = \frac{B_1 O}{O D}, \quad B_1 H = \frac{B_1 O}{O D} \cdot D D_1 = \frac{a}{\sqrt{3}} = 1$$

Ответ: №1.

- 18 Количество целых a из промежутка $(-5; 6)$, при которых уравнение $a \cdot 2^x + 2^{-x} = 4$ имеет два решения, равно
- 1 2 3 4 5

Решение.

$$2^x = t > 0$$

$$a \cdot t^2 - 4t + 1 = 0$$

Чтобы исходное уравнение имело два решения, надо:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ D > 0 \\ t_1 \cdot t_2 = \frac{1}{a} > 0, \quad a \in (0; 4) \\ t_1 + t_2 = \frac{4}{a} > 0 \end{cases}$$

Ответ: №3

| | | | | | |
|----|--|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 19 | Сумма | всех | целочисленных | решений | неравенства |
| | $(x^2 - 4)(x - 6)(x - 10) < 105$ равна | | | | |
| | <input type="checkbox"/> 1 40 | <input type="checkbox"/> 2 10 | <input type="checkbox"/> 3 21 | <input type="checkbox"/> 4 30 | <input type="checkbox"/> 5 35 |

Решение. $(x - 2)(x + 2)(x - 6)(x - 10) < 105$

$$((x - 2)(x - 6))((x + 2)(x - 10)) < 105$$

$$(x^2 - 8x + 12)(x^2 - 8x - 20) < 105$$

Пусть $x^2 - 8x = t, t^2 - 8t - 345 < 0, t \in (-15; 23)$

$$\begin{cases} x^2 - 8x > -15 \\ x^2 - 8x < 23 \end{cases}$$

$$4 - \sqrt{39} < x < 3 \quad 5 < x < 4 + \sqrt{39}$$

Целые решения неравенства: $-2, -1, 0, 1, 2, 6, 7, 8, 9, 10$

Ответ: №1.

20 Число корней уравнения $\cos^2 x - (x^2 - 1) \sin x + x^2 = 1$ на отрезке $[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$ равно

1 4
 2 2
 3 1
 4 5
 5 3

Решение.

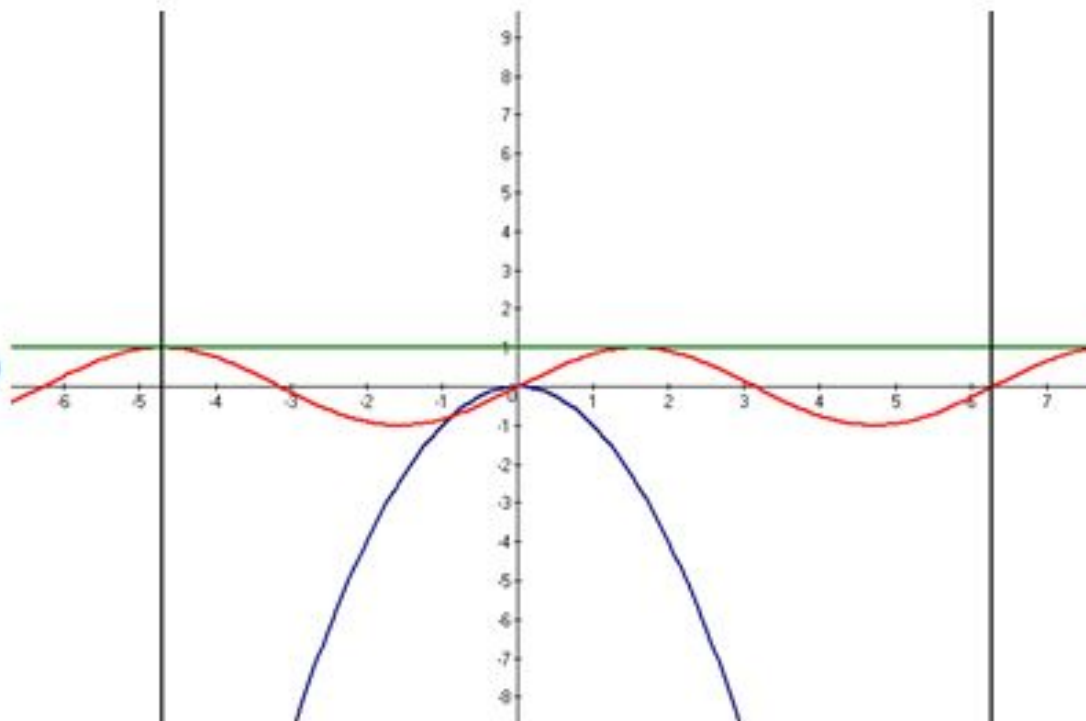
$$\sin^2 x + (x^2 - 1) \sin x - x^2 = 0$$

