Методы интегрирования

Непосредственное интегрирование

Этот метод основан на применении свойств неопределенного интеграла и тождественных преобразований.

Пример. $$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$= tgx - ctgx + c$$

Внесение под знак дифференциала.

Этот метод основан на применении формулы f´(x)dx=df(x), которая называется внесением под знак дифференциала. В частности,

$$u^n du = \frac{1}{n+1} d(u^{n+1}), n \neq -1$$

$$\frac{du}{u} = d \ln u$$

$$a^u du = \frac{1}{\ln a} da^u$$

$$\frac{du}{2\sqrt{u}} = d\sqrt{u}$$

$$\frac{du}{\cos^2 u} = dtgu$$

$$\frac{du}{\sin^2 u} = -dctgu$$

$$\frac{du}{1+u^2} = darctgu = -darcctgu$$

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = d \arcsin u = -d \arccos u$$

$$e^u du = de^u$$

$$\sin u du = -d\cos u$$

$$\cos u du = d\sin u$$

Замена переменной

Этот метод основан на применении формул x=φ(t) или t=φ(x), где t – новая переменная. Вычислив интеграл, нужно вернуться к первоначальной переменной.

Пример. Вычислить $\int \frac{x}{(3x+1)^2}dx$.

Обозначим 3x+1=t, откуда $x=\frac{1}{3}(t-1)$, $dx=\frac{1}{3}dt$.

Получаем

$$\int \frac{x}{(3x+1)^2}dx=\int \frac{\frac{1}{3}(t-1)}{t^2}\cdot\frac{1}{3}dt=\frac{1}{9}\int\frac{t-1}{t^2}dt=\frac{1}{9}\int\left(\frac{1}{t}-t^{-2}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{9}\left(\ln|t|-\frac{t^{-1}}{-1}\right)+c=\frac{1}{9}\left(\ln|3x+1|+\frac{1}{3x+1}\right)+c$$

Интегрирование рациональных функций

- Дробно – рациональная функция
- Простейшие рациональные дроби
- Разложение рациональной дроби на простейшие дроби
- Интегрирование простейших дробей
- Общее правило интегрирования рациональных дробей

Дробно – рациональная функция

Дробно – рациональной функцией называется функция, равная отношению двух многочленов:

$$f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

Рациональная дробь называется ***правильной***, если степень числителя меньше степени знаменателя, то есть $m < n$, в противном случае дробь называется ***неправильной***.

Всякую неправильную рациональную дробь можно, путем деления числителя на знаменатель, представить в виде суммы многочлена $L(x)$ и правильной рациональной дроби:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=L(x)+\boxed{\frac{R(x)}{Q(x)}}$$

Дробно – рациональная функция

Привести неправильную дробь к правильному виду: $\dfrac{x^4-5x+9}{x-2}$

$$
\begin{array}{l|l}
x^4-5x+9 & x-2 \\
\underline{-\,x^4-2x^3} & \boxed{x^3+2x^2+4x+3} \\
\quad 2x^3-5x+9 & \\
\quad \underline{-\,2x^3-4x^2} & \\
\qquad 4x^2-5x+9 & \\
\qquad \underline{-\,4x^2-8x} & \\
\qquad\quad 3x+9 & \\
\qquad\quad \underline{-\,3x-6} & \\
\qquad\qquad \boxed{15} &
\end{array}
$$

$$\frac{x^4-5x+9}{\boxed{x-2}} = \boxed{x^3+2x^2+4x+3} + \frac{\boxed{15}}{\boxed{x-2}}$$

Простейшие рациональные дроби

Правильные рациональные дроби вида:

$$(\mathrm{I}) \quad \frac{A}{x-a}$$

$$(\mathrm{II}) \quad \frac{A}{(x-a)^k} \quad (k \geq 2;\, k \in N)$$

$$(\mathrm{III}) \quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \quad (p^2-4q<0)$$

$$(\mathrm{IV}) \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} \quad (p^2-4q<0; \quad k \geq 2;\, k \in N)$$

Называются ***простейшими рациональными дробями*** $\mathrm{I, II, III, IV}$ типов.

