Решение заданий олимпиады ПРОФИ 2017

1	Уравнение $x \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = \sin 4\alpha - x$ имеет бесконечное множество решений при всех α из множества $(n \in Z)$ **1** $\frac{\pi}{4} + \pi n$ **2** $\frac{\pi}{2} n$ **3** $\frac{\pi}{4} n$ **4** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n$ **5** $\emptyset$

Решение.

$$x(1 - \text{tg}\alpha \cdot \text{ctg}\alpha) = \sin 4\alpha$$

$$\begin{cases} \sin\alpha \neq 0 \\ \cos\alpha \neq 0 \\ \sin 4\alpha = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha \neq \frac{\pi}{2} n, n \in Z \\ \alpha = \frac{\pi}{4} k, k \in Z \end{cases}$$

Ответ:№4

2 Дробь $\dfrac{x^2-x+1}{x^2-\sqrt{13}x+4}$ при $x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ равна

1 $\sqrt{13}+1$ **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 5

Решение.

$$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}{\left(x-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}{\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{\frac{13}{4}+\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=4$$

Ответ:№4

3	Прямой, перпендикулярной прямой $x \sin 165° - y \cos 165° = 1$, является
	1 $x \sin 105° + y \cos 105° = 1$ **2** $x \sin 115° - y \cos 115° = 1$
	3 $x \sin 15° - y \cos 15° = 1$ **4** $x \sin 75° + y \cos 75° = 1$
	5 $y \sin 115° - x \cos 115° = 1$

Решение. Воспользуемся условием перпендикулярности прямых: произведение угловых коэффициентов равно −1.

У данной прямой угловой коэффициент равен: $\left(\frac{\sin 165^0}{\cos 165^0}\right)$

Рассмотрим уравнение прямой под №1, угловой коэффициент равен $\left(-\frac{\sin 105^0}{\cos 105^0}\right)$.

$$\frac{\sin 165^0}{\cos 165^0} \cdot \left(-\frac{\sin 105^0}{\cos 105^0}\right) = -1$$

Ответ:№1

4	Сумма квадратов корней уравнения $x^2-\dfrac{x}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-2}+\sqrt{0,1875}=0$ равна

1 1 2 7 3 4 4 12 5 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Решение.

$$x^2-\frac{x}{\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}-2}+\sqrt{\frac{3}{16}}=x^2-\frac{x}{\sqrt{3}-1}+\frac{\sqrt{3}}{4}=x^2-\frac{(\sqrt{3}+1)x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$x^2-\frac{(\sqrt{3}+1)x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}=0,\quad x_1=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \ x_2=\frac{1}{2}$$

$$(x_1)^2+(x_2)^2=1$$

Ответ №1

5	Сумма целых решений неравенства $\arcsin\left(\log_2\left(\frac{x}{2}\right)\right) > 0$ равна
	1 7 **2** 6 **3** 9 **4** 10 **5** 5

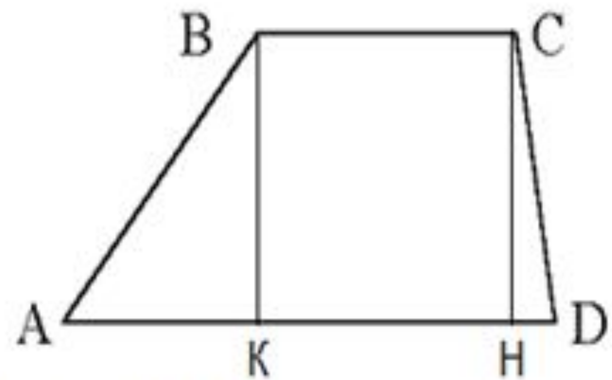
Решение.

$$0 < log_2\left(\frac{x}{2}\right) \le 1, \quad x \in (2;4]$$

Ответ: №1.

6 Найдите площадь трапеции, если ее основания равны 13 и 26, а боковые стороны равны 5 и 12.

1 90 | 2 60 | 3 96 | 4 75 | 5 36



Решение. (1 способ)

$AB = 12, CD = 5, BC = KH = 13, AD = 26$

Пусть $AK = x, HD = 13 - x.$

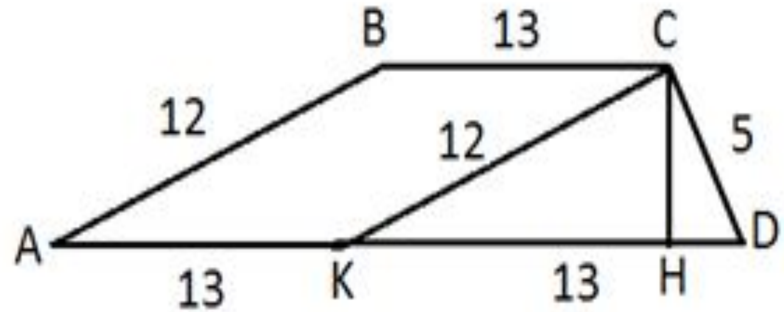
Т.к. BK=CH, то $\sqrt{12^2 - x^2} = \sqrt{5^2 - (13-x)^2}, x = \frac{144}{13}, BK = \frac{12 \cdot 5}{13}$

$$S = \frac{13+26}{2} \cdot \frac{12 \cdot 5}{13} = 90$$

Ответ:№1.

6	Найдите площадь трапеции, если ее основания равны 13 и 26, а боковые стороны равны 5 и 12.
	1 90 2 60 3 96 4 75 5 36

Решение. (2 способ)



Проведем CK параллельно AB.

ΔKCD –прямоугольный, т.к.$13^2 = 12^2 + 5^2$

CH– высота, проведенная к гипотенузе KD.$CH = \frac{KC \cdot CD}{KD}$.