$$\sin^2 x + x^2 \cdot \sin x - \sin x - x^2 = 0$$

$$\sin x (\sin x + x^2) - (\sin x + x^2) = 0$$

$$(\sin x + x^2)(\sin x - 1) = 0$$

$$\sin x = 1, \quad \sin x = -x^2$$



Ответ: №1

21

Наименьшим положительным корнем уравнения $4 \sin x \cdot \cos x = 1 + 3 \sin^2 x$ является

- 1 $\arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$ 2 $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$ 3 $\arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$ 4 $\operatorname{arctg} 6$ 5 $\arcsin \frac{6}{\sqrt{37}}$

Решение.

$$4 \sin x \cdot \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x + 3 \sin^2 x,$$

$$4 \sin^2 x - 4 \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0,$$

$$4 \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 1 = 0, \quad (2 \operatorname{tg} x - 1)^2 = 0.$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}, \text{ наименьший корень уравнения } x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Ответ: №1

22

Наибольший из корней уравнения $\frac{4x}{6-x-x^2} - \frac{3x}{6-2x-x^2} + 1 = 0$ принадлежит промежутку

1 (1; 10)

2 (8; 12)

3 (3; 7)

4 (π ; 10)

5 (-5; 0)

Решение.

$$\frac{4}{\frac{6}{x} - 1 - x} - \frac{3}{\frac{6}{x} - 2 - x} + 1 = 0$$

Пусть $\frac{6}{x} - 1 - x = t$, тогда $\frac{4}{t} - \frac{3}{t-1} + 1 = 0$; $\frac{t^2-4}{t(t-1)} = 0$; $t = 2$, $t = -2$

$$\frac{6}{x} - 1 - x = 2, \quad \frac{6}{x} - 1 - x = -2$$

$$\frac{6-3x-x^2}{x} = 0, \quad \frac{6+x-x^2}{x}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}, \quad x_3 = -2, \quad x_4 = 3$$

Наибольший корень $x_4 = 3$

Ответ: №1.

23

Решить неравенство $4x - 5 > \sqrt{1 + x(x + 2)} + \sqrt{-3x^2 + 6x + 24}$

- $\left(\frac{7 + \sqrt{33}}{4}; 4\right]$
 $(3; 4]$
 $\left(\frac{5}{4}; 2\right]$
 $\left(\frac{4 + \sqrt{33}}{4}; 4\right]$
 $(-2; 4]$

Решение.

$$4x - 5 > |x + 1| + \sqrt{-3x^2 + 6x + 24}$$

$$\begin{cases} -3x^2 + 6x + 24 \geq 0 \\ 4x - 5 > 0 \end{cases}, \begin{cases} x \in [-2; 4] \\ x > 1,25 \end{cases}$$

$x \in (1,25; 4]$, тогда $|x + 1| = x + 1$, $3x - 6 > \sqrt{-3x^2 + 6x + 24}$

$$\begin{cases} x > 2 \\ (3x - 6)^2 > -3x^2 + 6x + 24, \\ x \in (1,25; 4] \end{cases}, \begin{cases} x \in (2; 4] \\ 2x^2 - 7x + 2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (2; 4] \\ x \in \left(-\infty; \frac{7 - \sqrt{33}}{4}\right) \cup \left(\frac{7 + \sqrt{33}}{4}; +\infty\right), \end{cases} \left(\frac{7 + \sqrt{33}}{4}; 4\right]$$

Ответ: №1.