Разложение рациональной дроби на простейшие дроби

Теорема: Всякую правильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой разложен на множители:

$$Q(x)=(x-x_1)\cdot(x-x_2)^k\cdot\ldots\cdot(x^2+p_1x+q_1)\cdot$$

$$\cdot(x^2+p_2x+q_2)^s$$

можно представить, притом единственным образом в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B_1}{x-x_2}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+\ldots+\frac{B_k}{(x-x_2)^k}$$

$$+\frac{Cx+D}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_2x+q_2}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_2x+q_2)^2}+$$

$$+\ldots+\frac{M_sx+N_s}{(x^2+p_2x+q_2)^s}$$

Разложение рациональной дроби на простейшие дроби

Поясним формулировку теоремы на следующих примерах:

$$\frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^3}=\frac{A}{x-2}+\frac{B_1}{x-3}+\frac{B_2}{(x-3)^2}+\frac{B_3}{(x-3)^3}$$

$$\frac{x^3+3}{x^2(x^2+1)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$\frac{7x^2+8x+9}{(x-4)(x^2+x+1)^2}=\frac{A}{x-4}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+x+1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+x+1)^2}$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов *A, B, C, D*… применяют два метода: ***метод сравнивания коэффициентов и метод частных значений переменной***. Первый метод рассмотрим на примере.

Разложение рациональной дроби на простейшие дроби

Представить дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\boxed{\frac{-1}{x-1}+\frac{3x-2}{x^2-2x+5}}$$

$$\frac{A(x^2-2x+5)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2-2x+5)}$$

$$Ax^2-2Ax+5A+Bx^2+Cx-Bx-C=2x^2-3x-3$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 & \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array}\left[\begin{array}{l} A+B=2 \\ -2A+C-B=-3 \\ 5A-C=-3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=-1 \\ B=3 \\ C=-2 \end{array}\right. \Rightarrow$$

Интегрирование простейших дробей

Найдем интегралы от простейших рациональных дробей:

$\boxed{\text{I}}$ $$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = \boxed{A\ln|x-a| + C}$$

$\boxed{\text{II}}$ $$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) =$$

$$= \boxed{\frac{A(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C}$$

$\boxed{\text{III}}$ $$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx$$

Интегрирование дроби 3 типа рассмотрим на примере.

Интегрирование простейших дробей

$$\int \frac{3x+1}{(x^2+2x)+10}\,dx = \int \frac{3x+1}{(x^2+2x+1)+9}\,dx =$$

$$= \int \frac{3x+1}{(x+1)^2+9}\,dx = \left| \begin{array}{l} x+1=t \\ x=t-1 \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{3(t-1)+1}{t^2+9}\,dt =$$

$$= \int \frac{3t-2}{t^2+9}\,dt = 3\int \frac{t\,dt}{t^2+9} - 2\int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{3}{2}\int \frac{d\left(t^2+9\right)}{t^2+9} -$$

$$-\frac{2}{3}arctg\,\frac{t}{3} = \frac{3}{2}\ln\left|t^2+9\right| - \frac{2}{3}arctg\,\frac{t}{3} + C =$$

$$= \boxed{\frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+10\right| - \frac{2}{3}arctg\,\frac{x+1}{3} + C}$$

Общее правило интегрирования рациональных дробей

- Если дробь неправильная, то представить ее в виде суммы многочлена и правильной дроби.
- Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представить ее в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами
- Найти неопределенные коэффициенты методом сравнения коэффициентов или методом частных значений переменной.
- Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

Пример

$$I = \int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^3 + 2x^2 + x}\,dx$$

Приведем дробь к правильному виду.

$$\begin{array}{l|l}
x^5 + 2x^3 + 4x + 4 & x^3 + 2x^2 + x \\
\hline
\underline{x^5 + 2x^4 + x^3} & x^2 - 2x + 5 \\
\quad -2x^4 + x^3 + 4x + 4 & \\
\quad \underline{-2x^4 - 4x^3 - 2x^2} & \\
\qquad 5x^3 + 2x^2 + 4x + 4 & \\
\qquad \underline{5x^3 + 10x^2 + 5x} & \\
\qquad\qquad -8x^2 - x + 4 &
\end{array}$$

$$\frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^3 + 2x^2 + x} = x^2 - 2x + 5 + \frac{-8x^2 - x + 4}{x^3 + 2x^2 + x}$$

Пример

$$\frac{-8x^2-x+4}{x^3+2x^2+x}=\frac{-8x^2-x+4}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}$$

$$A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx=-8x^2-x+4$$

$$\begin{array}{c|c} x=0 & A=4 \\ x=-1 & -C=-3 \\ x=1 & 4A+2B+C=-5 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A=4 \\ B=-12 \\ C=3 \end{cases}$$

$$\frac{-8x^2-x+4}{x^3+2x^2+x}=\frac{4}{x}-\frac{12}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}$$

Пример

$$\mathrm{I} = \int x^2 - 2x + 5 + \frac{4}{x} - \frac{12}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}\,dx =$$

$$\int x^2 dx - 2\int x dx + 5\int dx + 4\int \frac{dx}{x} - 12\int \frac{dx}{x+1} + 3\int \frac{dx}{(x+1)^2} =$$

$$= \boxed{\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + 4\ln|x| - 12\ln|x+1| - \frac{3}{x+1} + C}$$