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot CH = \frac{13 + 26}{2} \cdot \frac{12 \cdot 5}{13} = 90$$

Ответ: №1.

7	Если $f(x) = 5x + 2$ и $f(2g(x) + 5) = 15 - 4x$, то производная $g'(x)$ равна $\boxed{\mathbf{1}}$ $-0,4$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $-0,2$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $0,2$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $0,4$ $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Решение.

$$f(2g(x) + 5) = 5 \cdot (2g(x) + 5) + 2 = 10g(x) + 27$$

$$10g(x) + 27 = 15 - 4x$$

$$g(x) = -\frac{4}{10}x - \frac{12}{10}, g'(x) = -0,4$$

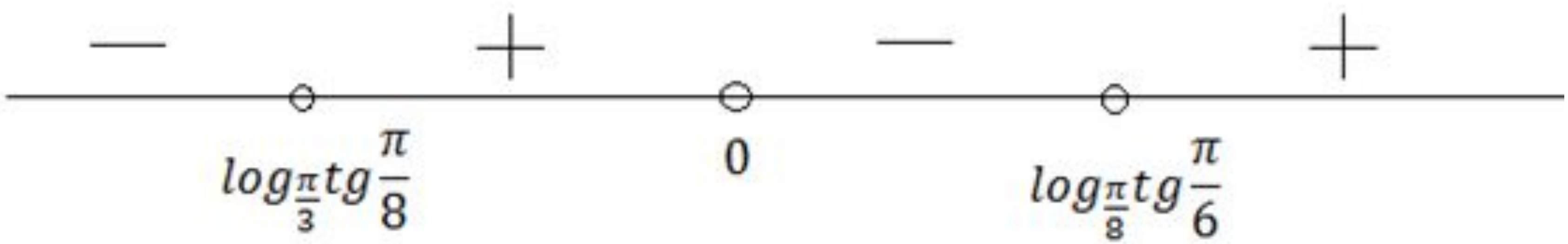
Ответ:№1

8 Все решения неравенства $x \cdot (x - \log_{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}) \cdot (x - \log_{\frac{\pi}{8}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}) > 0$ образуют множество

1. $(-\infty; 0) \bigcup (\log_{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}; \log_{\frac{\pi}{8}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6})$
2. $(-\infty; \log_{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8})$
3. $(\log_{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}; \log_{\frac{\pi}{8}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6})$
4. $(\log_{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}; +\infty)$
5. $(\log_{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}; 0) \bigcup (\log_{\frac{\pi}{8}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}; +\infty)$

Решение.

$$log_{\frac{\pi}{3}} tg \frac{\pi}{8} < 0, \qquad log_{\frac{\pi}{8}} tg \frac{\pi}{6} > 0$$



Ответ: №5.

9 Сумма первых десяти членов последовательности $a_n = n$, принадлежащих области определения функции $y = \sqrt{\lg\cos(0,5\pi x)}$, равна

1) 220 2) 240 3) 184 4) 216 5) 224

Решение.

$$\begin{cases} \lg(\cos(0{,}5\pi x)) \geq 0 \\ \cos(0{,}5\pi x) > 0 \end{cases},$$

$$\cos(0{,}5\pi x) \geq 1,$$

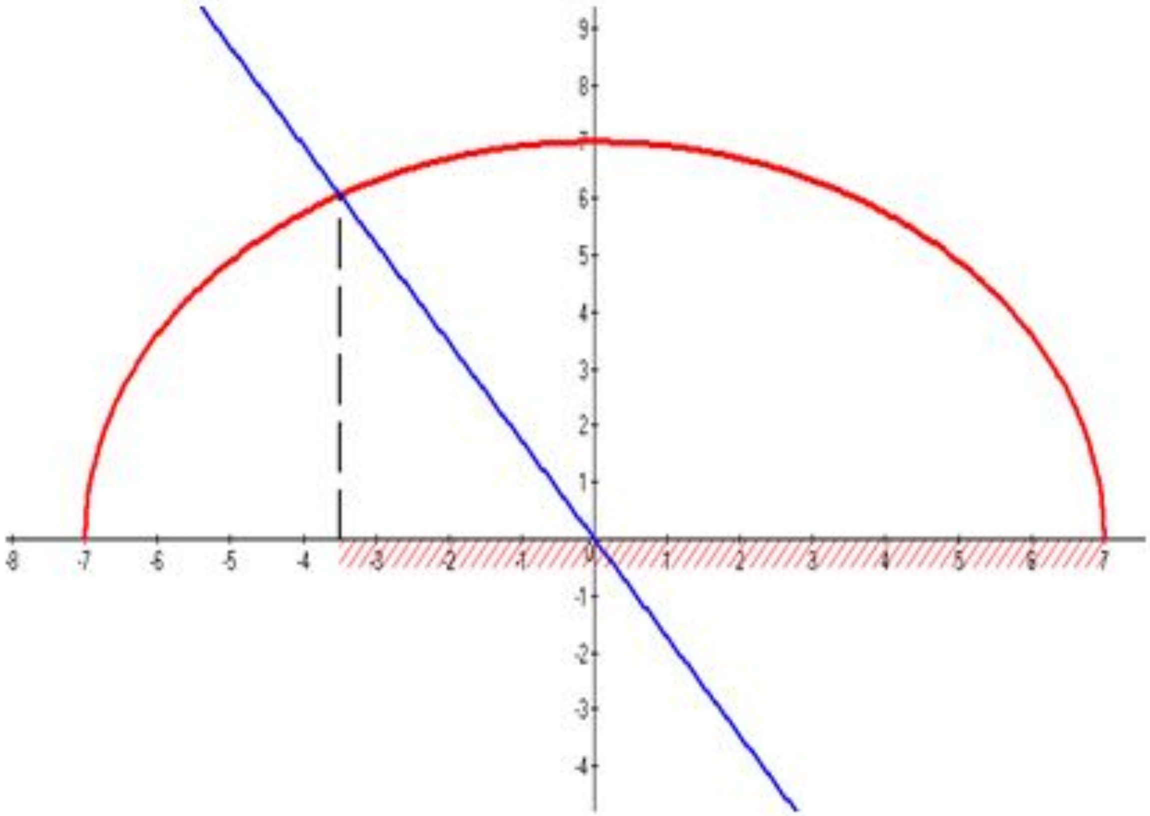
$$x = 4\pi k, k \in Z$$

$$a_1 = 4, d = 4, S_{10} = \frac{2 \cdot 4 + 4 \cdot 9}{2} \cdot 10 = 220$$

Ответ:№1.