24

Множеством значений функции $f(x) = \sin\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3}(\sqrt{5-4x-x^2}-1)^2\right)$ является

- 1 $[-\frac{\sqrt{3}}{2}; 1]$
 2 $[-1; 0]$
 3 $[-1; -\frac{1}{2}]$
 4 $[-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}]$
 5 $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$

Решение.

Оценим выражение, находящееся под знаком синуса.

$$\sqrt{5-4x-x^2} = \sqrt{9-(x+2)^2}$$

$$0 \leq \sqrt{9-(x+2)^2} \leq 3, \quad -1 \leq \sqrt{9-(x+2)^2} - 1 \leq 2,$$

$$0 \leq \left(\sqrt{9-(x+2)^2} - 1\right)^2 \leq 4, \quad -\frac{4\pi}{3} \leq -\frac{\pi}{3} \left(\sqrt{9-(x+2)^2} - 1\right)^2 \leq 0$$

$$0 \leq \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \left(\sqrt{9-(x+2)^2} - 1\right)^2 \leq \frac{4\pi}{3}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \left(\sqrt{9-(x+2)^2} - 1\right)^2\right) \leq 1$$

Ответ: №1.

25

При условии ежегодного начисления дохода сумма пенсионного вклада Марьи Ивановны в банке за второй год хранения увеличилась на 1600 руб, а за четвертый год — на 3600 руб. На сколько рублей увеличится вклад пенсионерки за пятый год?

1 7680

2 4320

3 8533,(3)

4 6860

5 5400

Решение.

Пусть V — вклад, q — во сколько раз банк увеличивает вклад в год.

$$\begin{cases} Vq^2 - Vq = 1600 \\ Vq^4 - Vq^3 = 3600, \\ Vq^5 - Vq^4 = ? \end{cases} \quad \begin{cases} Vq(q - 1) = 1600 \\ Vq^3(q - 1) = 3600 \\ Vq^5 - Vq^4 = ? \end{cases}$$

$$\begin{cases} q^2 = \frac{3600}{1600} \\ Vq^5 - Vq^4 = ? \end{cases}$$

$$Vq^5 - Vq^4 = qVq^3(q - 1) = \frac{3}{2} \cdot 3600 = 5400$$

Ответ: №5.

- 26 Многочлен $P(x)$ при делении на $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ дает в остатке $x^2 + x + 1$.
Найти $P(-3) - P(2) + P(-1)$
- 1 2 3 4 5

Решение.

$$P(x) = f(x) \cdot (x^3 + 2x^2 - 5x - 6) + x^2 + x + 1$$

Нетрудно заметить, что $-3, -1, 2$ являются нулями функции

$$y = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$$

$$\text{Тогда } P(-3) = (-3)^2 + (-3) + 1 = 7$$

$$P(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1$$

$$P(2) = (2)^2 + (2) + 1 = 7$$

$$P(-3) - P(2) + P(-1) = 7 - 7 + 1 = 1$$

Ответ: №1.

27 Найдите сумму всех целых значений параметра a , при которых графики функций $y = 2|x + 1| + |x - 4|$ и $y = 2|x - 3| + x + a$ пересекаются ровно 3 раза.