10	Сумма целых решений неравенства $\sqrt{3} \cdot x + \sqrt{49 - x^2} > 0$ равна $\boxed{1}$ 22 $\boxed{2}$ 0 $\boxed{3}$ 30 $\boxed{4}$ 18 $\boxed{5}$ 15

Решение.



$\sqrt{49 - x^2} > -\sqrt{3}x.$

$x \in (-3{,}5; 7]$ Сумма целых решений неравенства равна 22.

Ответ: № 1.

11 Объем шара, описанного около куба с ребром, равным $\sqrt[6]{\frac{16}{3\pi^2}}$, составляет

1 2 **2** 4 **3** 3 **4** $\frac{4}{\pi\sqrt{3}}$ **5** $\frac{4\sqrt{6}}{9}$

Решение.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{\left(\frac{4}{\pi\sqrt{3}}\right)3\sqrt{3}}{8} = 2$$

Ответ: №1.

12	Наибольшее расстояние от точки с целочисленными координатами, принадлежащей кривой $x^2 - 3xy + 2y^2 - 11 = 0$, до начала координат равно $\boxed{1}$ $\sqrt{541}$ $\boxed{2}$ $\sqrt{313}$ $\boxed{3}$ $\sqrt{551}$ $\boxed{4}$ $\sqrt{181}$ $\boxed{5}$ 25

Решение.

$$(x-2y)(x-y)=11$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2y=1 \\ x-y=11 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2y=11 \\ x-y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2y=-1 \\ x-y=-11 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2y=-11 \\ x-y=-1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$(21;10),\quad (-9;-10),\quad (-21;-10),\ (9;10)$$

$$d=\sqrt{21^2+10^2}=\sqrt{541}$$

Ответ:№1.

13 Сумма корней уравнения $\log_{\cos x}(\sin x) + \log_{\sin x}(\cos x) = 2$ на промежутке $(-1,8\pi; 2,5\pi)$ составляет

1 $\frac{3}{4}\pi$ **2** $\frac{3}{8}\pi$ **3** $\frac{3}{2}\pi$ **4** $\frac{5}{4}\pi$ **5** уравнение не имеет решений

Решение.

$$\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \\ \sin x \neq 1 \\ \cos x \neq 1 \\ \log_{\cos x}(\sin x) + \dfrac{1}{\log_{\cos x}(\sin x)} = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \\ \sin x \neq 1 \\ \cos x \neq 1 \\ \dfrac{(\log_{\cos x}(\sin x) - 1)^2}{\log_{\cos x}(\sin x)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \\ \sin x \neq 1 \\ \cos x \neq 1 \\ \sin x = \cos x \end{cases}, \quad x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \ \ n \in Z$$

Корни удовлетворяющие условию задания : $\frac{\pi}{4} - 2\pi, \ \frac{\pi}{4}, \ \frac{\pi}{4} + 2\pi.$

Ответ:№1.

14	Произведение корней уравнения $\cos(2\,\mathrm{arctg}\,x) = 0$ равно

1 -1 **2** $-\frac{1}{2}$ **3** 0 **4** 1 **5** $\frac{1}{2}$

Решение.

$$2arctgx = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$arctgx = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$$

$$arctgx = \frac{\pi}{4} \text{ или } arctgx = -\frac{\pi}{4}$$

$$x = \pm 1$$

Ответ:№1.

15	Все решения неравенства $\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x} \geqslant \log_2(x^2-4x+68)$ принадлежат промежутку **1** $(-7;3)$ **2** $(3;11)$ **3** $\emptyset$ **4** $(7;11)$ **5** $(-7;0)$

Решение.

$$y=\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}$$

$$y=log_2(x^2-4x+68)$$

Найдем область значений функции $y=\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}$ с использованием производной. $y \in [\sqrt{18};6]$.

$$y=log_2((x-2)^2+64),\ \ y \in [6;+\infty)$$

$$\begin{cases}\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}=2\\ log_2(x^2-4x+68)=2\end{cases}$$

$$x=2$$

Ответ: №1.

16	Для заполнения бассейна используют 2 насоса. Известно, что если включить первый на 3 ч, а затем только второй на 4 ч, бассейн будет заполнен не меньше чем на 50% и не более чем на 80%. Если включить первый на 2 ч, затем только второй на 6 ч бассейн будет наполнен не меньше чем на 55% и не больше чем на 70%. Все возможные значения процента заполнения бассейна после работы первого насоса в течении 1 ч образуют множество **1** [10%; 28%] **2** [8%; 20%] **3** [2%; 26%] **4** [1%; 10%] **5** [1%; 25%]

Решение.

$$x - \text{производительность } 1-\text{го насоса}$$

$$y - \text{производительность } 2-\text{го насоса}$$

$$V - \text{объем бассейна.}$$

$$\begin{cases} 0{,}5V \le 3x + 4y \le 0{,}8V \\ 0{,}55V \le 2x + 6y \le 0{,}7V \end{cases}, \quad \begin{cases} 1{,}5V \le 9x + 12y \le 2{,}4V \\ 1{,}4V \ge 4x + 12y \ge 1{,}1V \end{cases} \text{"} - \text{"}$$

$$0{,}1V \le 5x \le 1{,}3V$$

$$0{,}02V \le x \le 0{,}26V.$$

Ответ:№3.

16	Для заполнения бассейна используют 2 насоса. Известно, что если включить первый на 3 ч, а затем только второй на 4 ч, бассейн будет заполнен не меньше чем на 50% и не более чем на 80%. Если включить первый на 2 ч, затем только второй на 6 ч бассейн будет наполнен не меньше чем на 55% и не больше чем на 70%. Все возможные значения процента заполнения бассейна после работы первого насоса в течении 1 ч образуют множество $\boxed{1}$ [10%; 28%] $\boxed{2}$ [8%; 20%] $\boxed{3}$ [2%; 26%] $\boxed{4}$ [1%; 10%] $\boxed{5}$ [1%; 25%]

Решение. (2 способ)

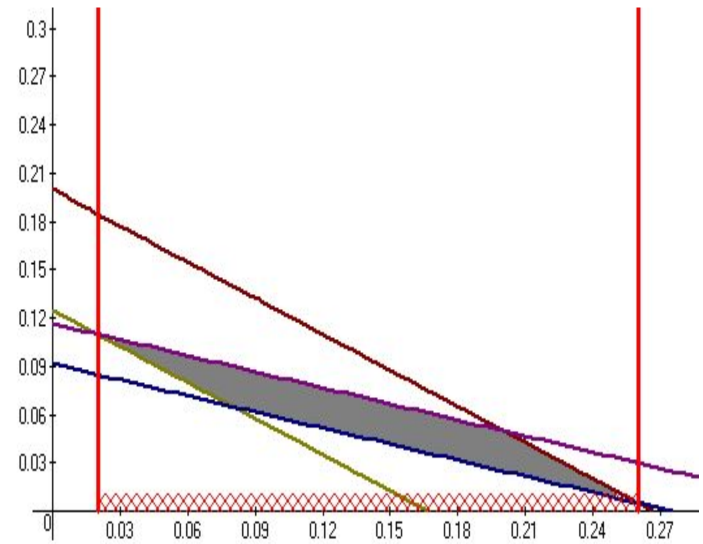
x – производительность 1 – го насоса

y – производительность 2 – го насоса

Пусть 1 – объем бассейна.

$$\begin{cases} 0{,}5 \le 3x + 4y \le 0{,}8 \\ 0{,}55 \le 2x + 6y \le 0{,}7' \end{cases}$$

Построим область удовлетворяющую системе неравенств. Спроецируем полученную область на ось абсцисс.

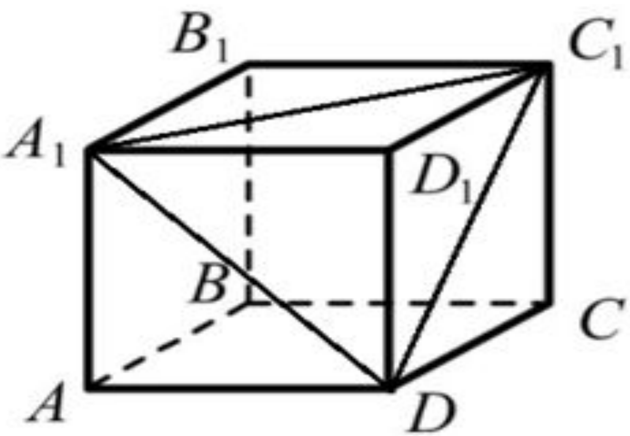


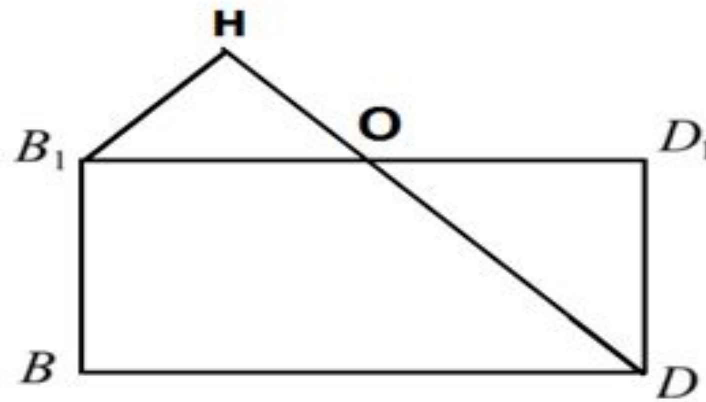
Ответ:№3.

17 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным $\sqrt{3}$, расстояние от точки B_1 до плоскости A_1C_1D составляет

[1] 1 [2] 2 [3] 3 [4] $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ [5] $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Решение.





O – середина A_1C_1, B_1H – перпендикуляр к OD. ΔB_1HO подобен ΔDD_1O.

Пусть $B_1B = a$, тогда $B_1D_1 = a\sqrt{2}$, $DO = a\sqrt{\frac{3}{2}}$

$$\frac{B_1H}{DD_1} = \frac{B_1O}{OD}, \quad B_1H = \frac{B_1O}{OD} \cdot DD_1 = \frac{a}{\sqrt{3}} = 1$$

Ответ: №1.

18	Количество целых a из промежутка $(-5;6)$, при которых уравнение $a\cdot 2^x + 2^{-x} = 4$ имеет два решения, равно $\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 5

Решение.