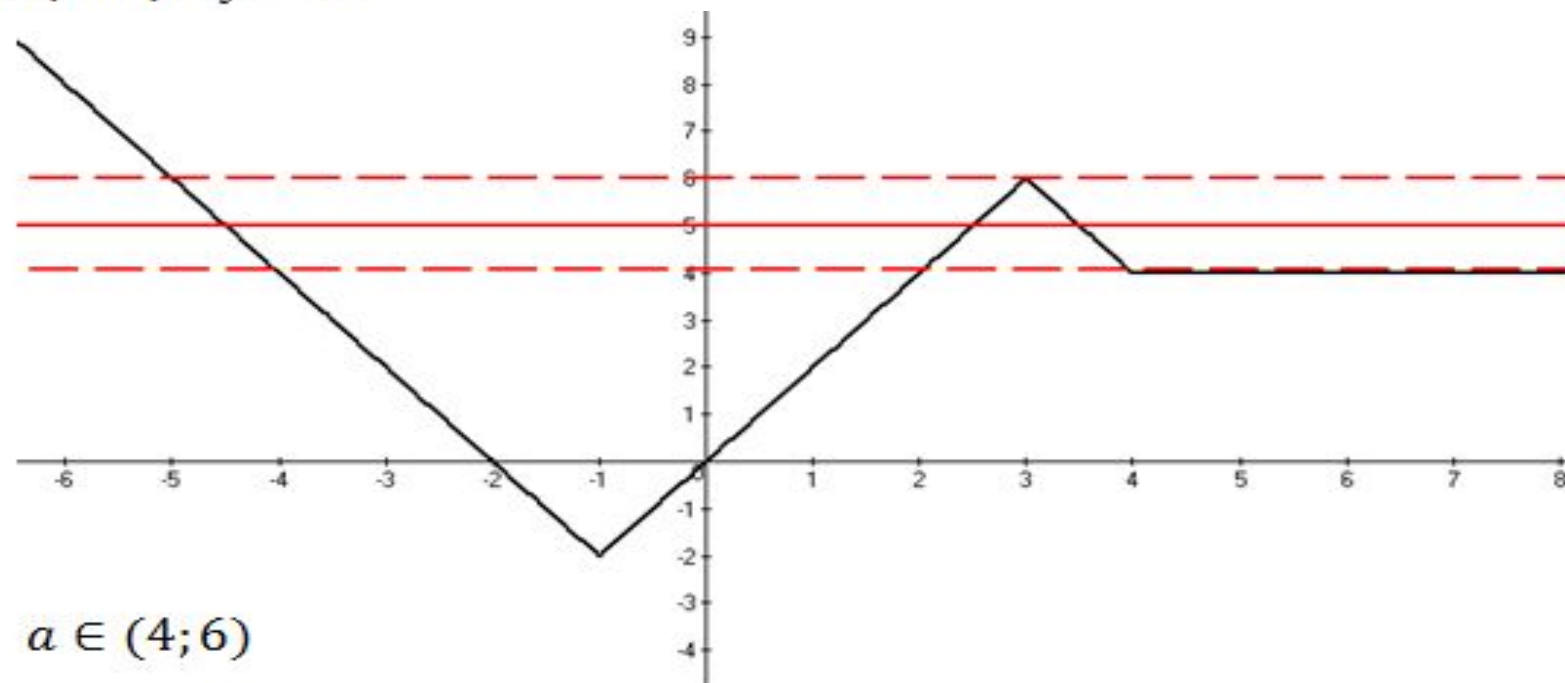
- 1 5 2 15 3 10 4 3 5 таких a не существует

Решение. $2|x + 1| + |x - 4| = 2|x - 3| + x + a$

$$2|x + 1| + |x - 4| - 2|x - 3| - x = a$$

Построим график функции $y = 2|x + 1| + |x - 4| - 2|x - 3| - x$

И прямую $y = a$



$$a \in (4; 6)$$

Ответ: №1.

28 Автолюбитель, желая за 4 года накопить средства на покупку кабриолета, разместил в паевом инвестиционном фонде вклад в размере 40 тыс. рублей под 25% годовых. В конце каждого из первых трех лет будущий владелец авто после начисления ему фондом процентов наметил дополнительно вносить на счет одну и ту же фиксированную сумму, такую, чтобы окончательный размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 620,703125%. Какую сумму (в тыс. руб.) необходимо ежегодно добавлять к вкладу?