$2^x = t > 0$

$a \cdot t^2 - 4t + 1 = 0$

Чтобы исходное уравнение имело два решения, надо:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ D > 0 \\ t_1 \cdot t_2 = \frac{1}{a} > 0 \\ t_1 + t_2 = \frac{4}{a} > 0 \end{cases}, \quad a \in (0;4)$$

Ответ: №3

19	Сумма всех целочисленных решений неравенства $(x^2-4)(x-6)(x-10)<105$ равна

1 40   **2** 10   **3** 21   **4** 30   **5** 35

Решение. $(x-2)(x+2)(x-6)(x-10)<105$

$$\big((x-2)(x-6)\big)\big((x+2)(x-10)\big)<105$$

$$(x^2-8x+12)(x^2-8x-20)<105$$

Пусть $x^2-8x=t,\ t^2-8t-345<0,\ t\in(-15;23)$

$$\begin{cases} x^2-8x>-15 \\ x^2-8x<23 \end{cases}$$

$$4-\sqrt{39}<x<3 \qquad 5<x<4+\sqrt{39}$$

Целые решения неравенства: $-2,-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$

Ответ:№1.

20 Число корней уравнения $\cos^2 x - (x^2 - 1)\sin x + x^2 = 1$ на отрезке $[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$ равно

$\boxed{1}$ 4 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 1 $\boxed{4}$ 5 $\boxed{5}$ 3

Решение.

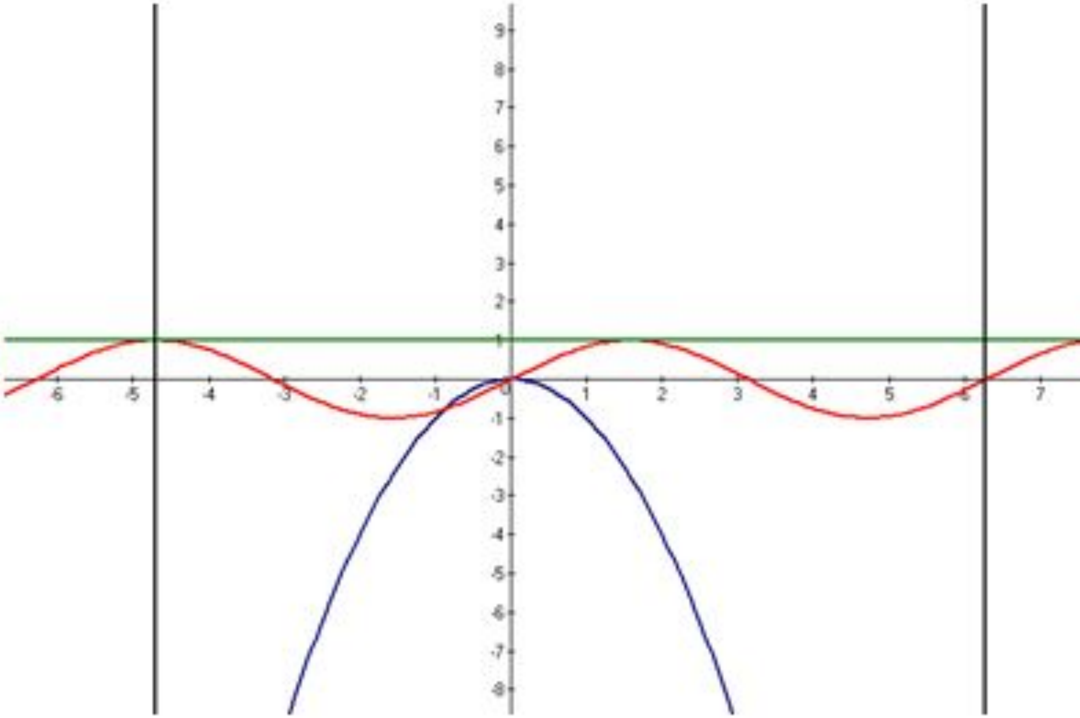
$$sin^2 x + (x^2 - 1)sinx - x^2 = 0$$

$$sin^2 x + x^2 \cdot sinx - sinx - x^2 = 0$$

$$sinx(sinx + x^2) - (sinx + x^2) = 0$$

$$(sinx + x^2)(sinx - 1) = 0$$

$$sinx = 1, \quad sinx = -x^2$$



Ответ: №1

21 Наименьшим положительным корнем уравнения $4\sin x \cdot \cos x = 1 + 3\sin^2 x$ является

$\boxed{1}$ $\arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\boxed{2}$ $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\boxed{3}$ $\arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$ $\boxed{4}$ $\operatorname{arctg} 6$ $\boxed{5}$ $\arcsin \frac{6}{\sqrt{37}}$

Решение.

$$4sinx \cdot cosx = sin^2x + cos^2x + 3sin^2x,$$

$$4sin^2x - 4sinx \cdot cosx + cos^2x = 0,$$

$$4tg^2x - 4tgx + 1 = 0,\ \ (2tgx - 1)^2 = 0.$$

$tgx = \frac{1}{2}$, наименьший корень уравнения $x = arctg\frac{1}{2} = arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Ответ: №1

22 Наибольший из корней уравнения $\frac{4x}{6-x-x^2} - \frac{3x}{6-2x-x^2} + 1 = 0$ принадлежит промежутку

$\boxed{1}$ $(1;10)$ $\boxed{2}$ $(8;12)$ $\boxed{3}$ $(3;7)$ $\boxed{4}$ $(\pi;10)$ $\boxed{5}$ $(-5;0)$

Решение.

$$\frac{4}{\frac{6}{x}-1-x} - \frac{3}{\frac{6}{x}-2-x} + 1 = 0$$

Пусть $\frac{6}{x} - 1 - x = t$, тогда $\frac{4}{t} - \frac{3}{t-1} + 1 = 0$; $\frac{t^2-4}{t(t-1)} = 0$; $t = 2$, $t = -2$

$$\frac{6}{x} - 1 - x = 2, \qquad \frac{6}{x} - 1 - x = -2$$

$$\frac{6-3x-x^2}{x} = 0, \qquad \frac{6+x-x^2}{x}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}, \qquad x_3 = -2, \quad x_4 = 3$$

Наибольший корень $x_4 = 3$

Ответ: №1.

23 Решить неравенство $4x-5>\sqrt{1+x(x+2)}+\sqrt{-3x^2+6x+24}$

$\boxed{1}$ $\left(\frac{7+\sqrt{33}}{4};4\right]$ $\boxed{2}$ $(3;4]$ $\boxed{3}$ $\left(\frac{5}{4};2\right]$ $\boxed{4}$ $\left(\frac{4+\sqrt{33}}{4};4\right]$ $\boxed{5}$ $(-2;4]$

Решение.

$$4x-5>|x+1|+\sqrt{-3x^2+6x+24}$$

$$\begin{cases}-3x^2+6x+24\geq 0\\ 4x-5>0\end{cases},\quad \begin{cases}x\in[-2;4]\\ x>1{,}25\end{cases}$$

$x\in(1{,}25;4]$, тогда $|x+1|=x+1$, $\quad 3x-6>\sqrt{-3x^2+6x+24}$

$$\begin{cases}x>2\\ (3x-6)^2>-3x^2+6x+24,\\ x\in(1{,}25;4]\end{cases}\qquad \begin{cases}x\in(2;\,4]\\ 2x^2-7x+2>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\in(2;\,4]\\ x\in\left(-\infty;\,\frac{7-\sqrt{33}}{4}\right)\cup\left(\frac{7+\sqrt{33}}{4};\,+\infty\right)\end{cases},\qquad \left(\frac{7+\sqrt{33}}{4};\,4\right]$$

Ответ: №1.

24 Множеством значений функции $f(x) = \sin\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3}(\sqrt{5-4x-x^2}-1)^2\right)$ является

$\boxed{1}$ $[-\frac{\sqrt{3}}{2}; 1]$ $\boxed{2}$ $[-1; 0]$ $\boxed{3}$ $[-1; -\frac{1}{2}]$ $\boxed{4}$ $[-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}]$ $\boxed{5}$ $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$

Решение.

Оценим выражение, находящееся под знаком синуса.

$$\sqrt{5-4x-x^2} = \sqrt{9-(x+2)^2}$$

$$0 \le \sqrt{9-(x+2)^2} \le 3, \quad -1 \le \sqrt{9-(x+2)^2} - 1 \le 2,$$

$$0 \le \left(\sqrt{9-(x+2)^2} - 1\right)^2 \le 4, \qquad -\frac{4\pi}{3} \le -\frac{\pi}{3}\left(\sqrt{9-(x+2)^2} - 1\right)^2 \le 0$$

$$0 \le \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\left(\sqrt{9-(x+2)^2} - 1\right)^2 \le \frac{4\pi}{3}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \le sin\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\left(\sqrt{9-(x+2)^2} - 1\right)^2\right) \le 1$$

Ответ: №1.

25 При условии ежегодного начисления дохода сумма пенсионного вклада Марьи Ивановны в банке за второй год хранения увеличилась на 1600 руб, а за четвертый год — на 3600 руб. На сколько рублей увеличится вклад пенсионерки за пятый год?

1) 7680 2) 4320 3) 8533,(3) 4) 6860 5) 5400

Решение.

Пусть V – вклад, q –во столько раз банк увеличивает вклад в год.

$$\begin{cases} Vq^2 - Vq = 1600 \\ Vq^4 - Vq^3 = 3600, \\ Vq^5 - Vq^4 = ? \end{cases} \qquad \begin{cases} Vq(q-1) = 1600 \\ Vq^3(q-1) = 3600 \\ Vq^5 - Vq^4 = ? \end{cases}$$

$$\begin{cases} q^2 = \dfrac{3600}{1600} \\ Vq^5 - Vq^4 = ? \end{cases}$$

$$Vq^5 - Vq^4 = qVq^3(q-1) = \frac{3}{2} \cdot 3600 = 5400$$

Ответ: №5.

26	Многочлен $P(x)$ при делении на x^3+2x^2-5x-6 дает в остатке x^2+x+1. Найти $P(-3)-P(2)+P(-1)$ $\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 5

Решение.

$$P(x)=f(x)\cdot(x^3+2x^2-5x-6)+x^2+x+1$$

Нетрудно заметить, что $-3,-1,\quad 2$ являются нулями функции

$y=x^3+2x^2-5x-6$

Тогда $P(-3)=(-3)^2+(-3)+1=7$

$$P(-1)=(-1)^2+(-1)+1=1$$

$$P(2)=(2)^2+(2)+1=7$$

$$P(-3)-P(2)+P(1)=7-7+1=1$$

Ответ:№1.

27 Найдите сумму всех целых значений параметра a, при которых графики функций $y = 2|x+1| + |x-4|$ и $y = 2|x-3| + x + a$ пересекаются ровно 3 раза.