1 40

2 140

3 50

4 80

5 75,5

Решение.

Пусть x — необходимо ежегодно добавлять к вкладу.

$$\left((40 \cdot 1,25 + x) \cdot 1,25 + x \right) \cdot 1,25 + x = 40 \cdot 7,20703125$$

$$x = 40$$

Ответ: №1.

29 Сумма всех целых положительных a , для которых выполняется условие

$$4\pi \leq \int_3^{a+3} \sqrt{a^2 - 9 - x^2 + 6x} dx \leq 16\pi \text{ равна}$$

1 30

2 140

3 9

4 120

5 1147

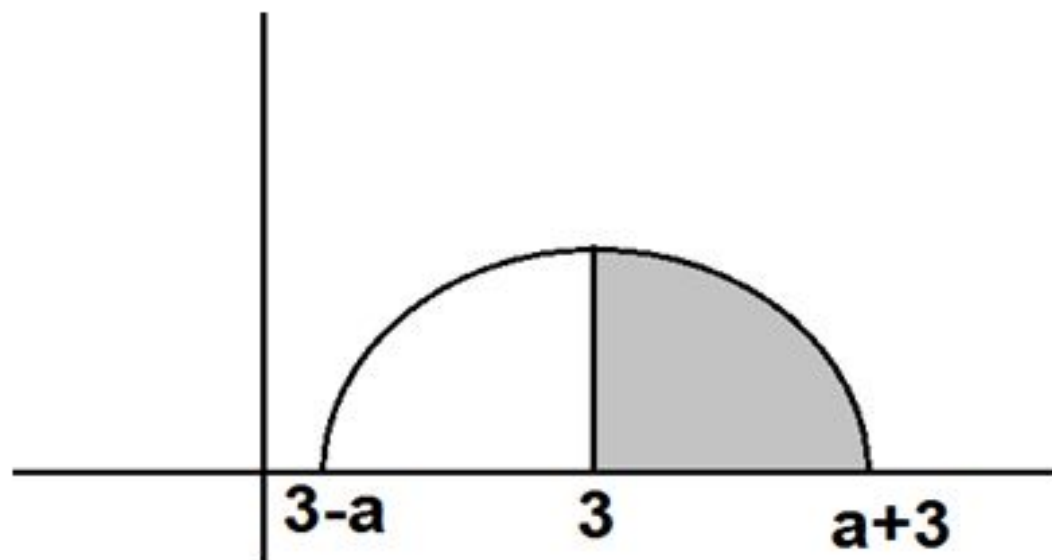
Решение.

Воспользуемся геометрическим смыслом определенного интеграла.

$$\int_3^{a+3} \sqrt{a^2 - (3-x)^2} dx = \frac{1}{4} \pi a^2$$

$$4\pi \leq \frac{1}{4} \pi a^2 \leq 16\pi$$

$$16 \leq a^2 \leq 64$$



$a \in [4; 8]$, т.к. a принимает только положительные, то

сумма целых значений равна 30.

Ответ: №1.

30 Небольшая мебельная фирма производит книжные шкафы и серванты. На изготовление одного книжного шкафа расходуется $\frac{2}{3}$ м² древесно-стружечной плиты, 4 м² сосновой доски и 1 человеко-часа рабочего времени. Аналогичные данные для серванта даются числами: 1 м² древесно-стружечной плиты; 4,5 м² сосновой доски и 3 человеко-часа. Прибыль от реализации одного книжного шкафа составляет 600 руб., а серванта — 1600 руб. В течение одного месяца в распоряжении фирмы имеются: 100 м² древесно-стружечной плиты, 540 м² сосновых досок и 270 человеко-часов рабочего времени. Какова максимальная ожидаемая месячная прибыль?

1 118000 руб.

2 147600 руб.

3 112000 руб.