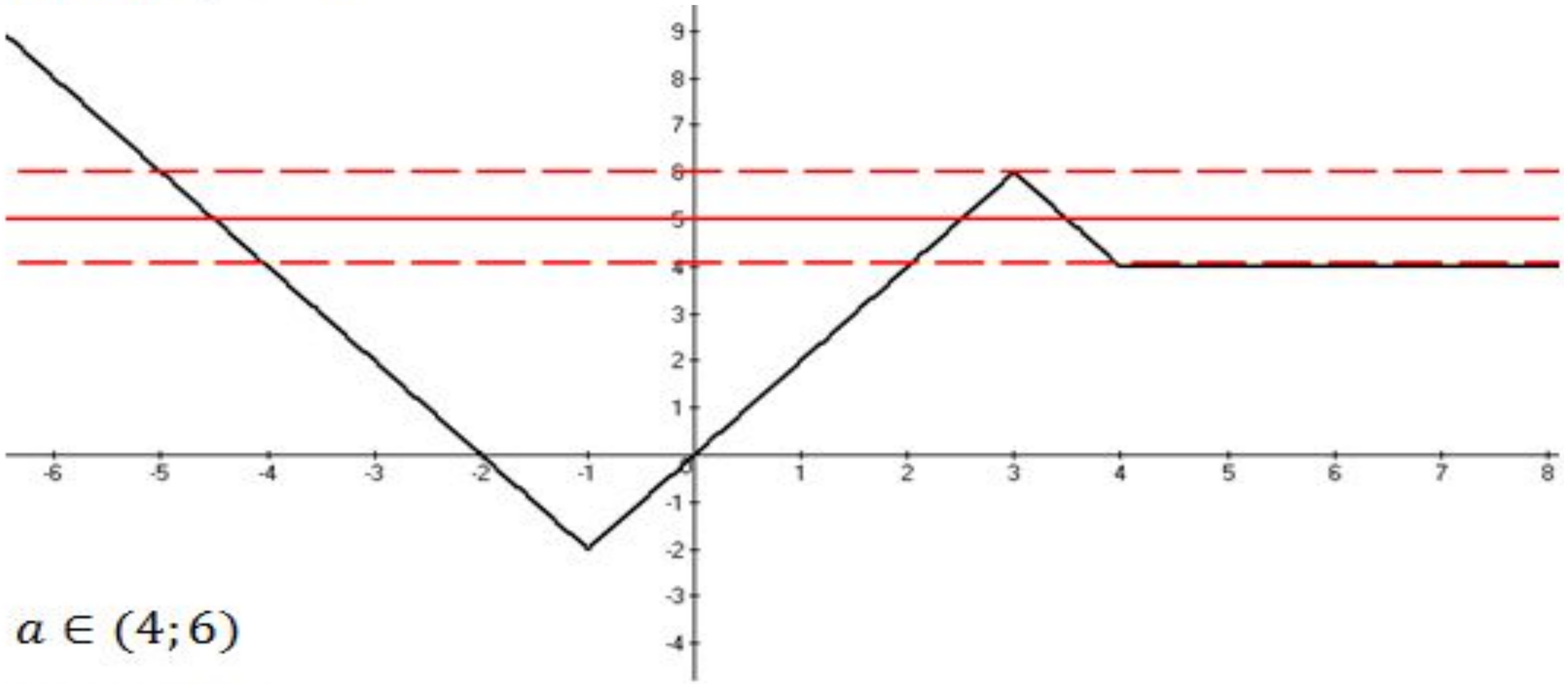
1) 5 2) 15 3) 10 4) 3 5) таких a не существует

Решение. $2|x+1| + |x-4| = 2|x-3| + x + a$

$$2|x+1| + |x-4| - 2|x-3| - x = a$$

Построим график функции $y = 2|x+1| + |x-4| - 2|x-3| - x$

И прямую $y = a$



$a \in (4;6)$

Ответ: №1.

28 Автолюбитель, желая за 4 года накопить средства на покупку кабриолета, разместил в паевом инвестиционном фонде вклад в размере 40 тыс. рублей под 25% годовых. В конце каждого из первых трех лет будущий владелец авто после начисления ему фондом процентов наметил дополнительно вносить на счет одну и ту же фиксированную сумму, такую, чтобы окончательный размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 620,703125%. Какую сумму (в тыс. руб.) необходимо ежегодно добавлять к вкладу?

$\boxed{1}$ 40 $\boxed{2}$ 140 $\boxed{3}$ 50 $\boxed{4}$ 80 $\boxed{5}$ $75,5$

Решение.

Пусть x – необходимо ежегодно добавлять к вкладу.

$$\left(\left((40\cdot 1{,}25+x)\cdot 1{,}25+x\right)\cdot 1{,}25+x\right)1{,}25=40\cdot 7{,}20703125$$

$$x=40$$

Ответ:№1.

29	Сумма всех целых положительных a, для которых выполняется условие $4\pi \leqslant \int\limits_3^{a+3} \sqrt{a^2 - 9 - x^2 + 6x}dx \leqslant 16\pi$ равна $\boxed{1}$ 30 $\boxed{2}$ 140 $\boxed{3}$ 9 $\boxed{4}$ 120 $\boxed{5}$ 1147

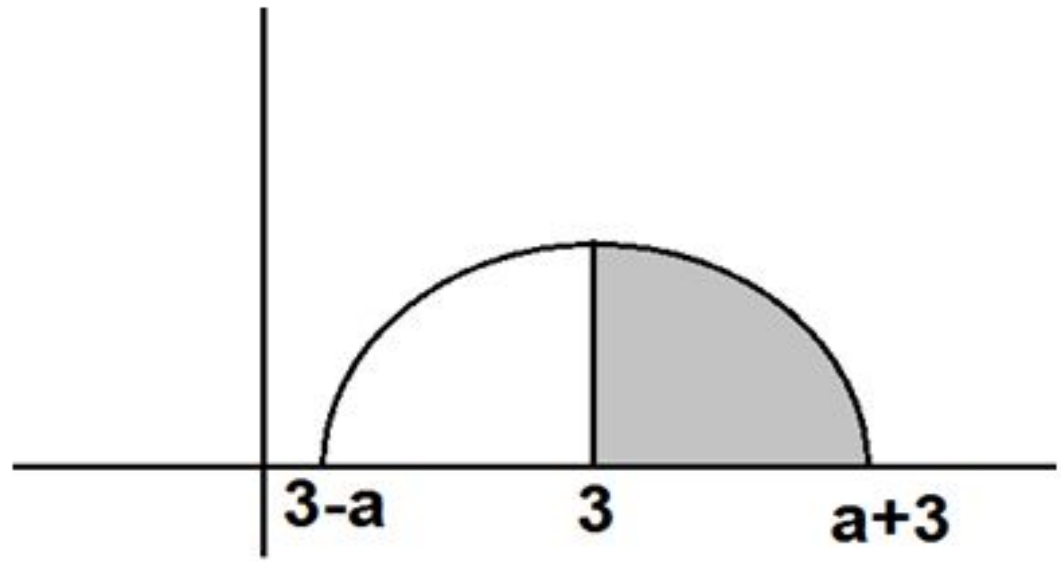
Решение.