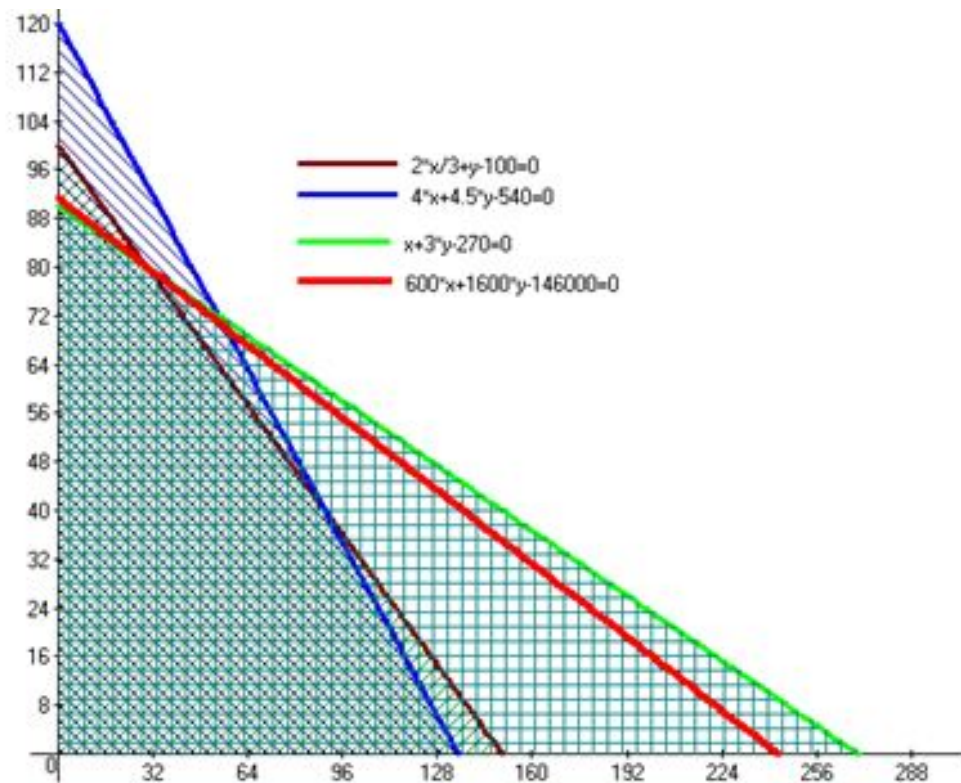
4 162000 руб.

5 146000 руб.

Решение. Составим таблицу.

| | ДСП | Сосновые доски | Человеко- часы | прибыль | количество |
|---------|------------------------------|--------------------|-------------------|---------|------------|
| шкаф | $\frac{2}{3}$ м ² | 4 м ² | 1 | 600 | x |
| сервант | 1 м ² | 4,5 м ² | 3 | 1600 | y |

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + y \leq 100 \\ 4x + \frac{9}{2}y \leq 540 \\ x + 3y \leq 270 \\ 600x + 1600y = a \rightarrow \max, \end{cases}$$



Предельное положение прямой $y = -\frac{3}{8}x + \frac{a}{1600}$ в области при $a \rightarrow \max$, если она пройдет через точку пересечения «зеленой» и «коричневой» прямых. Найдем точку их пересечения, для этого решим систему:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + y = 100 \\ x + 3y = 270 \end{cases}, x = 30, y = 80$$

$$600x + 1600y = 600 \cdot 30 + 1600 \cdot 80 = 146000$$

Ответ: №5.

Иванов Анатолий Прокопьевич

Профессор, Заведующий кафедрой Высшей математики НИУ ВШЭ в ПЕРМИ

Ординарный профессор



Морозова Алена Витальевна

Старший преподаватель кафедры высшей математики НИУ ВШЭ в ПЕРМИ



Морозов Евгений Анатольевич

Старший преподаватель кафедры высшей математики НИУ ВШЭ в ПЕРМИ



Новоселов Антон Вячеславович

Специалист по учебно-методической работе Факультета довузовской подготовки
НИУ ВШЭ в ПЕРМИ