Воспользуемся геометрическим смыслом определенного интеграла.

$$\int_3^{a+3} \sqrt{a^2 - (3-x)^2}dx = \frac{1}{4}\pi a^2$$

$$4\pi \leq \frac{1}{4}\pi a^2 \leq 16\pi$$

$$16 \leq a^2 \leq 64$$



$a \in [4; 8]$, т.к. а– принимает только положительные , то

сумма целых значений равна 30.

Ответ:№1.

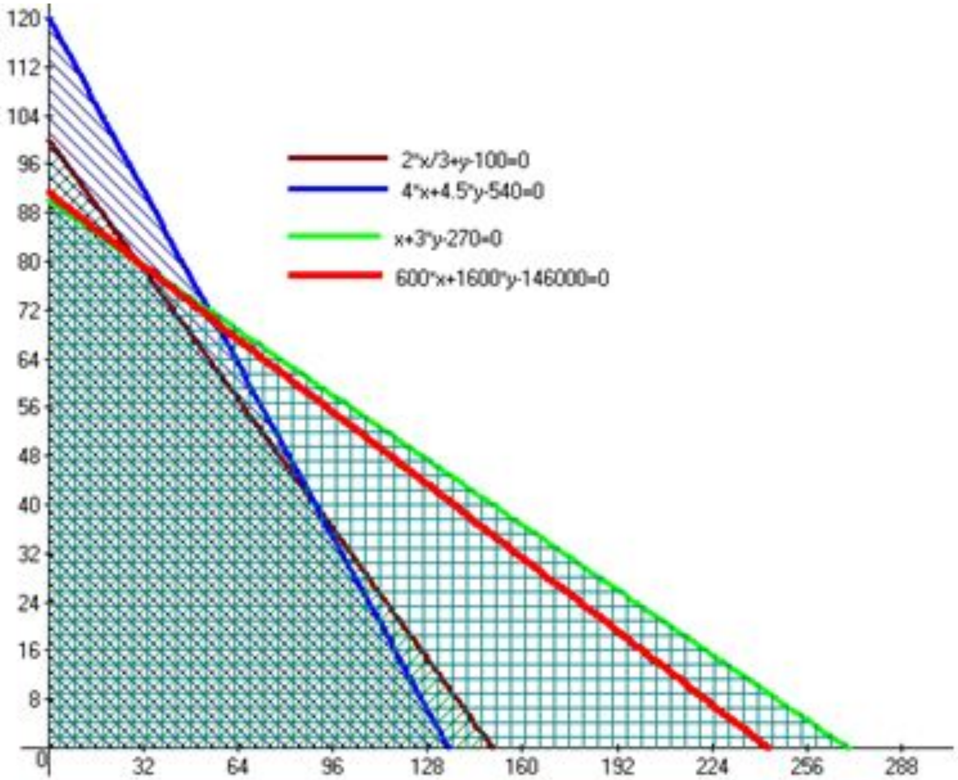
30 Небольшая мебельная фирма производит книжные шкафы и серванты. На изготовление одного книжного шкафа расходуется $\frac{2}{3}$ м^2 древесно-стружечной плиты, 4 м^2 сосновой доски и 1 человеко-часа рабочего времени. Аналогичные данные для серванта даются числами: 1 м^2 древесно-стружечной плиты; 4,5 м^2 сосновой доски и 3 человеко-часа. Прибыль от реализации одного книжного шкафа составляет 600 руб., а серванта — 1600 руб. В течение одного месяца в распоряжении фирмы имеются: 100 м^2 древесно-стружечной плиты, 540 м^2 сосновых досок и 270 человеко-часов рабочего времени. Какова максимальная ожидаемая месячная прибыль?

1. 118000 руб.
2. 147600 руб.
3. 112000 руб.
4. 162000 руб.
5. 146000 руб.

Решение. Составим таблицу.

	ДСП	Сосновые доски	Человеко–часы	прибыль	количество
шкаф	$\frac{2}{3}$ м^2	4 м^2	1	600	x
сервант	1м^2	4,5м^2	3	1600	y

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + y \le 100 \\ 4x + \frac{9}{2}y \le 540 \\ x + 3y \le 270 \\ 600x + 1600y = a \to max, \end{cases}$$



Предельное положение прямой $y = -\frac{3}{8}x + \frac{a}{1600}$ в области при $a \to max$, если она пройдет через точку пересечения «зеленой» и «коричневой» прямых. Найдем точку их пересечения, для этого решим систему:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + y = 100 \\ x + 3y = 270 \end{cases}, \; x = 30, y = 80$$

$$600x + 1600y = 600 * 30 + 1600 * 80 = 146000$$

Ответ:№5.

Иванов Анатолий Прокопьевич

Профессор, Заведующий кафедрой высшей математики НИУ ВШЭ в ПЕРМИ

Ординарный профессор

Морозова Алена Витальевна

Старший преподаватель кафедры высшей математики НИУ ВШЭ в ПЕРМИ

Морозов Евгений Анатольевич

Старший преподаватель кафедры высшей математики НИУ ВШЭ в ПЕРМИ

Новоселов Антон Вячеславович

Специалист по учебно-методической работе Факультета довузовской подготовки НИУ ВШЭ в ПЕРМИ